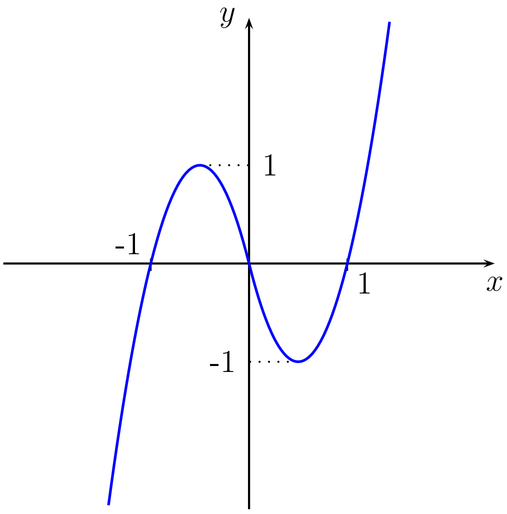
NOME: .... MATRICOLA: ....

Scienza dei Media e della Comunicazione, A.A. 2007/2008
Analisi Matematica 1, Esame scritto del 08.02.2008

1) Indicare per quali $x \in \mathbb{R}$ vale la seguente diseguaglianza :

$$\frac{|x+1|}{|x|-1} < \frac{|x|-1}{|x-1|}\,.$$

2) Se



è il grafico della funzione $y = f(x)$, quali sono i grafici di

$$f\left(\frac{x}{3}-\frac{1}{3}\right)\,,\quad f\left(\frac{x}{3}\right)+1\,,\quad \frac{1}{3}\,f(x)+\frac{1}{3}\quad ?$$

3) Trovare parte reale e parte immaginaria di

$$\frac{13}{8} \cdot \frac{(1+i)^{10}}{3+2i}\,.$$

4) Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 1-} \log(x) \cdot \log(1-x)\,.$$

5) Consideriamo la funzione

$$f(x) = e^{\frac{1}{2x}} \sqrt{x^2+x}\,.$$

a) Determinare il dominio (massimale) di f.

b) Trovare tutti gli asintoti di f.

c) Trovare tutti i massimi e minimi locali di f.

d) Tracciare un grafico qualitativo per f.

Soluzioni:

1) **:** Anzitutto i denominatori non possono anullarsi, cioè $|x| \neq 1$.

Se $|x| > 1$, allora possiamo moltiplicare la nostra disequazione con il valore strettamente positivo $\big(|x|-1\big)\cdot|x-1|$, ottenendo

$$|x|^2 - 1 = \big||x|^2-1\big| = \big|x^2-1\big| = |x+1|\cdot|x-1| < \underbrace{\big(|x|-1\big)^2}_{=\,|x|^2-2|x|+1} ,$$

cioè $|x| < 1$, in contradizione con l'ipotesi fatta $|x| > 1$. Cosicché non c'è soluzione con $|x| > 1$.

Se invece $|x| < 1$, allora la moltiplicazione della disequazione data con il valore strettamente negativo $\big(|x|-1\big)\cdot|x-1|$ cambia il senso della disuguaglianza :

$$1 - |x|^2 = \big||x|^2-1\big| = \big|x^2-1\big| = |x+1|\cdot|x-1| > \underbrace{\big(|x|-1\big)^2}_{=\,|x|^2-2|x|+1} ,$$

