NOME: .... **MATRICOLA:** ....

Corso di Laurea in Fisica, A.A. 2011/2012
Calcolo 1, Esame scritto del 09.02.2012

1) Data la funzione

$$f(x) = \ln(1 + x) - \frac{x}{1 + x} ,$$

a) determinare il dominio (massimale) di f ;

b) trovare tutti gli asintoti di f ;

c) trovare tutti i massimi e minimi locali di f ;

d) studiare la convessità di f ;

e) tracciare un grafico qualitativo per f .

2) Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{k^2}{\pi}\right)^k \left(1 - \cos\frac{\pi}{k}\right)^k .$$

3) Calcolare una primitiva della funzione

$$f(x) = (\cos x)\,\ln\big(1+\cos x\big)\,, \qquad x \in \big(-\,\pi\,,\pi\big)$$

e studiare la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_0^{\pi} (\cos x)\,\ln\big(1+\cos x\big)\,\mathrm{d}x\,.$$

4) Sia data la funzione

$$f(x\,,y) = \frac{3\,x+4}{\sqrt{x^2+y^2+1}}\,.$$

a) Trovare i massimi e minimi locali di f.

b) Data la forma differenziale

$$\omega = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y\ ,$$

calcolare l'integrale curvilineo $\displaystyle\int_\gamma \omega$ dove γ è la curva data dal grafico della funzione $y = x\,\sin\dfrac{\pi x^2}{8}$ per $x \in \big[-\,2\,,2\big]$.

Soluzioni:

1) : a) $f(x)$ è definito per ogni $x \in \mathbb{R}$ per quale $\ln(1+x)$ e $\dfrac{x}{1+x}$ hanno senso, cioè per $x > -1$. Perciò il dominio di f è $\big(-1\,,+\infty\big)$.

b) Per trovare gli asintoti verticali calcoliamo il limite :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to -1+0} f(x) &= \lim_{-1<x\to -1} \left(\ln(1+x) - \frac{x}{1+x}\right) \\
&\overset{t=1+x}{=} \lim_{0<t\to 0}\left(\ln t - \frac{t-1}{t}\right) = \lim_{0<t\to 0}\left(\ln t + \frac{1}{t} - 1\right) \\
&\overset{s=1/t}{=} \lim_{s\to+\infty}\big(s - \ln s - 1\big) = \lim_{s\to+\infty}\left(s\,\Big(\underbrace{1-\frac{\ln s}{s}}_{\to 1}\Big) - 1\right) \\
&= +\infty\ .
\end{aligned}$$

Cosicché la retta $x = -1$ è un asintoto verticale di f da destra.

La prima condizione per l'esistenza di un asintoto obliquo per $x \to +\infty$ è l'esistenza del limite finito

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(1+x)}{x} - \frac{1}{1+x}\right) = 0\ .$$

La seconda condizione perché esisti un asintoto obliquo per $x \to +\infty$, necessariamente di forma

$$y = mx + n = n$$

(cioè un asintoto orizzontale), è l'esistenza del limite finito

$$n = \lim_{x\to+\infty}\big(f(x) - mx\big) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\ln(1+x) - \frac{x}{1+x}\right)\ .$$

Ma questo limite è $+\infty$, perciò f non ha asintoto obliquo (in particolare, non ha asintoto orizzontale).

c) Per trovare gli intervalli di monotonia e gli extremi locali di f , dobbiamo prima calcolare la sua derivata :

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - \left(\frac{1}{1+x} - \frac{x}{(1+x)^2}\right) = \frac{x}{(1+x)^2}\ .$$

Risulta che f' si annulla solo in 0 ed è

$$< 0 \text{ in } \big(-1\,,0\big)\ ,$$
$$> 0 \text{ in } \big(0\,,+\infty\big)\ .$$

Perciò f risulta ad essere

$$\text{strettamente decrescente in } \big(-1\,,0\big)\,,$$
$$\text{strettamente crescente in } \big(0\,,+\infty\big)\,.$$

In particolare, 0 è un punto di minimo. Il valore minimo di f è $f(0) = 0$.

d) Per lo studio della convessità di f ci serve la sua seconda derivata :

$$f''(x) = \frac{1}{(1+x)^2} - \frac{2\,x}{(1+x)^3} = \frac{1-x}{(1+x)^3}\ .$$

Cosicché f'' si annula solo in 1 e

$$f''(x) > 0 \ \text{ per } \ x \in \big(-1\,,1\big)\,,$$
$$f''(x) < 0 \ \text{ per } \ x \in \big(1\,,+\infty\big)\,.$$

