NOME: ....   **MATRICOLA:** ....

Corso di Laurea in Fisica, A.A. 2010/2011
Calcolo 1, Esame scritto del 09.09.2011

1) Data la funzione

$$f(x) = x + \ln\left(\frac{1}{x} + 1\right) ,$$

a) determinare il dominio (massimale) di f ;

b) trovare tutti gli asintoti di f ;

c) trovare tutti i massimi e minimi locali di f ;

d) tracciare un grafico qualitativo di f .

2) Studiare al variare di $x \in \mathbb{R}$ la convergenza assoluta e semplice della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\sqrt[3]{n}} - \sin\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)\right] x^n .$$

3) Calcolare una primitiva della funzione

$$f(x) = \frac{2\,x\ln(x+1)}{(x^2+4)^2} \ .$$

4) Sia data la funzione

$$f(x,y) = (x-1)^2 y + (y-1)^2 \ .$$

a) Trovare i massimi e minimi locali di f .

b) Data la forma differenziale

$$\omega = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y \ ,$$

calcolare l'integrale curvilineo $\displaystyle\int_\gamma \omega$ dove γ è la curva data dal grafico della funzione $y = x\ln(x)$ per $x \in \big[1\,,e\big]$.

Soluzioni:

1) **:** a) $f(x) = x + \ln\left(\dfrac{1}{x} + 1\right) = x + \ln\dfrac{1+x}{x}$ è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$ per quale si può dividere con x e vale $\dfrac{1+x}{x} > 0$, cioè per ogni numero reale $x \neq 0$ che soddisfa o

$$1 + x > 0 \ \text{ e } \ x > 0$$

o

$$1 + x < 0 \ \text{ e } \ x < 0\,.$$

Perciò il dominio di f è uguale a $\big(-\infty\,,-1\big) \cup \cup \big(0\,,+\infty\big)$.

b) Per trovare gli asintoti verticali, calcoliamo i seguenti limiti :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0+0} f(x) &= \lim_{x\to 0+0} \ln\left(\frac{1}{x} + 1\right) \overset{t=\frac{1}{x}}{=} \lim_{t\to +\infty} \ln(t+1) \\
&= +\infty\,, \\
\lim_{x\to -1-0} f(x) &= -1 + \lim_{x\to -1-0} \ln\frac{1+x}{x} \overset{t=-(x+1)}{=} -1 + \lim_{t\to 0+0} \ln\frac{t}{t+1} \\
&= -\infty\,.
\end{aligned}$$

Risulta che f ha due asintoti verticali: $x = 0$ è un asintoto verticale a destra e $x = -1$ è un asintoto verticale a sinistra.

La prima condizione per l'esistenza di un asintoto obliquo per $x \to \pm\infty$ è l'esistenza del limite finito

$$m_\pm = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}$$

e si ottiene

$$m_\pm = \lim_{x\to\pm\infty} \left[1 + \frac{1}{x}\ln\left(\frac{1}{x} + 1\right)\right] = 1 + 0\cdot\ln 1 = 1\,.$$

La seconda condizione perché esisti un asintoto obliquo per $x \to \pm\infty$, necessariamente di forma

$$y = m_\pm x + n_\pm = x + n_\pm\ ,$$

è l'esistenza del limite finito

$$n_{\pm} = \lim_{x\to\pm\infty} \big(f(x) - m_+ x\big) = \lim_{x\to\pm\infty} \big(f(x) - x\big)\,.$$

Verifichiamo che anche questo limite esiste :

$$n_{\pm} = \lim_{x\to\pm\infty} \ln\left(\frac{1}{x} + 1\right) = \ln 1 = 0\,.$$

Cosicché $y = x$ è un asintoto obliquo di f sia per $x \to +\infty$ che per $x \to -\infty$.

c) Per trovare gli intervalli di monotonia e gli extremi locali di f, dobbiamo prima calcolare la sua derivata :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 + \frac{1}{\dfrac{1}{x} + 1}\left(-\frac{1}{x^2}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{x^2 + x} = \frac{x^2 + x - 1}{x^2 + x}\,. \end{aligned}$$

Risulta che i zeri di f' sono

$$\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \approx -1,618...\,, \qquad \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \approx 0,618...$$

e

$$\begin{aligned} &f' \text{ è } > 0 \text{ in } \left(-\infty\,, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right), \\ &f' \text{ è } < 0 \text{ in } \left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\,, -1\right) \cup \left(0\,, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right), \\ &f' \text{ è } > 0 \text{ in } \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\,, +\infty\right). \end{aligned}$$

Cosicché f risulta ad essere

$$\begin{aligned} &\text{strettamente crescente in } \left(-\infty\,, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right], \\ &\text{strettamente decrescente in } \left[\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\,, -1\right), \\ &\text{strettamente decrescente in } \left(0\,, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right], \end{aligned}$$

$$\text{strettamente crescente in } \left[\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\,,+\infty\right).$$

