NOME: .... **MATRICOLA: ....**

Corso di Laurea in Fisica, A.A. 2009/2010
Calcolo 1, Esame scritto del 10.06.2010

1) Data la funzione

$$f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 3x^2 + 2x}\,,$$

a) determinare il dominio (massimale) di f ;

b) trovare tutti gli asintoti di f ;

c) trovare tutti i massimi e minimi locali di f ;

d) tracciare un grafico qualitativo di f .

2) Sia data la funzione $f(x) = \big(\ln(1+x)\big)^2 \sin(2x)$.

a) Calcolare, in $x_0 = 0$, il polinomio di Taylor di ordine 4 di f.

b) Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - 2x^3}{x^4} \ .$$

3) Studiare, al variare del parametro reale $x > 0$, la convergenza assoluta e semplice della serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln^k(x)}{2^k} .$$

Calcolare, se esiste, la somma della serie per $x = e^{-1}$.

4) Calcolare una primitiva della funzione

$$f(x) = \frac{\arctan(\sqrt{x})}{\sqrt{x}\,(\sqrt{x}-1)^3} .$$

5) Date la funzione

$$f(x,y) = \frac{x^3+y^3}{3} + y^2 - 9x$$

e la forma differenziale

$$\omega = \partial_x f \, \mathrm{d}x + \partial_y f \, \mathrm{d}y ,$$

a) trovare i massimi e minimi relativi di f;

b) calcolare l'integrale $\displaystyle\int_\gamma \omega$ dove γ è il grafico della funzione $y = \sin x$ per $x \in \big[0, \pi/2\big]$, parametrizzato da x.

Soluzioni:

1) **:** a) $f(x)$ è definito per ogni $x \in \mathbb{R}$ per quale ha senso $\sqrt[3]{x^3 - 3x^2 + 2x}$. Perciò il dominio di f è tutta la retta $\mathbb{R}$.

b) Poiché f prende valori finiti in tutti i punti della retta reale, non esiste asintoto verticale.

La prima condizione per l'esistenza di un asintoto obliquo per $x \to \pm\infty$ è l'esistenza del limite finito

$$\begin{aligned} m_\pm &= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 - 3x^2 + 2x}}{x} \\ &= \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[3]{\frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{x^3}} = 1\,. \end{aligned}$$

La seconda condizione perché esisti un asintoto obliquo per $x \to \pm\infty$, necessariamente di forma

$$y = m_\pm x + n_\pm = x + n_\pm\ ,$$

è l'esistenza del limite finito

$$n_\pm = \lim_{x\to\pm\infty} \big(f(x) - m_+ x\big) = \lim_{x\to\pm\infty} \big(f(x) - x\big)\,.$$

Verifichiamo che anche questo limite esiste :

$$\begin{aligned} n_\pm &= \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[3]{x^3 - 3x^2 + 2x} - x \\ &= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\big(\sqrt[3]{x^3 - 3x^2 + 2x}\big)^3 - x^3}{\big(\sqrt[3]{x^3 - 3x^2 + 2x}\big)^2 + x\sqrt[3]{x^3 - 3x^2 + 2x} + x^2} \\ &= \frac{-3x^2 + 2x}{x^2\left(\sqrt[3]{1 - \dfrac{3}{x} + \dfrac{2}{x^2}}\right)^2 + x^2\sqrt[3]{1 - \dfrac{3}{x} + \dfrac{2}{x^2}} + x^2} \\ &= \frac{-3}{3} = -1\,. \end{aligned}$$

Cosicché $y = x - 1$ è un asintoto obliquo di f sia per $x \to +\infty$ che per $x \to -\infty$.

c) Per trovare gli intervalli di monotonia e gli extremi locali di f, dobbiamo prima calcolare la sua derivata :

$$f'(x) = \frac{1}{3\big(\sqrt[3]{x^3-3x^2+2x}\big)^2} \cdot \big(3x^2-6x+2\big) \ .$$