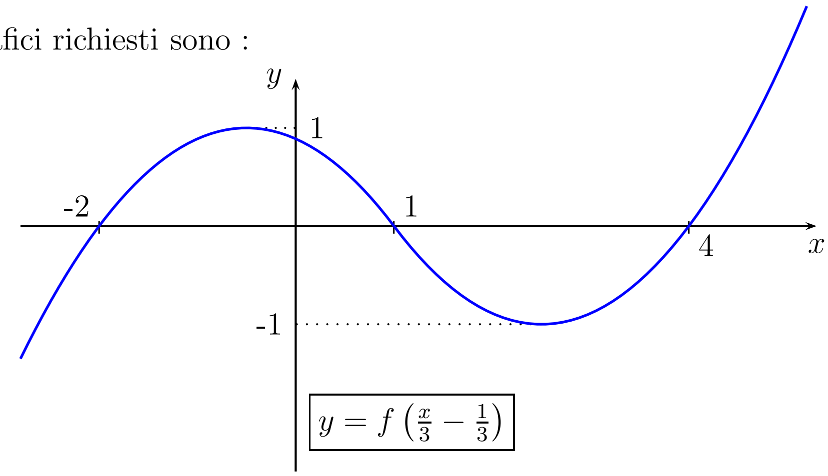
ottenendo la soluzione $|x| > 0$. Avendo fatto però l'ipotesi $|x| < 1$, risulta che dobbiamo avere $0 < |x| < 1$.

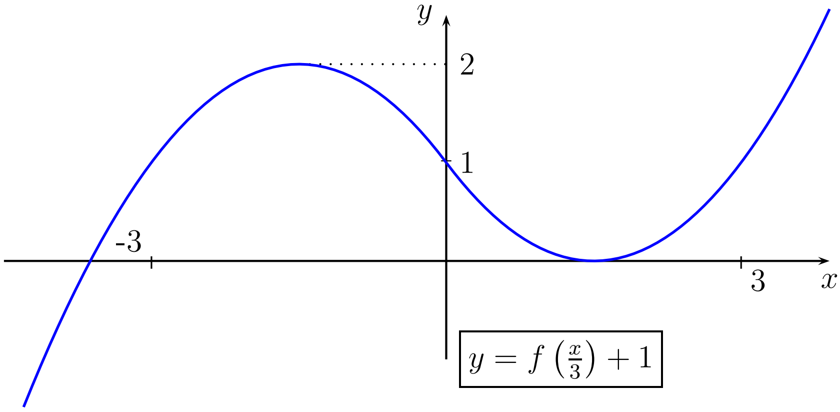
Concludiamo che $x \in \mathbb{R}$ soddisfa la diseguaglianza

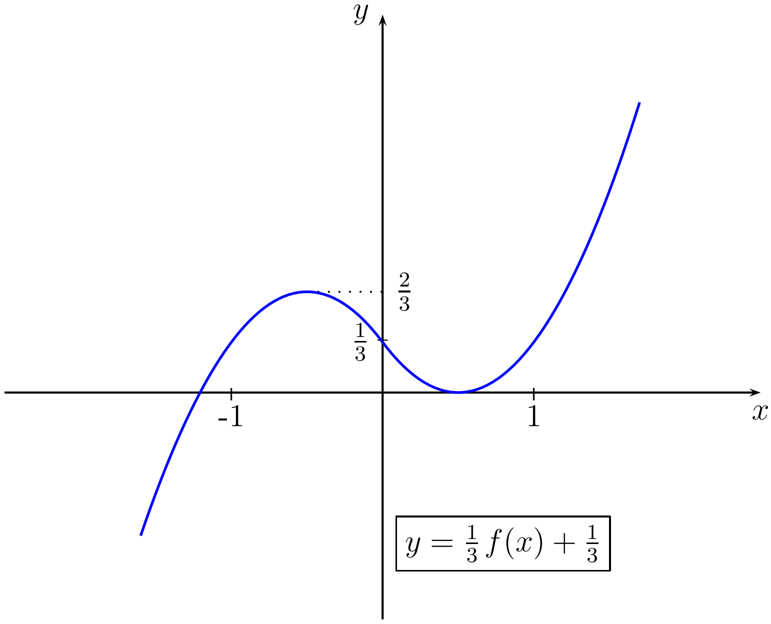
$$\frac{|x+1|}{|x|-1} < \frac{|x|-1}{|x-1|}$$

esattamente quando $0 < |x| < 1$, ossia $x \in \big(-1,0\big) \cup \big(0,1\big)$.

