NOME: ....   **MATRICOLA:** ....

Corso di Laurea in Matematica, A.A. 2010/2011
Analisi Reale e Complessa, Esame del 08.09.2011

1) Consideriamo la serie di funzioni $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ ove $f_k : (0\,,1) \longrightarrow \mathbb{R}$ è definita tramite la formula

$$f_k(x) := x^{2k} \ln x\,, \qquad x \in (0\,,1)\,.$$

Si verifichi che l'integrale

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \bigg(\sum_{k=0}^{\infty} f_k\bigg)(x)\,\mathrm{d}x$$

si può calcolare integrando sotto il segno della sommatoria e si svolga questo calcolo.

2) (a) Si verifichi che la formula

$$g(z) := \frac{z-i}{z+i}$$

definisce una funzione biolomorfa del semipiano superiore $\big\{z \in \mathbb{C}\,;\, \operatorname{Im} z > 0\big\}$ sul disco unitario $\big\{w \in \mathbb{C}\,;\, |w| < 1\big\}$.

(b) Si dimostri che ogni funzione olomorfa $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ soddisfacente

$$\operatorname{Im} f(z) > 0\,, \qquad z \in \mathbb{C}$$

dev'essere costante.

(c) Si dimostri che ogni funzione armonica $u : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ soddisfacente

$$u(z) > 0\,, \qquad z \in \mathbb{C}$$

dev'essere costante.

3) Indicheremo con ln la funzione olomorfa (ramo olomorfo del logaritmo che è una funzione multivalente) definita nel dominio

$$\left\{\rho e^{i\theta}\,;\ \rho>0\,,-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{3\pi}{2}\right\}$$

tramite $\ln\left(\rho e^{i\theta}\right):=\ln\rho+i\theta$ $\left(\text{per esempio, } \ln(-1)=i\pi \text{ e } \ln i=\dfrac{i\pi}{2}\right)$.

Si calcoli l'integrale improprio

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\ln z}{(1+z^2)^2}\,\mathrm{d}z=\lim_{\substack{r\to+\infty\\ 0<\varepsilon\to 0}}\left(\int_{-r}^{-\varepsilon}\frac{\ln z}{(1+z^2)^2}\,\mathrm{d}z+\int_{\varepsilon}^{r}\frac{\ln z}{(1+z^2)^2}\,\mathrm{d}z\right)$$

usando il teorema dei residui per una curva chiusa regolare a tratti adatta nel semipiano superiore.

<u>Ricordiamo</u> che il residuo di f in un polo semplice z_o si calcola usando la formula

$$\operatorname*{Res}_{z_o}(f)=\lim_{z\to z_o}(z-z_o)f(z)$$

mentre nel caso di un polo di ordine due si usa la formula

$$\operatorname*{Res}_{z_o}(f)=\lim_{z\to z_o}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\Big((z-z_o)^2f(z)\Big)\,.$$

Soluzioni:

1) **:** Poiché $-f_k(x) = -\ln x = \ln \dfrac{1}{x} > 0$ per ogni $0 < x < 1$, la successione

$$- \sum_{k=0}^{n} f_k = \sum_{k=0}^{n} \big(- f_k \big) , \qquad n = 0\,,1\,,2\,...$$

di funzioni continue positive è crescente avendo come limite

$$(0\,,1) \ni x \longmapsto - \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) = - \left(\sum_{k=0}^{\infty} x^{2k} \right) \ln x = - \frac{\ln x}{1 - x^2} \ .$$

Possiamo quindi applicare il teorema della convergenza monotona ed integrare sotto il segno della sommatoria:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \left(- \int_0^1 f_k(x)\,\mathrm{d}x \right) &= \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \left(- \sum_{k=0}^{n} f_k(x) \right) \mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \left(- \frac{\ln x}{1 - x^2} \right) \mathrm{d}x \,, \end{aligned}$$

cioè

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left(- \int_0^1 f_k(x)\,\mathrm{d}x \right) = \int_0^1 \left(- \frac{\ln x}{1 - x^2} \right) \mathrm{d}x \,.$$

