NOME: ....   **MATRICOLA:** ....

Corso di Laurea in Matematica, A.A. 2010/2011
Analisi Reale e Complessa, Esame del 09.02.2011

1) Usando l'identità

$$\frac{\operatorname{arctg} x}{x} = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2y^2}\,\mathrm{d}y$$

ed il teorema di Fubini-Tonelli, si calcoli

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x\,.$$

2) Siano $a\,,b \in \mathbb{C}$ con $|a| < 1$ e $|b| = 1$. Si verifichi che la formula

$$f_{a,b}(z) = b\,\frac{z-a}{1-\overline{a}z}$$

definisce una funzione olomorfa $f_{a,b}$ sul disco aperto di centro 0 e raggio $\dfrac{1}{|a|}$. Poi si dimostri, usando il principio del massimo, che $f_{a,b}$ applica il disco aperto $U_1(0) = \big\{ z \in \mathbb{C}\,;\, |z| < 1 \big\}$ in se stesso, cioè che abbiamo

$$f_{a,b}\big(U_1(0)\big) \subset U_1(0)\,.$$

Vale addirittura

$$f_{a,b}\big(U_1(0)\big) = U_1(0)\,?$$

3) Indicheremo con ln la funzione olomorfa (ramo olomorfo del logaritmo che è una funzione multivalente) definita nel dominio

$$\left\{ \rho e^{i\theta} \, ; \, \rho > 0 \, , -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\,\pi}{2} \right\}$$

tramite $\ln\left(\rho e^{i\theta}\right) := \ln\rho + i\theta$ $\left(\text{per esempio, } \ln(-1) = i\pi \text{ e } \ln i = \dfrac{i\pi}{2}\right)$.

Si calcoli l'integrale improprio

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{\substack{r\to+\infty\\ 0<\varepsilon\to 0}} \left(\int\limits_{-r}^{-\varepsilon} \frac{\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x + \int\limits_{\varepsilon}^{r} \frac{\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \right)$$

usando il teorema dei residui per una famiglia adatta di curve chiuse regolari a tratti nel semipiano superiore. Poi, confrontando gli integrali

$$\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \quad \text{e} \quad \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \, ,$$

si calcoli

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \, .$$

Soluzioni:

1) **:** Poiché

$$\frac{\operatorname{arctg} x}{x} = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2y^2}\,\mathrm{d}y\,,$$

abbiamo

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \bigg(\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2y^2)\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}y \bigg)\,\mathrm{d}x\,.$$

Ma, applicando il teorema di Tonelli alla funzione positiva continua

$$[0\,,1) \times [0\,,1) \ni (x,y) \longmapsto \frac{1}{(1+x^2y^2)\sqrt{1-x^2}}\,,$$

si ottiene

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \bigg(\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2y^2)\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}y \bigg)\,\mathrm{d}x \\ &= \iint\limits_{[0\,,1)\times[0\,,1)} \frac{1}{(1+x^2y^2)\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \int_0^1 \bigg(\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2y^2)\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x \bigg)\,\mathrm{d}y \end{aligned}$$

e quindi

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \bigg(\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2y^2)\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x \bigg)\,\mathrm{d}y\,. \qquad (*)$$

Resta di svolgere le integrazioni alla parte destra di (*).

Per calcolare

$$\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2y^2)\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$$

(che esiste per ogni $y \in \mathbb{R}$) usiamo la sostituzione

$$x = \sin t\,, \quad \mathrm{d}x = \cos t \,\mathrm{d}t$$

ottenendo

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2y^2)\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{(1+y^2\sin^2 t)\,\cos t}\,\cos t\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+y^2\sin^2 t}\,\mathrm{d}t\,.
\end{aligned}$$

Ora abbiamo da integrare una funzione razionale in $\cos^2 t$ e $\sin^2 t$, perciò una sostituzione adatta per ridurre il calcolo all'integrazione di una funzione razionale è

$$u = \mathrm{tg}t\,, \quad \mathrm{d}u = \frac{1}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t = (1+\mathrm{tg}^2\, t)\,\mathrm{d}t = (1+u^2)\,\mathrm{d}t\,.$$