2) **:** I grafici richiesti sono :







3) : Per calcolare la potenza $(1+i)^{10}$ ci conviene scrivere $1+i$ in forma trigonometrica ed usare la formula di De Moivre :

$$1+i = |1+i|\cdot\big(\cos\varphi + i\sin\varphi\big)$$

ove il modulo $|1+i|$ è uguale a $\sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$ e l'argomento φ soddisfa

$$\cos\varphi = \frac{1}{|1+i|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,, \qquad \sin\varphi = \frac{1}{|1+i|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,.$$

Risulta che possiamo scegliere $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$ e così

$$1 + i = \sqrt{2}\Big(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\Big)\,,$$

$$\begin{aligned}
(1+i)^{10} &= 2^{\frac{10}{2}}\Big(\cos\frac{10\,\pi}{4} + i\sin\frac{10\,\pi}{4}\Big)\\
&= 2^5\Big(\cos\frac{5\,\pi}{2} + i\sin\frac{5\,\pi}{2}\Big)\\
&= 2^5\bigg(\cos\Big(2\pi + \frac{\pi}{2}\Big) + i\sin\Big(2\pi + \frac{\pi}{2}\Big)\bigg)\\
&= 2^5\Big(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\Big)\\
&= 2^5\,i\,.
\end{aligned}$$

Di conseguenza parte reale e parte immaginaria di

$$\begin{aligned}
\frac{13}{8}\cdot\frac{(1+i)^{10}}{3+2i} = \frac{13}{8}\cdot\frac{2^5\,i}{3+2i} &= \frac{13\cdot 4\,i\,(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)} = \frac{13\cdot 4\,(2+3\,i)}{3^2+2^2}\\
&= 8 + 12\,i
\end{aligned}$$

sono 8 rispettivamente 12 .

4) : Il limite si presenta nella forma indeterminata $0\cdot(-\infty)$, ma possiamo ricondurlo alla forma $\dfrac{-\infty}{-\infty}$ guardando il prodotto $\log(x)\cdot\log(1-x)$ come il rapporto

$$\frac{\log(1-x)}{\dfrac{1}{\log(x)}}\,.$$

In altre parole, il nostro limite si scrive nella forma

$$\lim_{x\to 1-}\frac{\log(1-x)}{\dfrac{1}{\log(x)}}$$

alla quale possiamo applicare la regola di De L'Hospital :

Poiché

$$\Big(\log(1-x)\Big)' = -\frac{1}{1-x}\,,\qquad \Big(\frac{1}{\log(x)}\Big)' = -\frac{1}{\big(\log(x)\big)^2}\cdot\frac{1}{x}\,,$$

otteniamo

$$\lim_{x\to 1-} \log(x)\cdot\log(1-x) = \lim_{x\to 1-} \frac{\log(1-x)}{\dfrac{1}{\log(x)}} = \lim_{x\to 1-} \frac{\Big(\log(1-x)\Big)'}{\left(\dfrac{1}{\log(x)}\right)'}$$

$$= \lim_{x\to 1-} \frac{-\dfrac{1}{1-x}}{-\dfrac{1}{\big(\log(x)\big)^2}\cdot\dfrac{1}{x}} = \lim_{x\to 1-} \frac{x\big(\log(x)\big)^2}{1-x}\,.$$

Il limite $\lim\limits_{x\to 1-} \dfrac{x\big(\log(x)\big)^2}{1-x}$ si trova nella forma indeterminata $\dfrac{0}{0}$, perciò possiamo applicare di nuovo la regola di De L'Hospital, ottenendo

$$\lim_{x\to 1-} \frac{x\big(\log(x)\big)^2}{1-x} = \lim_{x\to 1-} \frac{\Big(x\big(\log(x)\big)^2\Big)'}{\big(1-x\big)'} = \lim_{x\to 1-} \frac{\big(\log(x)\big)^2+\log(x)}{-1}$$

$$= 0\,.$$

Di conseguenza

$$\lim_{x\to 1-} \log(x)\cdot\log(1-x) = 0\,.$$

5) **:** a) Il dominio di f consiste da tutti i numeri reali x per quali $\dfrac{1}{x}$ e $\sqrt{x^2+x}$ hanno senso, cioè $x\neq 0$ e $x\,(x+1) = x^2+x\geq 0$. Se $x>0$, allora dobbiamo avere anche $x+1\geq 0$, che risulta però sempre. Se invece $x<0$, allora è necessario avere anche $x+1\leq 0 \iff x\leq -1$. Concludiamo quindi che il dominio fi f è