Ora calcoliamo $- \int_0^1 f_k(x)\,\mathrm{d}x$ usando integrazione per parti :

$$\begin{aligned} - \int_0^1 f_k(x)\,\mathrm{d}x &= - \int_0^1 x^{2k} \ln x \,\mathrm{d}x = - \int_0^1 \ln x \,\mathrm{d}\!\left(\frac{x^{2k+1}}{2k+1} \right) \\ &= - \frac{x^{2k+1} \ln x}{2k+1} \Bigg|_{x=0}^{x=1} + \int_0^1 \left(\frac{x^{2k+1}}{2k+1} \cdot \frac{1}{x} \right) \mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \frac{x^{2k}}{2k+1}\,\mathrm{d}x = \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)^2} \Bigg|_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{(2k+1)^2} \ . \end{aligned}$$

Poiché la serie $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{1}{(2k+1)^2}$ converge, la funzione positiva

$$(0\,,1) \ni x \longmapsto -\frac{\ln x}{1-x^2}$$

è integrabile e

$$\int\limits_0^1 \left(-\frac{\ln x}{1-x^2} \right) \mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}\,.$$

Risluta che anche la funzione negativa

$$(0\,,1) \ni x \longmapsto \frac{\ln x}{1-x^2}$$

è integrabile e

$$\int\limits_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2}\,\mathrm{d}x = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}\,. \tag{*}$$

Rimarco 1. Possiamo verificare l'integrabilità della funzione positiva

$$g : (0\,,1) \ni x \longmapsto -\frac{\ln x}{1-x^2} \in (0\,,+\infty)$$

anche in modo diretto, senza ricorrere al teorema della convergenza monotona.

Infatti, poiché

$$\lim_{1>x\to 1} \left(-\frac{\ln x}{1-x^2} \right) \overset{t=-\ln x}{=} \lim_{0<t\to 0} \frac{t}{1-e^{-2t}} = \lim_{0<t\to 0} \frac{1}{-e^{-2t}(-2)} = \frac{1}{2}\,,$$

ponendo $g(1) := \dfrac{1}{2}$ si ottiene una estensione continua di g su $(0\,,1]$. Questa estensione sarà limitata in ogni intervallo $[\varepsilon\,,1]\,, 0<\varepsilon\leq 1$. In particolare g si maggiora in $\left[\dfrac{1}{2}\,,1\right)$ con una funzione costante che è integrabile. D'altro canto, in $\left(0\,,\dfrac{1}{2}\right]$ la funzione g si maggiora con la funzione integrabile

$$x \longmapsto -\frac{4}{3}\ln x\,.$$

Risulta che la funzione continua g ha un maggiorante integrabile e di conseguenza è integrabile.

Con un pò di lavoro addizionale possiamo esibire per g un maggiorante integrabile esplicito, dimostrando la disuguaglianza

$$0 < -\frac{\ln x}{1-x^2} < \frac{1}{\sqrt{x}}\,, \qquad 0 < x < 1\,.$$

Per la dimostrazione facciamo il cambio di variabile $t = -\ln x$. Così la disuguaglianza a dimostrare diventa

$$\frac{t}{1-e^{-2t}} < e^{\frac{t}{2}}\,, \qquad t > 0\,.$$

Ma per $t > 0$

$$\begin{aligned} \frac{t}{1-e^{-2t}} < e^{\frac{t}{2}} &\iff t < e^{\frac{t}{2}}\big(1-e^{-t}\big)\big(1+e^{-t}\big) \\ &\iff t < \big(e^{\frac{t}{2}} - e^{-\frac{t}{2}}\big)\big(1+e^{-t}\big) \end{aligned}$$

risulta moltiplicando la disuguaglianza

$$e^{\frac{t}{2}} - e^{-\frac{t}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\,\frac{t^n}{2^n} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\,\frac{t^n}{2^n} = \sum_{\substack{n\geq 0 \\ n \text{ dispari}}} \frac{2}{n!}\,\frac{t^n}{2^n} > t$$

con la disuguaglianza ovvia $1 + e^{-t} > 1$.

