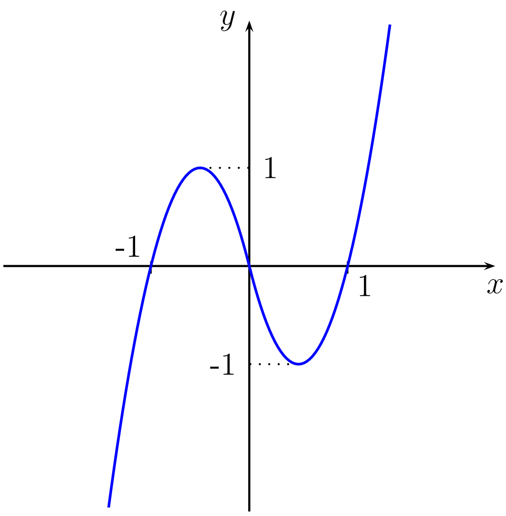
NOME: . . . .   **MATRICOLA:** . . . .

Scienza dei Media e della Comunicazione, A.A. 2007/2008
Analisi Matematica 1, Esame scritto del 08.02.2008

1) Indicare per quali $x \in \mathbb{R}$ vale la seguente diseguaglianza :

$$\frac{|x+1|}{|x|-1} < \frac{|x|+1}{|x+1|}\,.$$

2) Se



è il grafico della funzione $y = f(x)$, quali sono i grafici di

$$f(2x+2)\,, \quad f(2x)-2\,, \quad 2f(x)+2 \quad ?$$

3) Trovare parte reale e parte immaginaria di

$$5 \cdot \frac{(i-1)^6}{2-i} \, .$$

4) Calcolare il limite

$$\lim_{x \to 0+} \frac{\log\big(\sin(2x)\big)}{\log\big(\sin(3x)\big)} \, .$$

5) Consideriamo la funzione

$$f(x) = e^{\frac{3}{x}} \sqrt{x^2 - x} \, .$$

a) Determinare il dominio (massimale) di f .

b) Trovare tutti gli asintoti di f .

c) Trovare tutti i massimi e minimi locali di f .

d) Tracciare un grafico qualitativo per f .

Soluzioni:

1) **:** Anzitutto i denominatori non possono anullarsi, cioè $|x| \neq 1$.

Se $|x| > 1$, allora possiamo moltiplicare la nostra disequazione con il valore strettamente positivo $\big(|x|-1\big)\cdot|x+1|$, ottenendo

$$\underbrace{(x+1)^2}_{=\,x^2+2x+1} = |x+1|^2 < \big(|x|-1\big)\cdot\big(|x|+1\big) = |x|^2-1 = x^2-1\,,$$

cioè $x < -1$.

Se invece $|x| < 1$, allora la moltiplicazione della disequazione data con il valore strettamente negativo $\big(|x|-1\big)\cdot|x+1|$ cambia il senso della disuguaglianza :

$$\underbrace{(x+1)^2}_{=\,x^2+2x+1} = |x+1|^2 > \big(|x|-1\big)\cdot\big(|x|+1\big) = |x|^2-1 = x^2-1\,,$$

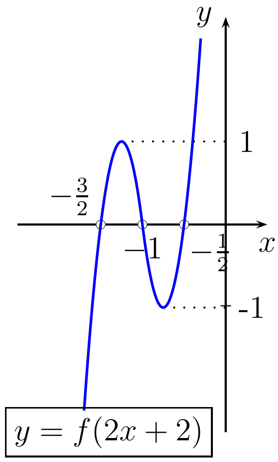
ottenendo così $x > -1$. Tenendo conto dall'ipotesi $|x| < 1$, risulta che dobbiamo avere $-1 < x < 1$.

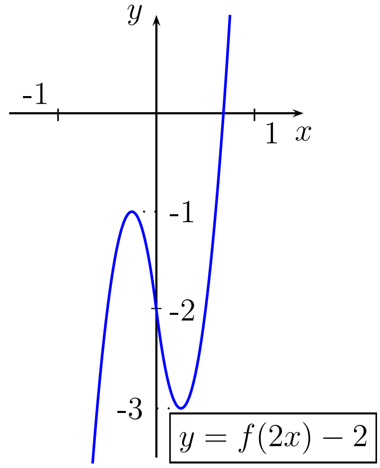
Concludiamo che $x \in \mathbb{R}$ soddisfa la diseguaglianza