$$\big(-\infty,-1\big]\cup\big(0,+\infty\big)\,.$$

b) Poiché

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} e^{\frac{1}{2x}}\sqrt{x^2+x} \overset{x\geq 0}{=} \lim_{x\to 0+} e^{\frac{1}{2x}}\sqrt{x}\,\sqrt{x+1}$$

$$= \underbrace{\lim_{x\to 0+} \frac{e^{\frac{1}{2x}}}{\sqrt{\frac{1}{2x}}}}_{=+\infty}\cdot\underbrace{\lim_{x\to 0-} \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{x+1}}_{=\frac{1}{\sqrt{2}}} = +\infty\,,$$

$x = 0$ è un asintoto verticale di f. Ora esaminiamo l'esistenza degli asintoti obliqui.

La prima condizione per l'esistenza di un asintoto obliquo per $x \to +\infty$ è l'esistenza del limite finito

$$m_+ = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} \, .$$

Verifichiamo l'esistenza di questo limite :

$$m_+ = \lim_{x \to +\infty} e^{\frac{1}{2x}} \frac{\sqrt{x^2 + x}}{x} \overset{x \geq 0}{=} \underbrace{\lim_{x \to +\infty} e^{\frac{1}{2x}}}_{=1} \underbrace{\lim_{x \to +\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{x}}}_{=1} = 1 \, .$$

La seconda condizione per l'esistenza di un asintoto obliquo per $x \to +\infty$, necessariamente di forma

$$y = m_+ x + n_+$$

e nel nostro caso $y = x + n_+$, è l'esistenza del limite finito

$$n_+ = \lim_{x \to +\infty} \big(f(x) - m_+ x \big) \, .$$

Verifichiamo che anche questo limite esiste :

$$\begin{aligned}
n_+ &= \lim_{x \to +\infty} \big(e^{\frac{1}{2x}} \sqrt{x^2 + x} - x \big) \\
&= \lim_{x \to +\infty} \frac{\big(e^{\frac{1}{2x}} \sqrt{x^2 + x} - x \big) \cdot \big(e^{\frac{1}{2x}} \sqrt{x^2 + x} + x \big)}{e^{\frac{1}{2x}} \sqrt{x^2 + x} + x} \\
&= \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} (x^2 + x) - x^2}{e^{\frac{1}{2x}} \sqrt{x^2 + x} + x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} (x + 1) - x}{e^{\frac{1}{2x}} \sqrt{1 + \dfrac{1}{x}} + 1} \\
&= \lim_{x \to +\infty} \frac{x \Big(e^{\frac{1}{x}} - 1 \Big) + e^{\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{2x}} \sqrt{1 + \dfrac{1}{x}} + 1}
\end{aligned}$$

Poiché

$$\lim_{x\to+\infty} x\Big(e^{\frac{1}{x}}-1\Big) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}} = 1\,,$$

$$\lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1\,,$$

$$\lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{2x}}\sqrt{1+\frac{1}{x}} = 1\,,$$

concludiamo l'esistenza di

$$n_+ = \frac{1+1}{1+1} = 1\,,$$

Cosicché

$$y = x+1 \ \text{ è un asintoto obliquo di } \ f \ \text{ per } \ x\to+\infty\,.$$

Similmente si verifica :

– esiste

$$m_- = \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} e^{\frac{1}{2x}}\frac{\sqrt{x^2+x}}{x} \overset{x\le 0}{=} \lim_{x\to-\infty} -\,e^{\frac{1}{2x}}\sqrt{1+\frac{1}{x}} = -1\,;$$