Poiché

$$\sin^2 t = 1-\cos^2 t = 1 - \frac{1}{1+\mathrm{tg}^2 t} = 1 - \frac{1}{1+u^2} = \frac{u^2}{1+u^2}\,,$$

risulta

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2y^2)\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+y^2\sin^2 t}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+y^2\dfrac{u^2}{1+u^2}} \cdot \frac{1}{1+u^2}\,\mathrm{d}u \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+(1+y^2)\,u^2}\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\big(\sqrt{1+y^2}\,u\big)}{1+\big(\sqrt{1+y^2}\,u\big)^2} \\
&= \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}
\end{aligned}$$

e, usando (*), deduciamo

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\,\mathrm{d}y\,.$$

Adesso la sostituzione che ci porta al più presto al fine desiderato è il seno iperbolico :

$$y = \operatorname{sh} s\,, \quad \mathrm{d}y = \operatorname{ch} s\,\mathrm{d}s\,.$$

Il calcolo ci dà

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\,\mathrm{d}y = \int_0^{\operatorname{arsh} 1} \frac{1}{\operatorname{ch} s}\operatorname{ch} s\,\mathrm{d}s = \int_0^{\operatorname{arsh} 1} \mathrm{d}s = \operatorname{arsh} 1$$

e quindi

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\operatorname{arsh} 1\,.$$

Per concludere, dobiamo calcolare $\operatorname{arsh} 1$, cioè il numero $\lambda \in \mathbb{R}$ per cui

$$1 = \operatorname{sh}\lambda = \frac{e^\lambda - e^{-\lambda}}{2} \iff \left(e^\lambda\right)^2 - 2\,e^\lambda - 1 = 0\,.$$

Ma le radici dell'equazione $t^2 - 2t - 1 = 0$ sono $t_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}$ e risulta che $e^\lambda = 1 + \sqrt{2}$, $\lambda = \ln\left(1+\sqrt{2}\right)$. Di conseguenza

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\ln\left(1+\sqrt{2}\right).$$

2) : Useremo le notazioni :

- per il disco aperto di centro $z_o \in \mathbb{C}$ e raggio $r > 0$:

$$U_r(z_o) = \left\{ z \in \mathbb{C}\,;\ |z - z_o| < r \right\};$$

- per la circonferenza di centro $z_o \in \mathbb{C}$ e raggio $r > 0$ (la frontiera di $U_r(z_o)$) :

$$\partial U_r(z_o) = \left\{ z \in \mathbb{C}\,;\ |z - z_o| = r \right\}.$$

Se $a = 0$, allora $f_{a,b}(z) = bz$ è ovviamente una funzione olomorfa in $\mathbb{C}$ che applica $U_1(0)$ su se stesso. Perciò ci restringeremo nel seguito al caso $a \neq 0$.

Poiché i polinomi $z - a$ e $1 - \overline{a}z$ sono olomorfe e $1 - \overline{a}z$ si annulla solo in $\dfrac{1}{\overline{a}}$, $f_{a,b}$ è una funzione olomorfa in

$$\mathbb{C} \setminus \left\{ \frac{1}{\overline{a}} \right\} \supset U_{\frac{1}{\overline{a}}}(0) \supset \overline{U_1(0)} .$$

Per $z \in \partial U_1(0)$, cioè un $z \in \mathbb{C}$ con $|z| = 1$, abbiamo

$$f_{a,b}(z) = b \, \frac{z - a}{z\,\overline{z} - \overline{a}z} = \frac{b}{z} \, \frac{z - a}{\overline{\overline{z - a}}} ,$$

quindi $|f_{a,b}(z)| = 1$. Per il principio del massimo risulta che

$$|f_{a,b}(z)| \leq 1 , \qquad z \in U_1(0)$$

e che potremmo avere $|f_{a,b}(z_o)| = 1$ per un $z_o \in U_1(0)$ solo se $f_{a,b}$ fosse costante, che non è vero :

$$f_{a,b}(0) = -b\,a \neq 0 = f_{a,b}(a) .$$

Di conseguenza $f_{a,b}\big(U_1(0)\big) \subset U_1(0)$.

Risolvendo ora l'equazione $f_{a,b}(z) = w$ si trova

$$z = \overline{b} \, \frac{w + ab}{1 + \overline{a}\,\overline{b}w} = f_{\overline{b},\,-ab}(w) .$$

Perciò $f_{\overline{b},\,-ab}$ è la funzione inversa di $f_{a,b}$. Poiché, come abbiamo visto qui sopra, abbiamo

$$f_{a,b}^{-1}\big(U_1(0)\big) = f_{\overline{b},\,-ab}\big(U_1(0)\big) \subset U_1(0) \iff U_1(0) \subset f_{a,b}\big(U_1(0)\big) ,$$

concludiamo che $f_{a,b}\big(U_1(0)\big) = U_1(0)$.