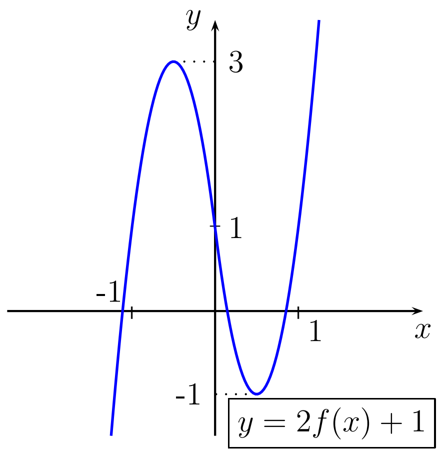
$$\frac{|x+1|}{|x|-1} < \frac{|x|+1}{|x+1|}$$

esattamente quando $x \in \big(-\infty, -1\big) \cup \big(-1, 1\big)$.

2) **:** I grafici richiesti sono :







3) : Per calcolare la potenza $(i-1)^6$ ci conviene scrivere $i-1$ in forma trigonometrica ed usare la formula di De Moivre :

$$i - 1 = -1 + i = |-1+i| \cdot \big(\cos\varphi + i \sin\varphi \big)$$

ove il modulo $|-1+i|$ è uguale a $\sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ e l'argomento φ soddisfa

$$\cos\varphi = \frac{-1}{r} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\,, \qquad \sin\varphi = \frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,.$$

Risulta che possiamo scegliere $\varphi = \dfrac{3\pi}{4}$ e così

$$\begin{aligned}
i-1 &= \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right),\\
(i-1)^6 &= 2^{\frac{6}{2}}\left(\cos\frac{18\pi}{4} + i\sin\frac{18\pi}{4}\right)\\
&= 8\left(\cos\frac{9\pi}{2} + i\sin\frac{9\pi}{2}\right)\\
&= 8\left(\cos\left(4\pi+\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(4\pi+\frac{\pi}{2}\right)\right)\\
&= 8\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)\\
&= 8\,i\,.
\end{aligned}$$

Di conseguenza parte reale e parte immaginaria di

$$5\cdot\frac{(i-1)^6}{2-i} = 5\cdot\frac{8\,i}{2-i} = \frac{40\,i\,(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{40\,(-1+2\,i)}{2^2+1^2} = -8+16\,i$$

sono -8 rispettivamente 16.

4) : Il limite si presenta nella forma indeterminata $\dfrac{-\infty}{-\infty}$ e quindi possiamo applicare la regola di De L'Hospital :

$$\lim_{x\to 0+}\frac{\log\big(\sin(2x)\big)}{\log\big(\sin(3x)\big)} = \lim_{x\to 0+}\frac{\Big(\log\big(\sin(2x)\big)\Big)'}{\Big(\log\big(\sin(3x)\big)\Big)'}\,.$$

Poiché

$$\Big(\log\big(\sin(2x)\big)\Big)' = \frac{1}{\sin(2x)}\cdot\cos(2x)\cdot 2 = \frac{2\,\cos(2x)}{\sin(2x)}$$

e, similmente,

$$\Big(\log\big(\sin(3x)\big)\Big)' = \frac{1}{\sin(3x)}\cdot\cos(3x)\cdot 3 = \frac{3\,\cos(3x)}{\sin(3x)}\,,$$

otteniamo

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0+}\frac{\log\big(\sin(2x)\big)}{\log\big(\sin(3x)\big)} &= \lim_{x\to 0+}\left(\frac{2\,\cos(2x)}{\sin(2x)}\cdot\frac{\sin(3x)}{3\,\cos(3x)}\right)\\ &= \lim_{x\to 0+}\left(\frac{2x}{\sin(2x)}\cdot\frac{\sin(3x)}{3x}\cdot\frac{\cos(2x)}{\cos(3x)}\right)\\ &= 1\,.\end{aligned}$$

5) : a) Il dominio di f consiste da tutti i numeri reali x per quali $\dfrac{1}{x}$ e $\sqrt{x^2-x}$ hanno senso, cioè $x\neq 0$ e $x\,(x-1)=x^2-x\geq 0$. Se $x>0$, allora dobbiamo avere anche $x-1\geq 0 \iff x\geq 1$. Se invece $x<0$, allora è necessario avere anche $x-1\leq 0 \iff x\leq 0$, ma questo risulta sempre. Concludiamo che il dominio fi f è

$$\big(-\infty,0\big)\cup\big[1,+\infty\big)\,.$$

b) La funzione f è continua sul suo dominio e poiché

$$\lim_{x\to 0-} f(x)=\lim_{x\to 0-} e^{\frac{3}{x}}\sqrt{x^2-x}=\underbrace{\lim_{x\to 0-} e^{\frac{3}{x}}}_{=0}\cdot\underbrace{\lim_{x\to 0-}\sqrt{x^2-x}}_{=0}=0\,,$$

è prolungabile ad una funzione continua su $\big(-\infty,0\big]\cup\big[1,+\infty\big)$, che in 0 prende il valore 0 (indicheremo questa estensione di f pure con f). In particolare non esiste asintoto verticale.