Rimarco 2. Per ogni $\alpha > 1$ abbiamo una relazione naturale tra le somme delle serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \quad \text{e} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^\alpha} = \sum_{\substack{n\geq 1 \\ n \text{ dispari}}} \frac{1}{n^\alpha}\,.$$

Infatti,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \sum_{\substack{n\geq 1 \\ n \text{ dispari}}} \frac{1}{n^\alpha} + \sum_{\underbrace{\substack{n\geq 2 \\ n \text{ pari}}}_{n=2k}} \frac{1}{n^\alpha} = \sum_{\substack{n\geq 1 \\ n \text{ dispari}}} \frac{1}{n^\alpha} + \frac{1}{2^\alpha}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$$

implica

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^\alpha} = \sum_{\substack{n\geq 1 \\ n\,\text{dispari}}} \frac{1}{n^\alpha} = \left(1 - \frac{1}{2^\alpha}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}\,.$$

In particolare

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{3}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

e (*) implica

$$\int\limits_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{3}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\,.$$

Chi conosce che $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ può concludere :

$$\int\limits_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{\pi^2}{8}\,.$$

2) : (a) g è una funzione olomorfa su $\mathbb{C}\setminus\{-i\}$ in quanto è il raporto di due polinomi ed il polinomio nel denumeratore si annulla solo in $z = -i$.

Per $w \in \mathbb{C}$ l'equazione

$$\frac{z-i}{z+i} = w \iff w\,z + i\,w = z - i \iff i\,(1+w) = (1-w)\,z$$

ammette soluzione in z solo se $w \neq 1$ ed allora la soluzione è unica :

$$z = i\,\frac{1+w}{1-w}\,.$$

Risulta che g è iniettiva, $g\big(\mathbb{C}\setminus\{-i\}\big) = \mathbb{C}\setminus\{1\}$, e la funzione inversa $g^{-1} : \mathbb{C}\setminus\{1\} \longrightarrow \mathbb{C}\setminus\{-i\}$ è definita dalla formula

$$g^{-1}(w) = i\,\frac{1+w}{1-w}\,.$$

Poiché g^{-1} è il rapporto di due polinomi, è olomorfa. Cosiché g è una una funzione biolomorfa di $\mathbb{C}\setminus\{-i\}$ su $\mathbb{C}\setminus\{1\}$.

Per dimostrare che g definisce una funzione biolomorfa del semipiano superiore $\{z \in \mathbb{C}\,;\, \mathrm{Im}\, z > 0\}$ sul disco unitario $\{z \in \mathbb{C}\,;\, \mathrm{Im}\, z > 0\}$, resta da verificare che g applica $\{z \in \mathbb{C}\,;\, \mathrm{Im}\, z > 0\}$ esattamente su $\{z \in \mathbb{C}\,;\, \mathrm{Im}\, z > 0\}$, cioè che per $z \in \mathbb{C} \setminus \{-i\}$ vale l'equivalenza

$$\mathrm{Im}\, z > 0 \iff \left| \frac{z-i}{z+i} \right| < 1\,.$$

Ma

$$\left| \frac{z-i}{z+i} \right| < 1$$

è ovviamente equivalente a

$$|z+i|^2 - |z-i|^2 > 0$$

e l'ugualità

$$\begin{aligned} |z+i|^2 - |z-i|^2 &= (z+i)(\overline{z}-i) - (z-i)(\overline{z}+i) \\ &= \Big(|z|^2 - i\,(z-\overline{z}) + 1 \Big) - \Big(|z|^2 + i\,(z-\overline{z}) + 1 \Big) \\ &= \Big(|z|^2 + 2\,\mathrm{Im}\, z + 1 \Big) - \Big(|z|^2 - 2\,\mathrm{Im}\, z + 1 \Big) \\ &= 4\,\mathrm{Im}\, z \end{aligned}$$

implica

$$|z+i|^2 - |z-i|^2 > 0 \iff \mathrm{Im}\, z > 0\,.$$

(b) Se $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ è una funzione olomorfa soddisfacente

$$\mathrm{Im}\, f(z) > 0\,, \qquad z \in \mathbb{C}\,,$$

allora, con g come in (a), $g \circ f$ sarà una funzione olomorfa su $\mathbb{C}$ soddisfacente

$$|(g \circ f)(z)| < 1\,, \qquad z \in \mathbb{C}\,.$$

Ora il teorema di Liouville implica che $g \circ f$ è costante e risulta che anche $f = g^{-1} \circ (g \circ f)$ è costante.