Di conseguenza f

$$\text{è convessa in } \big(-1\,,1\big]\,,$$
$$\text{è concava in } \big[1\,,+\infty\big)$$

ed 1 è un punto di flesso. Rimarchiamo che

$$f(1) = \ln 2 - \frac{1}{2} \approx 0.1931\,, \quad f'(1) = \frac{1}{4} = 0,5\ .$$

Riportiamo il comportamento di f' e di f nella seguente tabella :

x	-1		0		1		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	$1/4$	$+$	
f''			$+$		0	$-$	
f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\ln 2 - 1/2$	$\nearrow$	$+\infty$

e) Usando le informazioni di cui sopra, è facile tracciare il grafico di f :

La retta $x=-1$ è asintoto verticale da destra ed il grafico di f scende dall'infinito in -1 fino al

$$\text{punto di minimo } (0\,,0)\,,$$

nel quale ha tangente orizzontale. Successivamente il grafico comincia di salire ed attraversa il

$$\text{punto di flesso } \big(1\,,\ln 2 - 1/2\big)$$

nel quale ha retta tangente con coefficiente angolare $1/4$ ed in quale cambia la convessità di prima in concavità, scendendo sotto la retta tangente :

Infatti, la funzione

$$g(x) := \ln(1+x) - \frac{x}{1+x} - \left(\ln 2 - \frac{1}{2} + \frac{x-1}{4}\right), \quad x > -1$$

si annulla in 1 ed è strettamente decrescente, perché

$$g'(x) = \frac{x}{(1+x)^2} - \frac{1}{4} = -\frac{(1-x)^2}{1+x)^2} < 0 \text{ per } 1 \neq x > -1\,.$$

Risulta :

$$f(x) = \ln(1+x) - \frac{x}{1+x} > \ln 2 - \frac{1}{2} + \frac{x-1}{4}\,,\ -1 < x < 1\,,$$
$$f(x) = \ln(1+x) - \frac{x}{1+x} < \ln 2 - \frac{1}{2} + \frac{x-1}{4}\,,\ x > 1$$

ove $y = \ln 2 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{x-1}{4}$ è la retta tangente al grafico di f in 1.

Finalmente, in $\big[1\,,+\infty\big)$ il grafico concavo di f sale all'infinito.

2) : Si tratta di una serie a termini positivi e la forma del termine generale della serie ci suggerisce di tentare di usare il criterio della radice. A questo fine calcoliamo il limite

$$q = \lim_{k\to\infty}\left(\left(\frac{k^2}{\pi}\right)^k\left(1-\cos\frac{\pi}{k}\right)^k\right)^{1/k} = \lim_{k\to\infty}\frac{k^2}{\pi}\left(1-\cos\frac{\pi}{k}\right).$$

Questo limite è del tipo di indeterminatezza $\infty \cdot 0$ ed abbiamo i seguenti modi per calcolarlo :

Usando il limite notevole $\boxed{\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sin t}{t} = 1}$ **:**

Poiché $1 - \cos\alpha = 2\sin^2 \dfrac{\alpha}{2}$, abbiamo

$$\begin{aligned} q &= \lim_{k\to\infty} \frac{k^2}{\pi}\left(1 - \cos\frac{\pi}{k}\right) = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{k^2}{\pi}\, 2\sin^2\frac{\pi}{2\,k}\right) \\ &= \lim_{k\to\infty}\left(\frac{2\,k^2}{\pi}\left(\frac{\sin\dfrac{\pi}{2\,k}}{\dfrac{\pi}{2\,k}}\right)^2 \left(\frac{\pi}{2\,k}\right)^2\right) \\ &= \lim_{k\to\infty}\frac{\pi}{2}\left(\frac{\sin\dfrac{\pi}{2\,k}}{\dfrac{\pi}{2\,k}}\right)^2 \\ &= \frac{\pi}{2}\,. \end{aligned}$$

Usando la formula di Taylor:

Ricordiamo che per la formula di Taylor con il resto di Peano abbiamo

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2) \text{ per } t \to 0\,.$$

Di conseguenza

$$\cos\frac{\pi}{k} = 1 - \frac{\pi^2}{2\,k^2} + o\left(\frac{1}{k^2}\right) \text{ per } k \to \infty$$

e quindi

$$\frac{k^2}{\pi}\left(1 - \cos\frac{\pi}{k}\right) = \frac{k^2}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{2\,k^2} + o\left(\frac{1}{k^2}\right)\right) = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{\pi}\,\frac{o\left(\dfrac{1}{k^2}\right)}{\dfrac{1}{k^2}}$$

per $k \to \infty$. Risulta che

$$q = \lim_{k\to\infty} \frac{k^2}{\pi}\left(1 - \cos\frac{\pi}{k}\right) = \frac{\pi}{2}\ .$$

Conclusione: Poché $q = \dfrac{\pi}{2} > 1$, il criterio della radice implica che la serie diverge.