La prima condizione per l'esistenza di un asintoto obliquo per $x\longrightarrow+\infty$ è l'esistenza del limite finito

$$m_+=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}\,.$$

Verifichiamo l'esistenza di questo limite :

$$m_+=\lim_{x\to+\infty} e^{\frac{3}{x}}\frac{\sqrt{x^2-x}}{x}=\underbrace{\lim_{x\to+\infty} e^{\frac{3}{x}}}_{=1}\underbrace{\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1-\frac{1}{x}}}_{=1}=1\,.$$

La seconda condizione per l'esistenza di un asintoto obliquo per $x\longrightarrow+\infty$, necessariamente di forma

$$y=m_+x+n_+$$

e nel nostro caso $y = x + n_+$, è l'esistenza del limite finito

$$n_+ = \lim_{x \to +\infty} \big(f(x) - m_+ x\big)\,.$$

Verifichiamo che anche questo limite esiste :

$$\begin{aligned}
n_+ &= \lim_{x \to +\infty} \big(e^{\frac{3}{x}} \sqrt{x^2 - x} - x\big) \\
&= \lim_{x \to +\infty} \frac{\big(e^{\frac{3}{x}} \sqrt{x^2 - x} - x\big) \cdot \big(e^{\frac{3}{x}} \sqrt{x^2 - x} + x\big)}{e^{\frac{3}{x}} \sqrt{x^2 - x} + x} \\
&= \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{\frac{6}{x}} (x^2 - x) - x^2}{e^{\frac{3}{x}} \sqrt{x^2 - x} + x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{\frac{6}{x}} (x - 1) - x}{e^{\frac{3}{x}} \sqrt{1 - \dfrac{1}{x}} + 1} \\
&= \lim_{x \to +\infty} \frac{x\Big(e^{\frac{6}{x}} - 1\Big) - e^{\frac{6}{x}}}{e^{\frac{3}{x}} \sqrt{1 - \dfrac{1}{x}} + 1}
\end{aligned}$$

Poiché

$$\lim_{x \to +\infty} x\Big(e^{\frac{6}{x}} - 1\Big) = \lim_{x \to +\infty} 6 \cdot \frac{e^{\frac{6}{x}} - 1}{\frac{6}{x}} = 6\,,$$

$$\lim_{x \to +\infty} e^{\frac{6}{x}} = 1\,,$$

$$\lim_{x \to +\infty} e^{\frac{3}{x}} \sqrt{1 - \frac{1}{x}} = 1\,,$$

concludiamo l'esistenza di

$$n_+ = \frac{6 - 1}{1 + 1} = \frac{5}{2}\,,$$

Cosicché

$$y = x + \frac{5}{2} \text{ è un asintoto obliquo di } f \text{ per } x \to +\infty\,.$$

Similmente si verifica :

– esiste

$$m_- = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} e^{\frac{3}{x}} \frac{\sqrt{x^2-x}}{x} \overset{x<0}{=} \lim_{x\to-\infty} -e^{\frac{3}{x}} \sqrt{1-\frac{1}{x}} = -1\,;$$

– poi esiste

$$\begin{aligned} n_- &= \lim_{x\to-\infty} \big(f(x)-m_- x\big) = \lim_{x\to-\infty} \big(e^{\frac{3}{x}}\sqrt{x^2-x}+x\big) \\ &= \lim_{x\to-\infty} \frac{\big(e^{\frac{3}{x}}\sqrt{x^2-x}+x\big)\cdot\big(e^{\frac{3}{x}}\sqrt{x^2-x}-x\big)}{e^{\frac{3}{x}}\sqrt{x^2-x}-x} \\ &= \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{\frac{6}{x}}(x^2-x)-x^2}{e^{\frac{3}{x}}\sqrt{x^2-x}-x} \overset{x<0}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{\frac{6}{x}}(x-1)-x}{-e^{\frac{3}{x}}\sqrt{1-\frac{1}{x}}-1} \\ &= \lim_{x\to-\infty} \frac{x\Big(e^{\frac{6}{x}}-1\Big)-e^{\frac{6}{x}}}{-e^{\frac{3}{x}}\sqrt{1-\frac{1}{x}}-1} = \frac{6-1}{-1-1} = -\frac{5}{2}\,. \end{aligned}$$