(c) Sia $u : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione armonica soddisfacente

$$u(z) > 0\,, \qquad z \in \mathbb{C}\,.$$

Poiché il dominio $\mathbb{C}$ è semplicemente connesso, esiste una funzione olomorfa $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ tale che $\operatorname{Im} f = u$. Ora possiamo applicare (b) di cui sopra e dedurre che f, quindi anche u è costante.

3) : Indichiamo

$$f(z) := \frac{\ln z}{(1+z^2)^2}\,, \qquad z \in \mathbb{C}\setminus\Big(\{i\} \cup \big(i\,(-\infty\,,0]\big)\Big)\,.$$

Allora f è una funzione meromorfa con un polo di ordine due in i ed il suo residuo in i è

$$\begin{aligned}
\operatorname*{Res}_i(f) &= \lim_{z\to i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\Big((z-i)^2 f(z)\Big) = \lim_{z\to i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\,\frac{\ln z}{(z+i)^2} \\
&= \lim_{z\to i}\left(\frac{1}{(z+i)^2}\cdot\frac{1}{z} - \frac{2}{(z+i)^3}\cdot \ln z\right) \\
&= \frac{1}{-4}\cdot\frac{1}{i} - \frac{2}{-8i}\cdot\frac{i\pi}{2} \\
&= \frac{\pi}{8} + \frac{i}{4}\,.
\end{aligned}$$

D'altro canto indichiamo, per ogni $\rho > 0$, con $\partial^+ U_\rho^+(0)$ e $\partial^- U_\rho^+(0)$ il semicerchio

$$\big\{z \in \mathbb{C}\,;\, |z| = \rho\,, \mathrm{Im} z \geq 0\big\}$$

orientato contro il senso delle lancette rispettivamente nel senso delle lancette :

$$\partial^+ U_\rho^+(0) \text{ è la curva } [0\,,\pi] \ni t \longmapsto \rho e^{it} \in \mathbb{C}\,,$$
$$\partial^- U_\rho^+(0) \text{ è la curva } [0\,,\pi] \ni t \longmapsto \rho e^{i(\pi-t)} = -\rho e^{-it} \in \mathbb{C}\,.$$

Siano adesso $0 < \varepsilon < 1 < r$ e consideriamo la curva chiusa $\gamma_{\varepsilon,r}$ nel semipiano superiore chiuso che si ottiene componendo

il segmento $[-r\,,-\varepsilon]$,
il semicerchio $\partial^- U_\varepsilon^+(0)$,
il segmento $[\varepsilon\,,r]$,
il semicerchio $\partial^+ U_r^+(0)$.

Per il teorema dei residui abbiamo

$$\int\limits_{\gamma_{\varepsilon,r}} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \operatorname*{Res}_{i}(f) = -\,\frac{\pi}{2} + \frac{\pi^2}{4}\,i\ ,$$

quindi

$$\int\limits_{-r}^{-\varepsilon} f(z)\,\mathrm{d}z + \int\limits_{\partial^- U_\varepsilon^+(0)} f(z)\,\mathrm{d}z + \int\limits_{\varepsilon}^{r} f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{\partial^+ U_r^+(0)} f(z)\,\mathrm{d}z = -\,\frac{\pi}{2} + \frac{\pi^2}{4}\,i\ ,$$

$$\int\limits_{-r}^{-\varepsilon} f(z)\,\mathrm{d}z + \int\limits_{\varepsilon}^{r} f(x)\,\mathrm{d}x = -\,\frac{\pi}{2} + \frac{\pi^2}{4}\,i + \int\limits_{\partial^+ U_\varepsilon^+(0)} f(z)\,\mathrm{d}z - \int\limits_{\partial^+ U_r^+(0)} f(z)\,\mathrm{d}z\ .$$

