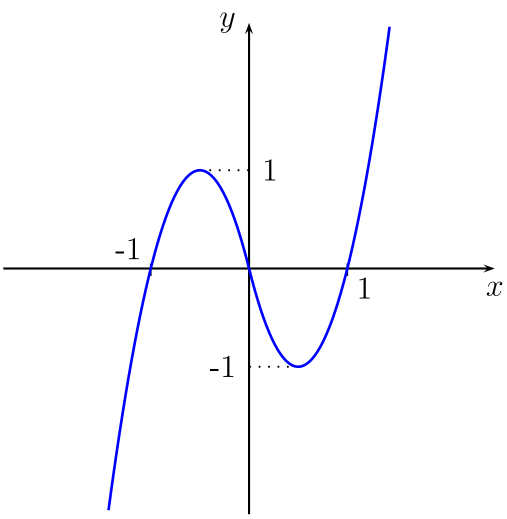
NOME: . . . .   **MATRICOLA:** . . . .

Scienza dei Media e della Comunicazione, A.A. 2007/2008
Analisi Matematica 1, Esame scritto del 08.02.2008

1) Indicare per quali $x \in \mathbb{R}$ vale la seguente diseguaglianza :

$$\frac{|x-1|}{|x|+1} > \frac{|x|-1}{|x-1|}\,.$$

2) Se



è il grafico della funzione $y = f(x)$, quali sono i grafici di

$$f\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right)\,, \quad f\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{2}\,, \quad \frac{1}{2}f(x)-\frac{1}{2} \quad ?$$

3) Trovare parte reale e parte immaginaria di

$$\frac{5}{16} \cdot \frac{(1-i)^{14}}{3-i} \,.$$

4) Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log\big(\cos(2x)\big)}{\log\big(\cos(3x)\big)} \,.$$

5) Consideriamo la funzione

$$f(x) = e^{3x}\sqrt{x^2 - x}\,.$$

a) Determinare il dominio (massimale) di f.

b) Trovare tutti gli asintoti di f.

c) Trovare tutti i massimi e minimi locali di f.

d) Tracciare un grafico qualitativo per f.

Soluzioni:

1) **:** Anzitutto i denominatori non possono anullarsi, cioè $x \neq 1$.

Assumendo ora che $x \neq 1$, i denominatori sono strettamente positivi, perciò possiamo moltiplicare la nostra disequazione con il loro prodotto $\big(|x|+1\big)\cdot|x-1|$, ottenendo

$$\underbrace{(x-1)^2}_{=\,x^2-2x+1} = |x-1|^2 > \big(|x|-1\big)\cdot\big(|x|+1\big) = |x|^2-1 = x^2-1\,,$$

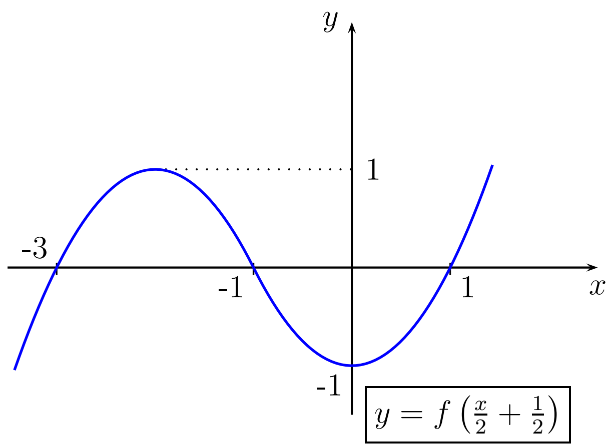
cioè $x<1$.

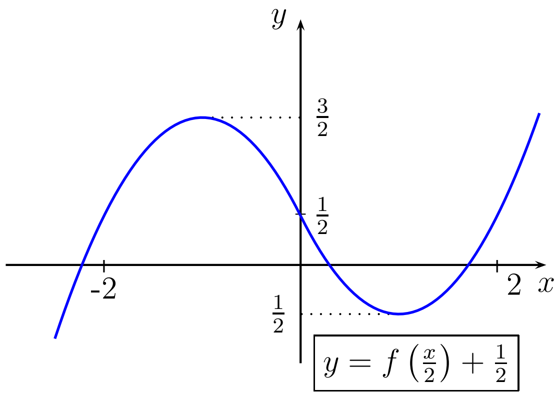
Concludiamo che $x \in \mathbb{R}$ soddisfa la diseguaglianza