Di conseguenza

$$y = -x-\frac{5}{2} \text{ è un asintoto obliquo di } f \text{ per } x\to-\infty\,.$$

c) Per trovare gli intervalli di monotonia e gli extremi locali di f, dobbiamo prima calcolare la sua derivata :

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{\frac{3}{x}}\Big(-\frac{3}{x^2}\Big)\sqrt{x^2-x} + e^{\frac{3}{x}}\frac{1}{2\sqrt{x^2-x}}(2x-1) \\ &= e^{\frac{3}{x}}\frac{1}{2x^2\sqrt{x^2-x}}\Big(-6(x^2-x)+x^2(2x-1)\Big) \\ &= e^{\frac{3}{x}}\frac{1}{2\sqrt{x^2-x}}\cdot\frac{2x^2-7x+6}{x}\,. \end{aligned}$$

I zeri del trinomio $2x^2-7x+6$ sono $2\,,\frac{3}{2}$, tra i quali il segno del trinomio è " $-$ " , mentre fuori è " $+$ " . Di conseguenza f' si annulla nei punti $2\,,\frac{3}{2}$, ha il segno " $-$ " nei tratti $\big(-\infty,0\big)$ e $\Big(\frac{3}{2},2\Big)$, ed il segno " $+$ " nei tratti $\Big(0,\frac{3}{2}\Big)$ e $\big(2,+\infty\big)$.

Nel punto di frontiera 0 del dominio f ha derivata sinistra :

$$f'_s(0) = \lim_{x\to 0-} \frac{e^{\frac{3}{x}}\sqrt{x^2-x}-0}{x} \overset{y=-\frac{1}{x}}{=} \lim_{y\to+\infty} -y\,e^{-3y}\sqrt{\frac{1}{y^2}+\frac{1}{y}}$$
$$= \underbrace{\lim_{y\to+\infty} -\frac{y}{e^{3y}}}_{=0} \underbrace{\lim_{y\to+\infty}\sqrt{\frac{1}{y^2}+\frac{1}{y}}}_{=0} = 0\,.$$

D'altro canto, nel punto di frontiera 1 del dominio f ha derivata destra infinita :

$$f'_d(1) = \lim_{x\to 1+} \frac{e^{\frac{3}{x}}\sqrt{x^2-x}-0}{x-1} \overset{x-1>0}{=} \underbrace{\lim_{x\to 1+} e^{\frac{3}{x}}}_{=e^3} \underbrace{\lim_{x\to 1+}\sqrt{\frac{x}{x-1}}}_{=+\infty} = +\infty\,.$$

Calcoliamo anche i valori di f nei punti critici $2\,,\frac{3}{2}$:

$$f(2) = e^{\frac{3}{2}}\sqrt{4-2} = e^{\frac{3}{2}}\sqrt{2} \approx 6,338064\,,$$
$$f\Big(\frac{3}{2}\Big) = e^{\frac{3}{3/2}}\sqrt{\frac{9}{4}-\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,e^2 \approx 6,399111\,.$$

Riportiamo il comportamento di f' e di f nella seguente tabella :

x	$-\infty$		0		1		$\frac{3}{2}$		2		$+\infty$
f'		$-$	0		$+\infty$	$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	0	non def.	0	$\nearrow$	$6,4$	$\searrow$	$6,3$	$\nearrow$	$+\infty$

d) Usando le informazioni di cui sopra, è facile tracciare il grafico di f : $y = -x-\dfrac{5}{2}$ è asintoto obliquo di f per $x\to-\infty$. Il grafico di f scende dall'infinito in $(0,0)$, dove ha tangente orizzontale, restando sempre sopra l'asintoto :