3) : Indichiamo

$$f(z) := \frac{\ln z}{1 + z^2} , \qquad z \in \mathbb{C} \setminus \Big(\{i\} \cup \big(i\,(-\infty\,, 0] \big) \Big) .$$

Allora f è una funzione meromorfa con un polo semplice in i ed il suo residuo in i è

$$\operatorname*{Res}_i(f) = \lim_{z \to i} (z - i) f(z) = \lim_{z \to i} \frac{(z - i) \ln z}{1 + z^2} = \lim_{z \to i} \frac{\ln z}{z + i}$$

$$= \frac{\frac{i\pi}{2}}{2i} = \frac{\pi}{4}\,.$$

D'altro canto indichiamo, per ogni $\rho > 0$, con $\partial^+ U_\rho^+(0)$ e $\partial^- U_\rho^+(0)$ il semicerchio

$$\big\{ z \in \mathbb{C}\,;\ |z| = \rho\,, \mathrm{Im} z \geq 0 \big\}$$

orientato contro il senso delle lancette rispettivamente nel senso delle lancette :

$$\partial^+ U_\rho^+(0) \text{ è la curva } [0\,,\pi] \ni t \longmapsto \rho e^{it} \in \mathbb{C}\,,$$
$$\partial^- U_\rho^+(0) \text{ è la curva } [0\,,\pi] \ni t \longmapsto \rho e^{i(\pi - t)} = -\rho e^{-it} \in \mathbb{C}\,.$$

Siano adesso $0 < \varepsilon < 1 < r$ e consideriamo la curva chiusa $\gamma_{\varepsilon,r}$ nel semipiano superiore chiuso che si ottiene componendo

il segmento $[-r\,, -\varepsilon]$,
il semicerchio $\partial^- U_\varepsilon^+(0)$,
il segmento $[\varepsilon\,, r]$,
il semicerchio $\partial^+ U_r^+(0)$.

Per il teorema dei residui abbiamo

$$\int\limits_{\gamma_{\varepsilon,r}} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \operatorname*{Res}_i(f) = \frac{\pi^2 i}{2}\,,$$

quindi

$$\int\limits_{-r}^{-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{\partial^- U_\varepsilon^+(0)} f(z)\,\mathrm{d}z + \int\limits_{\varepsilon}^{r} f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{\partial^+ U_r^+(0)} f(z)\,\mathrm{d}z = \frac{\pi^2 i}{2}\,,$$

$$\int\limits_{-r}^{-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{\varepsilon}^{r} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^2 i}{2} + \int\limits_{\partial^+ U_\varepsilon^+(0)} f(z)\,\mathrm{d}z - \int\limits_{\partial^+ U_r^+(0)} f(z)\,\mathrm{d}z\,.$$

Ora la stima

$$\begin{aligned}\Bigg| \int\limits_{\partial^+ U_r^+(0)} f(z)\,\mathrm{d}z \Bigg| &\leq \int\limits_{\partial^+ U_r^+(0)} \big|f(z)\big|\,\mathrm{d}|z| = \int\limits_{\partial^+ U_r^+(0)} \bigg|\frac{\ln z}{1+z^2}\bigg|\,\mathrm{d}|z| \\ &\leq \int\limits_{\partial^+ U_r^+(0)} \frac{\ln r + \pi}{r^2-1}\,\mathrm{d}|z| = \frac{\pi r(\ln r + \pi)}{r^2-1} \\ &\leq \frac{\pi(\ln r + \pi)}{r-1}\,, \qquad r > 1\end{aligned}$$

implica

$$\lim_{r\to+\infty} \int\limits_{\partial^+ U_r^+(0)} f(z)\,\mathrm{d}z = 0\ .$$

Similmente, poiché

$$\begin{aligned}\Bigg| \int\limits_{\partial^+ U_\varepsilon^+(0)} f(z)\,\mathrm{d}z \Bigg| &\leq \int\limits_{\partial^+ U_\varepsilon^+(0)} \big|f(z)\big|\,\mathrm{d}|z| = \int\limits_{\partial^+ U_\varepsilon^+(0)} \bigg|\frac{\ln z}{1+z^2}\bigg|\,\mathrm{d}|z| \\ &\leq \int\limits_{\partial^+ U_\varepsilon^+(0)} \frac{-\ln\varepsilon + \pi}{1-\varepsilon^2}\,\mathrm{d}|z| \\ &= \frac{\pi\varepsilon(-\ln\varepsilon + \pi)}{1-\varepsilon^2}\,, \qquad 0 < \varepsilon < 1\,,\end{aligned}$$

abbiamo anche

$$\lim_{0<\varepsilon\to 0} \int\limits_{\partial^+ U_\varepsilon^+(0)} f(z)\,\mathrm{d}z = 0\ .$$