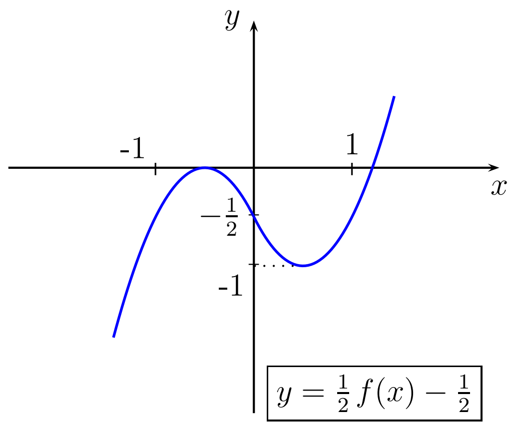
$$\frac{|x-1|}{|x|+1} > \frac{|x|-1}{|x-1|}$$

esattamente quando $x \in (-\infty, 1)$.

2) **:** I grafici richiesti sono :







3) : Per calcolare la potenza $(1-i)^{14}$ ci conviene scrivere $1-i$ in forma trigonometrica ed usare la formula di De Moivre :

$$1 - i = |1-i| \cdot \big(\cos\varphi + i\sin\varphi\big)$$

ove il modulo $|1-i\,|$ è uguale a $\sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$ e l'argomento φ soddisfa

$$\cos\varphi = \frac{1}{|1-i\,|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,, \qquad \sin\varphi = \frac{-1}{|1-i\,|} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\,.$$

Risulta che possiamo scegliere $\varphi = -\dfrac{\pi}{4}$ e così

$$1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\Big(-\frac{\pi}{4}\Big) + i\sin\Big(-\frac{\pi}{4}\Big)\right),$$

$$
\begin{aligned}
(1-i)^{14} &= 2^{\frac{14}{2}}\left(\cos\Big(-\frac{14\,\pi}{4}\Big)+i\sin\Big(-\frac{14\,\pi}{4}\Big)\right)\\
&= 2^7\left(\cos\Big(-\frac{7\,\pi}{2}\Big)+i\sin\Big(-\frac{7\,\pi}{2}\Big)\right)\\
&= 2^7\left(\cos\Big(-4\pi+\frac{\pi}{2}\Big)+i\sin\Big(-4\pi+\frac{\pi}{2}\Big)\right)\\
&= 2^7\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)\\
&= 2^7\,i\,.
\end{aligned}
$$

Di conseguenza parte reale e parte immaginaria di

$$
\frac{5}{16}\cdot\frac{(1-i)^{14}}{3-i}=\frac{5}{16}\cdot\frac{2^7\,i}{3-i}=\frac{40\,i\,(3+i)}{(3-i)(3+i)}=\frac{40\,(-1+3\,i)}{3^2+1^2}=-4+12\,i
$$

sono -4 rispettivamente 12 .

4) : Il limite si presenta nella forma indeterminata $\dfrac{0}{0}$ e quindi possiamo applicare la regola di De L'Hospital :

$$
\lim_{x\to 0+}\frac{\log\big(\cos(2x)\big)}{\log\big(\cos(3x)\big)}=\lim_{x\to 0+}\frac{\Big(\log\big(\cos(2x)\big)\Big)'}{\Big(\log\big(\cos(3x)\big)\Big)'}\,.
$$

Poiché

$$
\Big(\log\big(\cos(2x)\big)\Big)'=\frac{1}{\cos(2x)}\cdot\Big(-\sin(2x)\Big)\cdot 2=-\frac{2\,\sin(2x)}{\cos(2x)}
$$

e, similmente,

$$
\Big(\log\big(\cos(3x)\big)\Big)'=\frac{1}{\cos(3x)}\cdot\Big(-\sin(3x)\Big)\cdot 3=-\frac{3\,\sin(3x)}{\cos(3x)}\ ,
$$

otteniamo

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0+}\frac{\log\big(\cos(2x)\big)}{\log\big(\cos(3x)\big)} &= \lim_{x\to 0+}\left(\frac{2\,\sin(2x)}{\cos(2x)}\cdot\frac{\cos(3x)}{3\,\sin(3x)}\right)\\
&= \frac{4}{9}\lim_{x\to 0+}\left(\frac{\sin(2x)}{2x}\cdot\frac{3x}{\sin(3x)}\cdot\frac{\cos(3x)}{\cos(2x)}\right)\\
&= \frac{4}{9}\,.
\end{aligned}
$$

5) **:** a) Il dominio di f consiste da tutti i numeri reali x per quali $\sqrt{x^2 - x}$ ha senso, cioè $x\,(x-1) = x^2 - x \geq 0$. Se $x \leq 0$, allora x si trova nel dominio, ma per $x > 0$ dobbiamo avere anche $x - 1 \geq 0 \iff x \geq 1$. Cosiche' il dominio fi f è

$$\big(-\infty, 0\big] \cup \big[1, +\infty\big) .$$

b) Chiaramente, f non ha asintoto verticale.