In particolare, $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \approx -1,618...$ è un punto di massimo locale e

$$f\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} - 2\ln\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx -2,584\,,$$

mentre $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \approx 0,618...$ è un punto di minimo locale e

$$f\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} + 2\ln\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,58\,.$$

d) Per seguire meglio l'andamento del grafico di f, troviamo anche gli intervalli di convessità e di concavità di f: la seconda derivata

$$f''(x) = \frac{2x+1}{(x^2+x)^2}$$

di f ha in ogni punto x del dominio lo stesso segno che $2x+1$, perciò

f'' è <0 in $\big(-\infty\,,-1\big)$ e quindi f è concava in $\big(-\infty\,,-1\big)$,

f'' è >0 in $\big(0\,,+\infty\big)$ e quindi f è convessa in $\big(0\,,+\infty\big)$.

Riportiamo il comportamento di f', f'' e f nella seguente tabella :

x	$-\infty$		$\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$		-1		0		$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	|		|	$-$	0	$+$	
f''			$-$		|		|		$+$		
f	$-\infty$	$\nearrow$	$f\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)$	$\searrow$	$-\infty$ |	non definita	| $+\infty$	$\searrow$	$f\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$	$\nearrow$	$+\infty$

Ora abbiamo tutte le informazioni per tracciare il grafico di f:

$y=x$ è asintoto obliquo di f per $x\to-\infty$. Il grafico di f sale da $-\infty$ fino al punto di massimo locale

$$\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\,,\frac{-1-\sqrt{5}}{2} - 2\ln\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \approx \big(-1,618\,,-2,584\big)$$

dove la retta tangente è orizzontale, per scendere poi a $-\infty$ lungo l'asintoto verticale a sinistra $x=-1$, restando sempre sotto l'asintoto obliquo :

Per $x < -1$, cioè $0 < \dfrac{1}{x} + 1 < 1$, abbiamo

$$f(x) = f(x) = x + \underbrace{\ln\left(\frac{1}{x} + 1\right)}_{<0} < x \, .$$

Sul tratto $\big(-\infty \, , -1 \big)$ la funzione f è concava.

Nel secondo tratto il grafico di f scende da $+\infty$ lungo l'asintoto verticale a destra $x = 0$ fino al punto di minimo locale

$$\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \, , \frac{-1+\sqrt{5}}{2} + 2 \ln \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) \approx \big(0,618 \, , 1,58 \big)$$

dove ha tangente orizzontale, per salire dopo a $+\infty$, avvicinando sempre di più l'asintoto obliquo $y = x$, restando però sempre sopra questo asintoto :

Per ogni $x > 0$ vale chiaramente

$$f(x) = f(x) = x + \underbrace{\ln\left(\frac{1}{x} + 1\right)}_{>0} > x \, .$$

Su questo tratto f è convessa.

2) **:** Poiché

$$t - \sin t > 0 \, , \qquad t > 0 \, ,$$

i coefficienti della serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\sqrt[3]{n}} - \sin\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}} \right) \right] x^n \tag{*}$$

sono tutti positivi. Esaminiamo il loro ordine di grandezza :

Per la formula di Taylor con il resto di Peano abbiamo

$$\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + o\big(t^3\big) \text{ per } t \to 0$$

ed otteniamo successivamente

$$t - \sin t = \frac{t^3}{6} + o\big(t^3\big) \text{ per } t \to 0\,,$$
$$\frac{1}{\sqrt[3]{n}} - \sin\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right) = \frac{1}{6\,n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \text{ per } n \to +\infty\,.$$

Ora possiamo trovare il raggio di convergenza r della nostra serie di potenze usando il criterio del rapporto :

$$\begin{aligned}
r &= \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{1}{\sqrt[3]{n}} - \sin\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)}{\dfrac{1}{\sqrt[3]{n+1}} - \sin\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{n+1}}\right)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{1}{6\,n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)}{\dfrac{1}{6\,(n+1)} + o\left(\dfrac{1}{n+1}\right)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n} \cdot \frac{\dfrac{1}{6} + n\,o\left(\dfrac{1}{n}\right)}{\dfrac{1}{6} + (n+1)\,o\left(\dfrac{1}{n+1}\right)}\right) \\
&= 1\ .
\end{aligned}$$

Di conseguenza la serie (*) converge assolutamente per $|x| < 1$ e non converge per $|x| > 1$. Resta da vedere il suo comportamento per $x = 1$ e per $x = -1$.

Per $x = 1$ si tratta della serie a termini positivi
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\sqrt[3]{n}} - \sin\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)\right]\ .$$

Poiché
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{1}{\sqrt[3]{n}} - \sin\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)}{\dfrac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{1}{6\,n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)}{\dfrac{1}{n}} = \frac{1}{6} > 0$$

e la serie armonica diverge, il criterio del confronto implica la divergenza della nostra serie.