3) **:** Siccome la derivata di $\ln\big(1+\cos x\big)$ è una funzione razionale di $\cos x$ e $\sin x$ e la primitiva di $\cos x$ è $\sin x$, tramite integrazione per parti possiamo ridurre il calcolo delle primitive di

$$f(x) = (\cos x)\,\ln\big(1+\cos x\big)$$

all'integrazione di una funzione razionale di $\cos x$ e $\sin x$, che poi si calcola subito :

$$\begin{aligned}
&\int (\cos x)\,\ln\big(1+\cos x\big)\,\mathrm{d}x \\
&= \int \ln\big(1+\cos x\big)\,\mathrm{d}(\sin x) \\
&= (\sin x)\,\ln\big(1+\cos x\big) - \int (\sin x)\,\frac{-\sin x}{1+\cos x}\,\mathrm{d}x \\
&= (\sin x)\,\ln\big(1+\cos x\big) + \int \frac{\sin^2 x}{1+\cos x}\,\mathrm{d}x \\
&= (\sin x)\,\ln\big(1+\cos x\big) + \int \frac{1-\cos^2 x}{1+\cos x}\,\mathrm{d}x \\
&= (\sin x)\,\ln\big(1+\cos x\big) + \underbrace{\int (1-\cos x)\,\mathrm{d}x}_{=x-\sin x+C} \\
&= x + (\sin x)\,\ln\big(1+\cos x\big) - \sin x + C\ .
\end{aligned}$$

Ora l'integrale improprio

$$\int_0^{\pi} (\cos x)\,\ln\big(1+\cos x\big)\,\mathrm{d}x$$

converge se esiste il limite

$$\lim_{\pi>b\to\pi} \int_0^{b} (\cos x)\,\ln\big(1+\cos x\big)\,\mathrm{d}x$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{\pi > b \to \pi} \Big(x + (\sin x) \, \ln \big(1 + \cos x\big) - \sin x \Big) \Big|_{x=0}^{x=b} \\
&= \pi + \lim_{\pi > b \to \pi} \Big((\sin b) \, \ln \big(1 + \cos b\big) \Big)
\end{aligned}
$$

ed è finito. Ma

$$
\begin{aligned}
\lim_{\pi > b \to \pi} \Big((\sin b) \, \ln \big(1 + \cos b\big) \Big) &\overset{b=\pi-t}{=} \lim_{0<t\to 0} \Big((\sin t) \, \ln \big(1 - \cos t\big) \Big) \\
&= \lim_{0<t\to 0} \left(\frac{\sin t}{t} \Big(t \, \ln \big(1 - \cos t\big) \Big) \right) \\
&= \lim_{0<t\to 0} \Big(t \, \ln \big(1 - \cos t\big) \Big) \\
&= \lim_{0<t\to 0} \frac{\ln \big(1 - \cos t\big)}{\dfrac{1}{t}}
\end{aligned}
$$

e, per la regola di De L'Hospital,

$$
\begin{aligned}
\lim_{0<t\to 0} \frac{\ln \big(1 - \cos t\big)}{\dfrac{1}{t}} &= \lim_{0<t\to 0} \frac{\dfrac{\sin t}{1 - \cos t}}{-\dfrac{1}{t^2}} = - \lim_{0<t\to 0} \frac{t^2 \sin t}{2 \sin^2 \dfrac{t}{2}} \\
&= - \lim_{0<t\to 0} \left((2 \sin t) \left(\frac{\dfrac{t}{2}}{\sin \dfrac{t}{2}} \right)^2 \right) \\
&= - 2 \cdot 0 \cdot 1^2 = 0 \, .
\end{aligned}
$$

Perciò abbiamo

$$
\int_0^{\pi} (\cos x) \, \ln \big(1 + \cos x\big) \, \mathrm{d} = \lim_{\pi > b \to \pi} \int_0^b (\cos x) \, \ln \big(1 + \cos x\big) \, \mathrm{d}x = \pi
$$

e quindi il nostro integrale improprio converge.