– poi esiste

$$\begin{aligned}
n_- &= \lim_{x\to-\infty}\big(f(x)-m_-x\big) = \lim_{x\to-\infty}\big(e^{\frac{1}{2x}}\sqrt{x^2+x}+x\big)\\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{\big(e^{\frac{1}{2x}}\sqrt{x^2+x}+x\big)\cdot\big(e^{\frac{1}{2x}}\sqrt{x^2+x}-x\big)}{e^{\frac{1}{2x}}\sqrt{x^2+x}-x}\\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}}(x^2+x)-x^2}{e^{\frac{1}{2x}}\sqrt{x^2+x}-x} \overset{x\le 0}{=} \lim_{x\to-\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}}(x+1)-x}{-\,e^{\frac{1}{2x}}\sqrt{1+\frac{1}{x}}-1}\\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{x\Big(e^{\frac{1}{x}}-1\Big)+e^{\frac{1}{x}}}{-\,e^{\frac{1}{2x}}\sqrt{1+\frac{1}{x}}-1} = \frac{1+1}{-1-1} = -1\,.
\end{aligned}$$

Di conseguenza

$$y = -x - 1 \text{ è un asintoto obliquo di } f \text{ per } x \to -\infty .$$

c) Per trovare gli intervalli di monotonia e gli extremi locali di f, dobbiamo prima calcolare la sua derivata :

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{\frac{1}{2x}} \Big(-\frac{1}{2x^2} \Big) \sqrt{x^2+x} + e^{\frac{1}{2x}} \frac{1}{2\sqrt{x^2+x}} (2x+1) \\ &= e^{\frac{1}{2x}} \frac{1}{2x^2\sqrt{x^2+x}} \Big(-(x^2+x) + x^2(2x+1) \Big) \\ &= e^{\frac{1}{2x}} \frac{1}{2\sqrt{x^2+x}} \cdot \frac{2x^2-1}{x} . \end{aligned}$$

I zeri del polinomio $2x^2-1$ sono $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, tra i quali il segno del polinomio è " $-$ ", mentre fuori è " $+$ ". Di conseguenza f' si annulla nel punto $\frac{1}{\sqrt{2}}$, ha il segno " $-$ " nei tratti $(-\infty, -1)$ e $\Big(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\Big)$, ed il segno " $+$ " nel tratto $\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\Big)$.

Nel punto di frontiera -1 del dominio f ha derivata sinistra infinita :

$$\begin{aligned} f'_-(-1) &= \lim_{x\to-1-} \frac{e^{\frac{1}{2x}}\sqrt{x^2+x} - 0}{x-(-1)} = \lim_{x\to-1-} e^{\frac{1}{2x}} \frac{\sqrt{x^2+x}}{x+1} \\ &\overset{x+1<0}{=} \lim_{x\to-1-} -e^{\frac{1}{2x}} \sqrt{\frac{x}{x+1}} = -\underbrace{\lim_{x\to-1-} e^{\frac{1}{2x}}}_{=e^{-\frac{1}{2}}} \underbrace{\lim_{x\to-1-} \sqrt{\frac{x}{x+1}}}_{=+\infty} \\ &= -\infty . \end{aligned}$$

Calcoliamo anche i valori di f nel punto critico $\frac{1}{\sqrt{2}}$:

$$f\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}\Big) = e^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}} \approx 2,234 .$$

Riportiamo il comportamento di f' e di f nella seguente tabella :

x	$-\infty$		-1		0		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		$+\infty$
f'		$-$	$-\infty$		$\vert$	$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	0	non def.	$+\infty$	$\searrow$	$2,2$	$\nearrow$	$+\infty$

In particolare $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ è punto di minimo locale per f.

d) Usando le informazioni di cui sopra, è facile tracciare il grafico di f :
$y = -x - 1$ è asintoto obliquo di f per $x \to -\infty$. Il grafico di f scende dall'infinito in $(-1, 0)$, dove ha tangente verticale, restando sempre sopra l'asintoto :

Per $x < -1$ la disuguaglianza

$$f(x) > -x - 1$$

è equivalente a

$$f(x)^2 > \big(-x - 1\big)^2 = \big(x+1\big)^2$$

e quindi a

$$g(x) = e^{\frac{1}{x}} \frac{x^2 + x}{\big(x+1\big)^2} = e^{\frac{1}{x}} \frac{x}{x+1} > 1 \, .$$