Risulta

$$\begin{aligned}&\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \lim_{\substack{r\to+\infty \\ 0<\varepsilon\to 0}} \left(\int\limits_{-r}^{-\varepsilon} \frac{\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x + \int\limits_{\varepsilon}^{r} \frac{\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \right) \qquad (**) \\ &= \frac{\pi^2 i}{2}\ .\end{aligned}$$

Per calcolare

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

facciamo presente che

$$\begin{aligned}\int_{-r}^{-\varepsilon} \frac{\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x &\overset{x=-t}{=} \int_{\varepsilon}^{r} \frac{\ln(-t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_{\varepsilon}^{r} \frac{\ln t + i\pi}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{\varepsilon}^{r} \frac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t + i\pi \int_{\varepsilon}^{r} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\ .\end{aligned}$$

Usando ora (**) deduciamo

$$2\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x + i\pi \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x}_{=\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2 i}{2}$$

e concludiamo che

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = 0\ .$$

Rimarco. Per verificare che

$$\lim_{0<\varepsilon\to 0} \int_{\partial^+ U_\varepsilon^+(0)} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

abbiamo sostanzialmente ridimostrato - nel nostro caso - il Lemma del piccolo cerchio.

Notiamo che c'è una variante del "Lemma del piccolo cerchio" anche per il passaggio al limite all'infinito, chiamata il "Lemma del grande cerchio", che si può usare per dedurre anche

$$\lim_{r\to+\infty} \int_{\partial^+ U_r^+(0)} f(z)\,\mathrm{d}z = 0\ :$$

Lemma del grande cerchio: *Siano*

- $w \in \mathbb{C}\,, \rho > 0\,, 0 \leq t_1 < t_2 \leq 2\pi$,
- f *una funzione complessa continua definita sull'angolo troncato*
$$S_{t_1,t_2} = \{w + re^{it}\,;\, r > \rho\,, t_1 \leq t \leq t_2\}\,,$$
- Γ_r *l'arco* $[t_1\,, t_2] \ni t \longmapsto w + re^{it}$ *ove* $r > \rho$ *.*

Se

$$\lim_{\substack{z \in S_{t_1,t_2} \\ |z| \to +\infty}} (z-w)f(z) = \lambda \in \mathbb{C}$$

allora

$$\lim_{r \to +\infty} \int\limits_{\Gamma_r} f(z)\,\mathrm{d}z = (t_2 - t_1)\,i\,\lambda\,.$$

Dimostrazione. Si verifica facilmente che la condizione

$$\lim_{\substack{z \in S_{t_1,t_2} \\ |z| \to +\infty}} (z-w)f(z) = \lambda \quad \Bigg(\Longleftrightarrow \lim_{\substack{z \in S_{t_1,t_2} \\ |z| \to +\infty}} z\,f(z) = \lambda \Bigg)$$

significa

$$\lim_{r \to +\infty} \sup_{z \in \Gamma_r} \big|(z-w)f(z) - \lambda\big| = 0\,. \tag{***}$$

Ora, usando l'eguaglianza

$$\int\limits_{\Gamma_r} \frac{1}{z-w}\,\mathrm{d}z = \int\limits_{t_1}^{t_2} \frac{1}{r\,e^{it}}\,r\,e^{it}\,i\,\mathrm{d}t = (t_2 - t_1)\,i\,,$$

deduciamo

$$\begin{aligned}
\Bigg| \int\limits_{\Gamma_r} f(z)\,\mathrm{d}z - (t_2 - t_1)\,i\,\lambda \Bigg| &= \Bigg| \int\limits_{\Gamma_r} f(z)\,\mathrm{d}z - \int\limits_{\Gamma_r} \frac{\lambda}{z-w}\,\mathrm{d}z \Bigg| \\
&= \Bigg| \int\limits_{\Gamma_r} \frac{(z-w)f(z) - \lambda}{z-w}\,\mathrm{d}z \Bigg| \\
&\leq \int\limits_{\Gamma_r} \frac{\big|(z-w)f(z) - \lambda\big|}{r}\,\mathrm{d}|z| \\
&\leq 2\pi \sup_{z \in \Gamma_r} \big|(z-w)f(z) - \lambda\big|\,.
\end{aligned}$$

Tenendo conto di (***) risulta

$$\lim_{r\to+\infty}\left|\int\limits_{\Gamma_r} f(z)\,\mathrm{d}z-(t_2-t_1)\,i\,\lambda\right|=0\ .$$

$\blacksquare$