Ora la stima

$$\begin{aligned}\Bigg|\int\limits_{\partial^+ U_r^+(0)} f(z)\,\mathrm{d}z\Bigg| &\leq \int\limits_{\partial^+ U_r^+(0)} \big|f(z)\big|\,\mathrm{d}|z| = \int\limits_{\partial^+ U_r^+(0)} \left|\frac{\ln z}{(1+z^2)^2}\right|\mathrm{d}|z| \\ &\leq \int\limits_{\partial^+ U_r^+(0)} \frac{\ln r + \pi}{(r^2-1)^2}\,\mathrm{d}|z| = \frac{\pi r(\ln r + \pi)}{(r^2-1)^2} \\ &\leq \frac{\pi(\ln r + \pi)}{(r-1)(r^2-1)}\,, \qquad r > 1\end{aligned}$$

implica

$$\lim_{r\to+\infty} \int\limits_{\partial^+ U_r^+(0)} f(z)\,\mathrm{d}z = 0\ .$$

Similmente, poiché

$$\begin{aligned}\Bigg|\int\limits_{\partial^+ U_\varepsilon^+(0)} f(z)\,\mathrm{d}z\Bigg| &\leq \int\limits_{\partial^+ U_\varepsilon^+(0)} \big|f(z)\big|\,\mathrm{d}|z| = \int\limits_{\partial^+ U_\varepsilon^+(0)} \left|\frac{\ln z}{(1+z^2)^2}\right|\mathrm{d}|z| \\ &\leq \int\limits_{\partial^+ U_\varepsilon^+(0)} \frac{-\ln \varepsilon + \pi}{(1-\varepsilon^2)^2}\,\mathrm{d}|z| \\ &= \frac{\pi\varepsilon(-\ln\varepsilon + \pi)}{(1-\varepsilon^2)^2}\,, \qquad 0 < \varepsilon < 1\,,\end{aligned}$$

abbiamo anche

$$\lim_{0<\varepsilon\to 0} \int\limits_{\partial^+ U_\varepsilon^+(0)} f(z)\,\mathrm{d}z = 0\ .$$

Risulta

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln z}{(1+z^2)^2}\,\mathrm{d}z \\
&= \lim_{\substack{r\to+\infty\\ 0<\varepsilon\to 0}} \left(\int\limits_{-r}^{-\varepsilon} \frac{\ln z}{(1+z^2)^2}\,\mathrm{d}z + \int\limits_{\varepsilon}^{r} \frac{\ln x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x \right) \qquad (**) \\
&= -\,\frac{\pi}{2} + \frac{\pi^2}{4} i\ .
\end{aligned}$$

Rimarco. Confrontando gli integrali

$$\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{\ln z}{(1+z^2)^2}\,\mathrm{d}z \quad \text{e} \quad \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\ln x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$$

ed usando (**) possiamo calcolare anche

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\ln x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

Infatti,

$$\begin{aligned}
\int\limits_{-r}^{-\varepsilon} \frac{\ln z}{(1+z^2)^2}\,\mathrm{d}z &\overset{z=-t}{=} \int\limits_{\varepsilon}^{r} \frac{\ln(-t)}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t = \int\limits_{\varepsilon}^{r} \frac{\ln t + i\pi}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \int\limits_{\varepsilon}^{r} \frac{\ln t}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t + i\pi \int\limits_{\varepsilon}^{r} \frac{1}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t\ .
\end{aligned}$$

Usando ora (**) deduciamo

$$2\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\ln x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x + i\pi \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x = -\,\frac{\pi}{2} + \frac{\pi^2}{4} i\,.$$

Confrontando ora le parti reali e immaginarie, concludiamo :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x = -\,\frac{\pi}{4}\ ,$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}\ .$$