Ma

$$\begin{aligned} g'(x) &= e^{\frac{1}{x}} \Big(-\frac{1}{x^2}\Big) \frac{x}{x+1} + e^{\frac{1}{x}} \frac{\big(x+1\big) - x}{\big(x+1\big)^2} \\ &= \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2\big(x+1\big)^2} \Big(-x(x+1) + x\Big) = -\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x\big(x+1\big)^2} \end{aligned}$$

implica che g è strettamente crescente su $\big(-\infty, -1\big)$ e, poiché $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = 1$, risulta che la disuguaglianza desiderata $g(x) > 1$ è soddisfatta per ogni $x < -1$.

Tra -1 e 0 la funzione f non è definita.

f ha asintoto verticale in $x = 0$ ed il grafico ricomincia a scendere dall'infinito fino al punto $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\, , e^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}}\right) \approx \big(0,707, 2,234\big)$, dove ha tangente orizzontale. Poi sale all'infinito, avendo per $x \to +\infty$ l'asintoto obliquo $y = x + 1$, e resta sempre sopra l'asintoto :

> Come prima, per $x > 0$ la disuguaglianza $f(x) > x + 1$ è equivalente a $f(x)^2 > \big(x+1\big)^2$, quindi a
>
> $$g(x) = e^{\frac{1}{x}}\,\frac{x^2+x}{\big(x+1\big)^2} = e^{\frac{1}{x}}\,\frac{x}{x+1} > 1\,.$$
>
> Ma, avendo già calcolato g', vediamo che
>
> $$g'(x) = -\,\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x\big(x+1\big)^2} < 0 \ \text{ per } \ x > 0\,.$$
>
> Di conseguenza g è strettamente decrescente su $\big(0, +\infty\big)$ e, poiché $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 1$, risulta che $g(x) > 1$ per ogni $x > 0$.

Commenti sui punti di flesso di f .

Abbiamo visto prima che la retta $y = -\,x - 1$, che passa per il punto $(-1, 0)$, è asintoto obliquo di f per $x \to -\infty$ ed il grafico di f scende dall'infinito, resta sopra l'asintoto, ed entra in $(-\,1, 0)$ con tangente verticale. Tracciando quindi il grafico di f sul tratto $(-\infty, -1)$, diventa chiaro che all'inizio la funzione f dev'essere convessa, ma avvicinandosi a $(-1, 0)$ diventa concava. Perciò dovrebbe esistere un punto di flesso a sinistra di -1.

In questi commenti ci proponiamo di trovare tutti i punti di flesso di

f . A questo fine calcoliamo la seconda derivata di f :

$$\begin{aligned} f''(x) = {} & e^{\frac{1}{2x}}\Big(-\frac{1}{2x^2}\Big)\frac{1}{2\sqrt{x^2+x}}\cdot\frac{2x^2-1}{x} \\ & + e^{\frac{1}{2x}}\left(-\frac{2x+1}{4\sqrt{(x^2+x)^3}}\right)\cdot\frac{2x^2-1}{x} \\ & + e^{\frac{1}{2x}}\frac{1}{2\sqrt{x^2+x}}\cdot\frac{4x^2-(2x^2-1)}{x^2} \\ = {} & e^{\frac{1}{2x}}\frac{1}{4x^3\sqrt{(x^2+x)^3}}\cdot h(x)\,, \end{aligned}$$

ove

$$\begin{aligned} h(x) = {} & -(x^2+x)(2x^2-1) - x^2(2x+1)(2x^2-1) \\ & + 2x(x^2+x)(2x^2+1) \\ = {} & 2x^3+4x^2+x = x\big(2x^2+4x+1\big)\,, \end{aligned}$$

perciò

$$f''(x) = e^{\frac{1}{2x}}\frac{1}{4x^2\sqrt{(x^2+x)^3}}\big(2x^2+4x+1\big)\,.$$