La prima condizione per l'esistenza di un asintoto obliquo per $x \to +\infty$ è l'esistenza del limite finito

$$m_+ = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} .$$

Verifichiamo che questo non accade :

$$m_+ = \lim_{x \to +\infty} e^{3x} \frac{\sqrt{x^2 - x}}{x} = \underbrace{\lim_{x \to +\infty} e^{3x}}_{= +\infty} \underbrace{\lim_{x \to +\infty} \sqrt{1 - \frac{1}{x}}}_{= 1} = +\infty .$$

Di conseguenza f non ha asintoto obliquo per $x \to +\infty$ (in particolare, non ha asintoto orizzontale per $x \to +\infty$).

D'altro canto :

- esiste

$$m_- = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} e^{3x} \frac{\sqrt{x^2 - x}}{x} \overset{x \leq 0}{=} \lim_{x \to -\infty} - e^{3x} \sqrt{1 - \frac{1}{x}} = 0 ;$$

- poi esiste

$$\begin{aligned} n_- &= \lim_{x \to -\infty} \big(f(x) - m_- x \big) = \lim_{x \to -\infty} \Big(e^{3x} \sqrt{x^2 - x} - 0 \Big) \\ &\overset{y = -x}{=} \lim_{y \to +\infty} \frac{\sqrt{y^2 + y}}{e^{3y}} = 0 \end{aligned}$$

Di conseguenza

$y = 0$ è un asintoto obliquo (perfino orizzontale) di f per $x \to -\infty$.

L'asintoto orizzontale $y = 0$ per $x \to -\infty$ è l'unico asintoto di f .

c) Per trovare gli intervalli di monotonia e gli extremi locali di f , dobbiamo prima calcolare la sua derivata :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3\,e^{3x}\sqrt{x^2-x} + e^{3x}\frac{1}{2\sqrt{x^2-x}}\,(2x-1) \\ &= e^{3x}\frac{1}{2\sqrt{x^2-x}}\Big(6\,(x^2-x)+(2x-1)\Big) \\ &= e^{3x}\frac{1}{2\sqrt{x^2-x}}\Big(6\,x^2-4\,x-1\Big)\,. \end{aligned}$$

I zeri del trinomio $6\,x^2-4\,x-1$ sono $\dfrac{2\pm\sqrt{10}}{6}$, tra i quali il segno del trinomio è " $-$ " , mentre fuori è " $+$ " . Poiché

$$0<\frac{2+\sqrt{10}}{6}<1$$

non si trova nel dominio di f , f' si annulla solo nel punto

$$\frac{2-\sqrt{10}}{6}\approx -0,1937\,,$$

avendo

$$\text{segno " + " nei tratti }\Big(-\infty,\frac{2-\sqrt{10}}{6}\Big)\text{ e }\big(1,+\infty\big)\,,$$

e

$$\text{segno " $-$ " nel tratto }\Big(\frac{2-\sqrt{10}}{6},0\Big)\,.$$

Nel punto di frontiera 0 del dominio f ha derivata sinistra infinita :

$$\begin{aligned} f'_-(0) &= \lim_{x\to 0-}\frac{e^{3x}\sqrt{x^2-x}-0}{x} \overset{x<0}{=} \lim_{x\to 0-} -e^{3x}\sqrt{1-\frac{1}{x}} \\ &= -\underbrace{\lim_{x\to 0-} e^{3x}}_{=1}\underbrace{\lim_{x\to 0-}\sqrt{1-\frac{1}{x}}}_{=+\infty} = -\infty\,. \end{aligned}$$

D'altro canto, nel punto di frontiera 1 del dominio f la derivata destra è infinita :

$$f'_+(1) = \lim_{x\to 1+}\frac{e^{3x}\sqrt{x^2-x}-0}{x-1} \overset{x-1>0}{=} \underbrace{\lim_{x\to 1+} e^{3x}}_{=e^3}\underbrace{\lim_{x\to 1+}\sqrt{\frac{x}{x-1}}}_{=+\infty} = +\infty\,.$$