4) : a) I massimi e minimi locali di f sono *punti stazionari*, cioè annullano le derivate parziali di

$$
f(x\,,y) = \frac{3x+4}{\sqrt{x^2+y^2+1}} = (3x+4) \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+1}} \, .
$$

Per trovarli, calcoliamo le derivate parziali di f :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{3}{\sqrt{x^2+y^2+1}} - (3x+4)\,\frac{1}{2}\,\frac{2x}{\big(x^2+y^2+1\big)^{3/2}} \\
&= \frac{3(x^2+y^2+1)-(3x+4)\,x}{\big(x^2+y^2+1\big)^{3/2}} = \frac{3y^2-4x+3}{\big(x^2+y^2+1\big)^{3/2}}\ , \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= -\,(3x+4)\,\frac{1}{2}\,\frac{2y}{\big(x^2+y^2+1\big)^{3/2}} = \frac{-(3x+4)\,y}{\big(x^2+y^2+1\big)^{3/2}}\ .
\end{aligned}$$

Risulta che i punti stazionari di f sono le soluzioni del sistema di equazioni

$$\left\{\begin{array}{r} 3(x^2+y^2+1)-(3x+4)\,x=0 \\ (3x+4)\,y=0 \end{array}\right. .$$

Dalla seconda equazione risulta che abbiamo o $3x+4=0$ o $y=0$. Ma se $3x+4=0$ allora dalla prima equazione otteniamo $x^2+y^2+1=0$ che non è possibile. Se invece $y=0$ allora la prima equazione è soddisfatta se e soltanto se $3-4x=0$ e quindi il solo punto stazionario è

$$\left(\frac{3}{4}\,,0\right).$$

Per poter dire se il punto stazionario $\left(\frac{3}{4}\,,0\right)$ è massimo o minimo locale, calcoliamo anche le derivate parziali di secondo ordine :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{-4}{\big(x^2+y^2+1\big)^{3/2}} - (3y^2-4x+3)\,\frac{3}{2}\,\frac{2x}{\big(x^2+y^2+1\big)^{5/2}} \\
&= \frac{8x^2-4y^2-9xy^2-9x-4}{\big(x^2+y^2+1\big)^{5/2}}\ , \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} &= \frac{6y}{\big(x^2+y^2+1\big)^{3/2}} - (3y^2-4x+3)\,\frac{3}{2}\,\frac{2y}{\big(x^2+y^2+1\big)^{5/2}} \\
&= \frac{6x^2y-3y^3+12xy-3y}{\big(x^2+y^2+1\big)^{5/2}}\ , \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{-(3x+4)}{\big(x^2+y^2+1\big)^{3/2}} + (3x+4)\,y\,\frac{3}{2}\,\frac{2y}{\big(x^2+y^2+1\big)^{5/2}}
\end{aligned}$$

$$= \frac{(3x+4)(-x^2+2y^2-1)}{\left(x^2+y^2+1\right)^{5/2}}\,.$$

Perciò

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{3}{4}\,,0\right) &= -\,\frac{25}{4}\left(\frac{4}{5}\right)^5\,,\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\left(\frac{3}{4}\,,0\right) &= 0\,,\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{3}{4}\,,0\right) &= -\,\frac{625}{64}\left(\frac{4}{5}\right)^5
\end{aligned}$$

e la matrice hessiana di f in $(0\,,0)$ è

$$\begin{pmatrix} -\dfrac{25}{4}\left(\dfrac{4}{5}\right)^5 & 0 \\ 0 & -\dfrac{625}{64}\left(\dfrac{4}{5}\right)^5 \end{pmatrix}.$$

Poiché il determinante della matrice hessiana è

$$\begin{vmatrix} -\dfrac{25}{4}\left(\dfrac{4}{5}\right)^5 & 0 \\ 0 & -\dfrac{625}{64}\left(\dfrac{4}{5}\right)^5 \end{vmatrix} = \frac{25^3}{4^4}\left(\frac{4}{5}\right)^{10} = \frac{4^6}{5^4} > 0\,,$$

mentre l'elemento nell'angolo sinistro superiore è

$$-\frac{25}{4}\left(\frac{4}{5}\right)^5 < 0\,,$$

la hessiana è definita negativa e quindi il punto $\left(\dfrac{3}{4}\,,0\right)$ è un punto di massimo locale.