Nel caso $x = -1$ invece si può applicare il criterio di Leibniz e dedurre la convergenza semplice della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{1}{\sqrt[3]{n}} - \sin\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right) \right] .$$

3) : Per trovare una primitiva della funzione

$$f(x) = \frac{2\,x \ln(x+1)}{(x^2+4)^2} = \frac{2\,x}{(x^2+4)^2} \ln(x+1) = \left(-\frac{1}{x^2+4} \right)' \ln(x+1)\,,$$

usiamo integrazione per parti, ottenendo

$$\int \frac{2\,x \ln(x+1)}{(x^2+4)^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{\ln(x+1)}{x^2+4} + \int \frac{1}{(x+1)(x^2+4)}\,\mathrm{d}x\,.$$

Lo sviluppo di $\dfrac{1}{(x+1)(x^2+4)}$ in fratti semplici è dalla forma

$$\frac{1}{(x+1)(x^2+4)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b\,x + c}{x^2+4}$$

ed allora

$$1 = a\,(x^2+4) + (b\,x + c)\,(x+1)\,.$$

Risultano

$$a = \frac{1}{5}\,, \quad b = -\frac{1}{5}\,, \quad c = \frac{1}{5}$$

e di conseguenza

$$\begin{aligned}
&\int \frac{2\,x \ln(x+1)}{(x^2+4)^2}\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{\ln(x+1)}{x^2+4} + \int \frac{1}{(x+1)(x^2+4)}\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{\ln(x+1)}{x^2+4} + \frac{1}{5}\int \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{5}\int \frac{-x+1}{x^2+4}\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{\ln(x+1)}{x^2+4} + \frac{1}{5}\int \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{10}\int \frac{2\,x}{x^2+4}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{5}\int \frac{1}{x^2+4}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

$$= -\frac{\ln(x+1)}{x^2+4} + \frac{1}{5}\ln(x+1) - \frac{1}{10}\ln(x^2+4) + \frac{1}{10}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}\,\mathrm{d}\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$= -\frac{\ln(x+1)}{x^2+4} + \frac{1}{5}\ln(x+1) - \frac{1}{10}\ln(x^2+4) + \frac{1}{10}\mathrm{arctg}\,\frac{x}{2} + C$$

$$= \frac{x^2-1}{5\,(x^2+4)}\ln(x+1) - \frac{1}{10}\ln(x^2+4) + \frac{1}{10}\mathrm{arctg}\,\frac{x}{2} + C\,.$$

4) : a) I massimi e minimi relativi di f sono *punti stazionari*, cioè annullano le derivate parziali di

$$f(x,y) = (x-1)^2 y + (y-1)^2\ .$$

Per trovarli, calcoliamo le derivate parziali di f :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2\,(x-1)\,y\,,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = (x-1)^2 + 2\,(y-1)\,.$$

Risulta che i punti stazionari di f sono le soluzioni del sistema di equazioni

$$\begin{cases} 2\,(x-1)\,y = 0 \\ (x-1)^2 + 2\,(y-1) = 0 \end{cases}\ ,$$

cioè i punti

$$\big(1+\sqrt{2}\,,0\big)\,,\quad \big(1-\sqrt{2}\,,0\big)\,,\quad \big(1\,,1\big)\,.$$

Per poter dire se un punto stazionario è massimo o minimo relativo, calcoliamo anche le derivate parziali di secondo ordine :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2\,y\,,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 2\,(x-1)\,,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2\ .$$

Perciò la matrice hessiana di f in $(x\,,y)$ è

$$H_f(x\,,y) = \begin{pmatrix} 2\,y & 2\,(x-1) \\ 2\,(x-1) & 2 \end{pmatrix}$$

con determinante

$$\det H_f(x\,,y) = 4\Big(y-(x-1)^2\Big)\;.$$

In particolare

$$H_f\big(1\pm\sqrt{2}\,,0\big)=\left(\begin{array}{cc} 0 & \pm\sqrt{2} \\ \pm\sqrt{2} & 0 \end{array}\right)\,,\quad \det H_f\big(1\pm\sqrt{2}\,,0\big)=-8<0$$

e risulta che $\big(1\pm\sqrt{2}\,,0\big)$ sono punti sella.

D'altro canto abbiamo

$$H_f(1\,,1)=\left(\begin{array}{cc} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{array}\right)\,,\quad \det H_f(1\,,1)=4>0$$

e, poiché il determinante della matrice hessiana $H_f(1\,,1)$ è >0 e l'elemento nell'angolo sinistro superiore è $2>0$, concludiamo che $(1\,,1)$ è un punto di minimo locale.

b) La forma differenziale

$$\omega=\frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y$$

è esatta avendo f come primitiva. Di conseguenza

$$\begin{aligned}\int\limits_\gamma \omega &= f\Big(e\,,e\cdot\ln e\Big)-f\Big(1\,,1\cdot\ln 1\Big)=f\big(e\,,e\big)-f\big(1\,,0\big)\\ &=\big(e-1\big)^2 e+\big(e-1\big)^2-1\\ &=\big(e-1\big)^2\big(e+1\big)-1\,.\end{aligned}$$