Calcoliamo anche il valore di f nel punto critico $\dfrac{2-\sqrt{10}}{6}$:

$$f\left(\frac{2-\sqrt{10}}{6}\right)=e^{\frac{2-\sqrt{10}}{2}}\sqrt{\left(\frac{2-\sqrt{10}}{6}\right)^{2}-\frac{2-\sqrt{10}}{6}}$$
$$=\frac{\sqrt{2+2\sqrt{2}}}{6\,e^{\frac{\sqrt{10}-2}{2}}}\approx 0,27\ .$$

Riportiamo il comportamento di f' e di f nella seguente tabella :

x	$-\infty$		$\frac{2-\sqrt{10}}{6}$		0		1		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	$-\infty$		$+\infty$	$+$	
f	0	$\nearrow$	0,27	$\searrow$	0	non def.	0	$\nearrow$	$+\infty$

In particolare, $\dfrac{2-\sqrt{10}}{6}$ è punto di massimo locale per f.

d) Usando le informazioni di cui sopra, è facile tracciare il grafico di f :

$y=0$ è asintoto orizzontale di f per $x\to-\infty$. Il grafico di f sale da 0 in $-\infty$ fino al punto

$$\left(\frac{2-\sqrt{10}}{6},f\left(\frac{2-\sqrt{10}}{6}\right)\right)\approx\big(-0,19\ ,\ 0,27\big)\,,$$

dove ha tangente orizzontale, poi scende a $(0,0)$, avendo in questo punto tangente verticale.

Tra 0 e 1 la funzione f non è definita.

Il grafico ricomincia da $(1,0)$ e sale all'infinito, avendo in $(1,0)$ tangente verticale.

Commenti sui punti di flesso di f .

Volendo trovare i punti di flesso di f , dobbiamo calcolare la seconda derivata di f :

$$\begin{aligned} f''(x) &= 3\,e^{3x}\frac{1}{2\sqrt{x^2-x}}\Big(6x^2-4x-1\Big) \\ &\qquad + e^{3x}\bigg(-\frac{2x-1}{4\sqrt{(x^2-x)^3}}\bigg)\Big(6x^2-4x-1\Big) \\ &\qquad + e^{3x}\frac{1}{2\sqrt{x^2-x}}\Big(12\,x-4\Big) \\ &= e^{3x}\frac{1}{4\sqrt{(x^2-x)^3}}\cdot P(x)\,, \end{aligned}$$

ove

$$\begin{aligned} P(x) &= 6(x^2-x)\,(6x^2-4x-1) - (2x-1)\,(6x^2-4x-1) \\ &\qquad\qquad + 2\,(x^2-x)\,(12x-4) \\ &= 36\,x^4-48\,x^3+12\,x-1\,. \end{aligned}$$

Ora i punti di flesso di f sono i zeri di f'' nei quali f'' cambia segno, cioè i punti nei quali f cambia il tipo di convessità (convessità in concavità o viceversa). Per il calcolo qui sopra, questi punti sono i zeri del polinomio P nei quali P cambia segno.

Per le soluzioni di una equazione algebrica di quarto grado non c'è una formula ragionevole (per dire la verità, esiste una formula, ma è troppo complicata e non è pratica!). Perciò useremo metodi di Analisi 1 per studiare i zeri di P.

I zeri del polinomio $P(x)=36\,x^4-48\,x^3+12\,x-1\,.$

Calcoliamo le prime due derivate di P :

$$\begin{aligned} P'(x) &= 36\cdot 4\,x^3-48\cdot 3\,x^2+12 = 12\,\big(12\,x^3-12\,x^2+1\big)\,, \\ P''(x) &= 12^2\big(3\,x^2-2\,x\big) = 12^2x\,\big(3\,x-2\big)\,. \end{aligned}$$