Sul tratto $-\dfrac{5}{2} \leq x < 0$ abbiamo ovviamente $f(x) > 0 \geq -x - \dfrac{5}{2}$.
D'altro canto, per $x < -\dfrac{5}{2} \iff -x - \dfrac{5}{2} > 0$ la disuguaglianza

$$f(x) > -x - \frac{5}{2}$$

è equivalente a

$$f(x)^2 > \Big(-x - \frac{5}{2}\Big)^2 = \Big(x + \frac{5}{2}\Big)^2$$

e quindi a

$$g(x) = e^{\frac{6}{x}} \frac{x^2 - x}{\Big(x + \frac{5}{2}\Big)^2} > 1 .$$

Ma

$$\begin{aligned} g'(x) = e^{\frac{6}{x}} \Big(-\frac{6}{x^2}\Big) \frac{x^2 - x}{\Big(x + \frac{5}{2}\Big)^2} \\ + e^{\frac{6}{x}} \frac{(2x-1)\Big(x + \frac{5}{2}\Big)^2 - 2\Big(x + \frac{5}{2}\Big)(x^2 - x)}{\Big(x + \frac{5}{2}\Big)^4} \\ = \frac{e^{\frac{6}{x}}}{x\Big(x + \frac{5}{2}\Big)^3} \Big(-\frac{23}{2}x + 15\Big) > 0 \ \text{ per } \ x < -\frac{5}{2} \end{aligned}$$

implica che g è strettamente crescente su $\Big(-\infty, -\dfrac{5}{2}\Big)$ e, poiché $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = 1$, risulta che la disuguaglianza desiderata $g(x) > 1$ è soddisfatta per ogni $x < -\dfrac{5}{2}$.

Tra 0 e 1 la funzione f non è definita.

Il grafico ricomincia da $(1, 0)$, dove ha tangente verticale, sale fino a $\Big(\dfrac{3}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2} e^2\Big)$, punto con tangente orizzontale, e scende poi a $\big(2, e^{\frac{3}{2}}\sqrt{2}\big)$, punto con tangente orizzontale. In continuazione, il grafico sale da $\big(2, e^{\frac{3}{2}}\sqrt{2}\big)$ all'infinito, ha per $x \to +\infty$ l'asintoto obliquo $y = x + \dfrac{5}{2}$ e resta sempre sopra l'asintoto :

Per $x > 2$ la disuguaglianza $f(x) > x + \dfrac{5}{2}$ è equivalente a $f(x)^2 > \Big(x + \dfrac{5}{2}\Big)^2$, quindi a

$$g(x) = e^{\frac{6}{x}} \frac{x^2 - x}{\Big(x + \frac{5}{2}\Big)^2} > 1 \,.$$

Ma, avendo già calcolato g', vediamo che

$$g'(x) = \frac{e^{\frac{6}{x}}}{x\Big(x + \frac{5}{2}\Big)^3} \Big(- \frac{23}{2} x + 15\Big) < 0 \ \text{ per } \ x > 2 \,.$$

Di conseguenza g è strettamente decrescente su $\big(2, +\infty\big)$ e, poiché $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 1$, risulta che $g(x) > 1$ per ogni $x > 2$.

Commenti sui punti di flesso di f.

Tracciando il grafico di f, diventa chiaro che tra il punto di massimo locale $\dfrac{3}{2}$ ed il punto di minimo locale 2 dovrebbe esistere un punto di transizione da concavità a convessità, cioè un punto di flesso. In questi commenti ci proponiamo di trovare tutti i punti di flesso di f. A questo fine calcoliamo la seconda derivata di f:

$$\begin{aligned} f''(x) = {} & e^{\frac{3}{x}} \Big(- \frac{3}{x^2}\Big) \frac{1}{2\sqrt{x^2 - x}} \cdot \frac{2x^2 - 7x + 6}{x} \\ & + e^{\frac{3}{x}} \Bigg(- \frac{2x - 1}{4\sqrt{(x^2 - x)^3}}\Bigg) \cdot \frac{2x^2 - 7x + 6}{x} \\ & + e^{\frac{3}{x}} \frac{1}{2\sqrt{x^2 - x}} \cdot \frac{(4x - 7)\,x - (2x^2 - 7x + 6)}{x^2} \\ = {} & e^{\frac{3}{x}} \frac{1}{4\,x^3 \sqrt{(x^2 - x)^3}} \cdot h(x) \,, \end{aligned}$$

ove

$$\begin{aligned} h(x) = {} & -\, 6(x^2 - x)\,(2x^2 - 7x + 6) - x^2\,(2x - 1)\,(2x^2 - 7x + 6) \\ & + 2x(x^2 - x)\,(2x^2 - 6) \\ = {} & 23\,x^3 - 60\,x^2 + 36\,x = x\big(23\,x^2 - 60\,x + 36\big) \,, \end{aligned}$$

perciò

$$f''(x) = e^{\frac{3}{x}} \frac{1}{4x^2\sqrt{(x^2-x)^3}} \big(23x^2 - 60x + 36\big) .$$