I zeri del polinomio $2x^2+4x+1$ sono

$$x_{1,2} = \frac{-2\pm\sqrt{4-2\cdot 1}}{2} = -1\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\,,$$

perciò $2x^2+4x+1$ ha segno " $-$ " tra

$$-1-\frac{\sqrt{2}}{2}\approx -1,7071 \text{ e } -1+\frac{\sqrt{2}}{2}\approx -0,2929\,,$$

e " $+$ " fuori. Risulta che f è

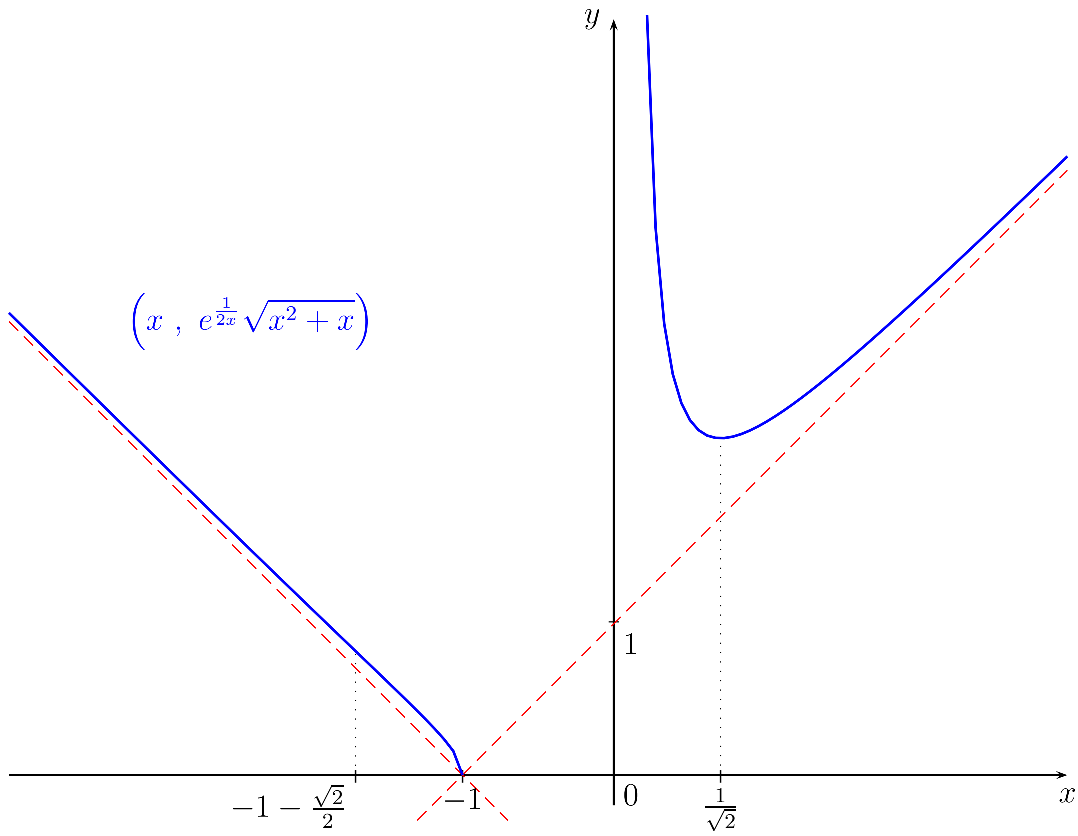
$$\text{convesso su } \Big(-\infty, -1-\frac{\sqrt{2}}{2}\Big] \text{ e su } \big(0,+\infty\big)\,,$$

e

$$\text{concavo su } \Big[-1-\frac{\sqrt{2}}{2}, -1\Big]\,,$$

avendo così un punto di flesso in $-1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Il grafico di f :



y
$\left(x\ ,\ e^{\frac{1}{2x}}\sqrt{x^2+x}\right)$
1
$-1-\frac{\sqrt{2}}{2}$
-1
0
$\frac{1}{\sqrt{2}}$
x