Chiaramente, i zeri di $P''(x)$ sono $0\,,\ \dfrac{2}{3}$ ed il segno di $P''(x)$ è " $-$ " tra questi zeri e " $+$ " fuori. Concludiamo per P' :

x	$-\infty$		0		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
P''		$+$	0	$-$	0	$+$	
P'	$-\infty$	$\nearrow$	12	$\searrow$	$-\frac{28}{3}$	$\nearrow$	$+\infty$

ed il teorema dei valori intermedi implica l'esistenza di tre zeri b_1, b_2, b_3 di P', uno minore di 0, il secondo tra 0 e $\dfrac{2}{3}$, ed il terzo maggiore di $\dfrac{2}{3}$:

$$-\infty < b_1 < 0 < b_2 < \frac{2}{3} < b_3 < +\infty \, .$$

Dalla tabella precedente deduciamo anche che P' ha segno " $-$ " nei tratti

$$(-\infty, b_1)\, , \qquad (b_2, b_3)\, ,$$

e segno " $+$ " nei tratti

$$(b_1, b_2)\, , \qquad (b_3, +\infty)\, .$$

In particolare, poiché $P'(x) = 12\big(12\,x^3 - 12\,x^2 + 1\big) \geq 12 > 0$ per $x \geq 1$, dobbiamo avere $b_3 < 1$ e quindi

$$-\infty < b_1 < 0 < b_2 < \frac{2}{3} < b_3 < 1 \, .$$

Risulta che b_1 è un punto di minimo locale per P, b_2 un punto di massimo locale, e b_3 di nuovo un punto di minimo locale :

x	$-\infty$		b_1		0		b_2		$\frac{2}{3}$		b_3		1	$+\infty$
P'		$-$	0	$+$			0	$-$			0	$+$		
P	$+\infty$	$\searrow$	min	$\nearrow$			max	$\searrow$			min	$\nearrow$		$+\infty$

Ora tocca a trovare i segni di $P(b_1)\, , P(b_2)\, , P(b_3)$ per vedere se P scende in b_1 sotto 0, sale in b_2 sopra 0 e scende in b_3 di nuovo sotto 0 o no. Ma dalla tabella di cui sopra si legge che è veramente così :

$$P(b_1) < P(0) = -1 < 0\, ,$$
$$P(b_2) \geq P\Big(\frac{1}{2}\Big) = \frac{5}{4} > 0 \,\Big(\text{non importa se } \frac{1}{2} \leq b_2 \text{ o } \frac{1}{2} \geq b_2\Big)\, ,$$
$$P(b_3) < P(1) = -1 < 0\, .$$

Perciò il teorema dei valori intermedi implica l'esistenza di quattro zeri a_1, a_2, a_3, a_4 di P soddisfacenti

$$a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < a_3 < b_3 < a_4 \,.$$

Per di più, P ha segno " $+$ " su

$$(-\infty, a_1)\,, \qquad (a_2, a_3)\,, \qquad (a_4, +\infty)$$

e segno " $-$ " su

$$(a_1, a_2)\,, \qquad (a_3, a_4)\,.$$

In particolare $P(1) = -1 < 0$ implica che $1 < a_4$. D'altro canto abbiamo $a_3 < b_3 < 1$, perciò 1 separa a_3 e a_4 .
Similmente, $P(0) = -1 < 0$ implica che 0 appartiene o a (a_1, a_2) o a (a_3, a_4) e, poiché $a_3 > b_2 > 0$, risulta che $0 \in (a_1, a_2)$. In altre parole 0 separa a_1 e a_2 .
Finalmente, $P(0,5) = 1,25 > 0$ implica che $0,5$ si trova in uno degli intervalli $(-\infty, a_1)\,, (a_2, a_3)\,, (a_4, +\infty)$ e, poiché $a_1 < 0 < 0,5$ e $0,5 < 1 < a_4$, risulta che $0,5$ appartiene a (a_2, a_3) , cioè separa a_2 e a_3 .
In conclusione

$$a_1 < 0 < a_2 < 0,5 < a_3 < 1 < a_4$$

e così diventa facile decidere la posizione di un numero reale x rispetto ai zeri a_1, a_2, a_3, a_4 del polinomio P :

– se $P(x) > 0$, allora $x \in \begin{cases} (-\infty, a_1) & \text{per } x \leq 0\,, \\ (a_2, a_3) & \text{per } 0 \leq x \leq 1\,, \\ (a_4, +\infty) & \text{per } x \geq 1\,, \end{cases}$

– se $P(x) < 0$, allora $x \in \begin{cases} (a_1, a_2) & \text{per } x \leq 0,5\,, \\ (a_3, a_4) & \text{per } x \geq 0,5\,. \end{cases}$