I zeri del polinomio $23x^2 - 60x + 36$ sono

$$x_{1,2} = \frac{30 \pm \sqrt{900 - 23 \cdot 36}}{23} = \frac{30 \pm \sqrt{72}}{23} = \frac{30 \pm 6\sqrt{2}}{23} \, ,$$

perciò $23x^2 - 60x + 36$ ha segno " $-$ " tra

$$\frac{30 - 6\sqrt{2}}{23} \approx 0,9354 \;\text{ e }\; \frac{30 + 6\sqrt{2}}{23} \approx 1,6733 \, ,$$

e " $+$ " fuori. Risulta che f è

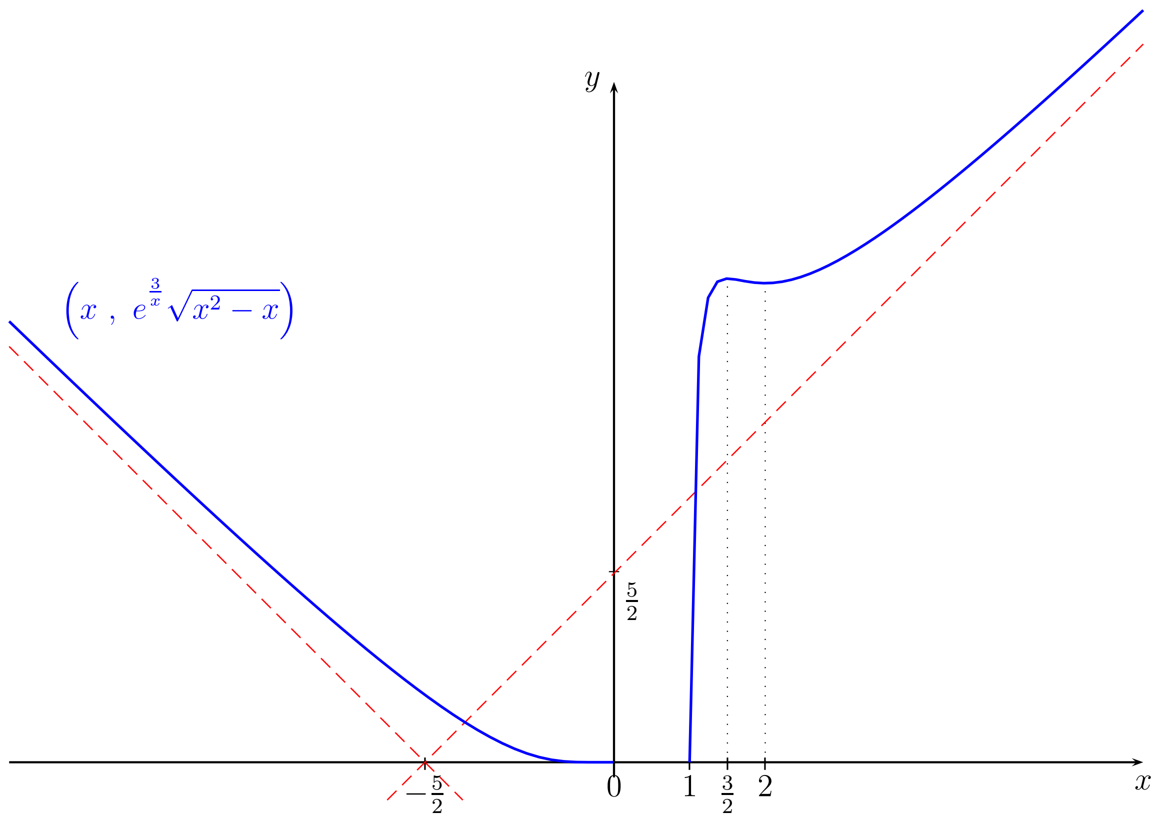
$$\text{convesso su } \big(-\infty, 0\big] \;\text{ e su }\; \Big[\frac{30 + 6\sqrt{2}}{23}, +\infty\Big) \, ,$$

e

$$\text{concavo su } \Big[1, \frac{30 + 6\sqrt{2}}{23}\Big] \, ,$$

avendo così un punto di flesso in $\dfrac{30 + 6\sqrt{2}}{23}$.

Il grafico di f :


$\left(x\ ,\ e^{\frac{3}{x}}\sqrt{x^2-x}\right)$
y
x
$\frac{5}{2}$
$-\frac{5}{2}$
0
1
$\frac{3}{2}$
2