Rimarchiamo che il valore di f in questo punto è 5.

b) La forma differenziale

$$\omega = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y$$

è esatta avendo f come primitiva. D'altro canto la curva data dal grafico della funzione $y = x \sin \dfrac{\pi x^2}{8}$ per $x \in \big[-2\,,2\big]$ inizia in

$$\left(-2\,,-2\sin\frac{\pi(-2)^2}{8}\right) = \big(-2\,,-2\big)$$

e finisce in

$$\left(2\,,2\sin\frac{\pi\,2^2}{8}\right) = \big(2\,,2\big)\,.$$

Di conseguenza

$$\begin{aligned}\int\limits_{\gamma}\omega &= f\big(2\,,2\big) - f\big(-2\,,-2\big)\\ &= \frac{3\cdot 2+4}{\sqrt{2^2+2^2+1}} - \frac{3\cdot(-2)+4}{\sqrt{(-2)^2+(-2)^2+1}}\\ &= 4\;.\end{aligned}$$

Rimarco 1.

Rimarchiamo che $\left(\dfrac{3}{4}\,,0\right)$ è addirittura un punto di massimo assoluto della funzione

$$f(x\,,y) = \frac{3x+4}{\sqrt{x^2+y^2+1}}\;.$$

Infatti, studiando gli intervalli di monotonia della funzione

$$\mathbb{R}\ni x \longmapsto \frac{3x+4}{\sqrt{x^2+1}}$$

si verifica facilmente che $x = \dfrac{3}{4}$ è un punto di massimo assoluto di questa funzione ed il valore massimo è

$$\frac{3\,\dfrac{3}{4}+4}{\sqrt{\left(\dfrac{3}{4}\right)^2+1}} = \frac{\dfrac{25}{4}}{\dfrac{5}{4}} = 5\,.$$

Risulta per ogni $(x\,y)\in\mathbb{R}^2$

$$f(x\,,y) = \frac{3\,x+4}{\sqrt{x^2+y^2+1}} \leq \frac{3\,x+4}{\sqrt{x^2+1}} \leq 5 = f\left(\frac{3}{4}\,,0\right)\,.$$

Rimarco 2.

Consideriamo il seguente problema dell'Algebra Lineare :

Dati $a\,b\,c \in \mathbb{R}$ con $a^2+b^2+c^2>0$, trovare i massimi e minimi della funzione

$$g(x\,,y\,,z) := \frac{a\,x+b\,y+c\,z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\|}$$

definita in $\mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$.

Ma per la disuguaglianza di Schwarz

$$\left| \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right| \leq \left\| \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right\| \cdot \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\|$$

ove l'uguaglianza vale solo se $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ per un $\lambda \in \mathbb{R}$. Perciò il valore massimo di g è

$$\left\| \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

ed i punti di massimo sono

$$\lambda \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\,, \qquad \lambda > 0\,,$$

mentre il valore minimo di g è

$$
-\left\|\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right\| = -\sqrt{a^2+b^2+c^2}
$$

ed i punti di minimo sono

$$
\lambda\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \qquad \lambda < 0\,,
$$

Per i dati del nostro caso, cioè per $a = 3\,, b = 0\,, c = 4\,$, risulta che il valore massimo della funzione

$$
\frac{3\,x + 4\,z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \tag{*}
$$

è $\sqrt{3^2+4^2} = 5$ ed i punti di massimo sono

$$
\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\,\lambda \\ 0 \\ 4\,\lambda \end{pmatrix}, \qquad \lambda > 0\,,
$$

mentre il valore minimo è -5 ed i punti di minimo sono

$$
\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\,\lambda \\ 0 \\ 4\,\lambda \end{pmatrix}, \qquad \lambda < 0\,.
$$

Se restringiamo la funzione solo ai vettori della forma

$$
\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad x\,, y \in \mathbb{R}\,, \tag{**}
$$

cioè se studiamo la funzione

$$
f(x\,, y) = \frac{3\,x + 4}{\sqrt{x^2+y^2+1}}\,,
$$

allora risulta che

$$
\begin{pmatrix} 3/4 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

è l'unico punto di massimo ed il valore massimo è 5:

Infatti, l'unico punto di massimo di (*) che è della forma (**) si ottiene per $\lambda = \dfrac{1}{4}$:

$$\begin{pmatrix} 3\,\lambda \\ 0 \\ 4\,\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ * \\ 1 \end{pmatrix} \iff \lambda = \frac{1}{4}\,.$$

Riguardante i punti di minimo di f risulta solo che nessun punto di minimo di (*) è della forma (**). Però nel compito abbiamo verificato che f non ha affatto punto di minimo (nemmeno locale).