Per esempio, abbiamo

$$P(-0,5) = 1,25 > 0\,,\ -0,5 < 0 \implies -0,5 < a_1\,,$$
$$P(-0,4) = -1,8064 < 0\,,\ -0,4 < 0,5 \implies -0,4 > a_1\,,$$

$$P(0,1) = 0,1556 > 0\,,\ 0 < 0,1 < 1 \implies 0,1 > a_2\,,$$
$$P(0,6) = 0,5016 > 0\,,\ 0 < 0,6 < 1 \implies 0,6 < a_3\,,$$
$$P(0,7) = -0,4204 < 0\,,\ 0,7 > 0,5 \implies 0,7 > a_3\,,$$
$$P(1,1) = 1,0196 > 0\,,\ 1,1 > 1 \implies 1,1 > a_4$$

e quindi valgono le stime

$$\begin{aligned} -0,5 < a_1 &< -0,4\,, \\ 0 < a_2 &< 0,1\,, \\ 0,6 < a_3 &< 0,7\,, \\ 1 < a_4 &< 1,1\,. \end{aligned}$$

Ora, dato che

$$f''(x) = e^{3x}\frac{1}{4\sqrt{(x^2-x)^3}} \cdot P(x)$$

e $(0,1) \ni a_2\,, a_3$ è disgiunto al dominio di f, possiamo completare la tabella (**??**) con informazioni anche sulle proprietà di convessità di f :

x	$-\infty$			a_1	$\frac{2-\sqrt{10}}{6}$		0		1		a_4			$+\infty$
f'			$+$		0	$-$	$-\infty$		$+\infty$			$+$		
f''		$+$		0	$-$		$\vert$		$\vert$	$+$	0		$-$	
f	0		$\nearrow$		0,27	$\searrow$	0	non def.	0			$\nearrow$		$+\infty$

Risulta che f è

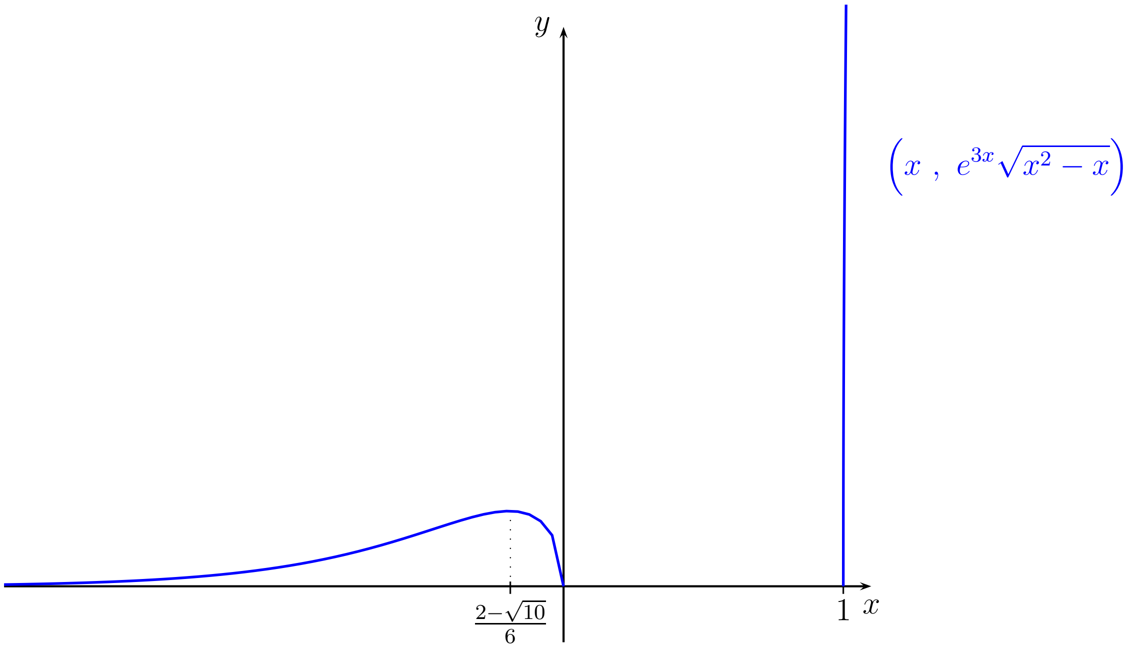
$$\text{convesso su } (-\infty, a_1] \text{ e su } [1, a_4]\,,$$

e

$$\text{concavo su } [a_1, 0] \text{ e su } [a_4, +\infty)\,,$$

avendo così punti di flesso in $a_1 = -0,4...$ e in $a_4 = 1,1...$.

Il grafico di f :



Rimarco :

Il tratto del grafico dopo 1 non è verticale, solo cresce molto veloce!