Rimarchiamo che f non ha derivate finite nei zeri del polinomio

$$x^3-3x^2+2x = x(x-1)(x-2) \ ,$$

cioè nei punti $a_1 = 0\,, a_2 = 1\,, a_3 = 2\,.$ Però anche in questi punti f ha derivate infinite :

$$\begin{aligned}
f'(a_1) &= \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \sqrt[3]{\frac{(x-1)(x-2)}{x^2}} = +\infty \ , \\
f'(a_2) &= \lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \sqrt[3]{\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}} = -\infty \ , \\
f'(a_3) &= \lim_{x\to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2} \sqrt[3]{\frac{x(x-1)}{(x-2)^2}} = +\infty \ .
\end{aligned}$$

Risulta poi che i zeri di f' sono i zeri di $3x^2-6x+2$, cioè

$$x_1 = \frac{3-\sqrt{3}}{3} \approx 0,423 \in (a_1\,, a_2)\,,\ x_2 = \frac{3+\sqrt{3}}{3} \approx 1,577 \in (a_2\,, a_3) \ .$$

Inoltre, f' è > 0 in $\big(-\infty\,, x_1\big) \cup \big(x_2\,, +\infty\big)$ ed è < 0 in $\big(x_1\,, x_2\big)$, perciò f risulta ad essere

$$\begin{aligned}
&\text{strettamente crescente in } \big(-\infty\,, x_1\big]\,, \\
&\text{strettamente decrescente in } \big[x_1\,, x_2\big]\,, \\
&\text{strettamente crescente in } \big[x_2\,, +\infty\big)\,.
\end{aligned}$$

In particolare, x_1 è un punto di massimo locale e x_2 è un punto di minimo locale. Rimarchiamo che, poiché

$$\begin{aligned}
x_{1,2}^3 - 3\,x_{1,2}^2 + 2\,x_{1,2} &= x_{1,2}\big(x_{1,2}-1\big)\big(x_{1,2}-2\big) \\
&= \frac{3\mp\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\mp\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{-3\mp\sqrt{3}}{3} = \pm\frac{2\sqrt{3}}{9} \ ,
\end{aligned}$$

abbiamo

$$f(x_{1,2}) = \pm \sqrt[3]{\frac{2\sqrt{3}}{9}} = \pm \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{3}} \approx \pm 0,7275$$

Possiamo trovare gli intervalli di convessità e di concavità di f , e quindi anche i suoi punti di flesso, calcolando la seconda derivata :

$$\begin{aligned} f''(x) = & -\frac{2}{9\big(x^3-3x^2+2x\big)^{5/3}} \cdot \big(3x^2-6x+2\big)^2 \\ & \qquad\qquad + \frac{1}{3\big(\sqrt[3]{x^3-3x^2+2x}\big)^2} \cdot \big(6x-6\big) \\ = & \ \frac{-2\big(3x^2-6x+2\big)^2 + 3\big(x^3-3x^2+2x\big)\big(6x-6\big)}{9\big(x^3-3x^2+2x\big)^{2/3}} \\ = & \ \frac{2\big(-3x^2+6x-4\big)}{9\big(x^3-3x^2+2x\big)^{2/3}} \ . \end{aligned}$$

Tenendo conto che $-3x^2+6x-4 = -3\left(\big(x-1\big)^2 + \frac{1}{3}\right) < 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, deduciamo che

$$f''(x) > 0 \ \text{ per } \ x \in \big(-\infty\,,0\big) \cup \big(1\,,2\big)\,,$$
$$f''(x) < 0 \ \text{ per } \ x \in \big(0\,,1\big) \cup \big(2\,,+\infty\big)\,.$$

Di conseguenza f

è convessa in $\big(-\infty\,,0\big)$ ed in $\big(1\,,2\big)$,
è concava in $\big(0\,,1\big)$ ed in $\big(2\,,+\infty\big)$

e quindi ha punti di flesso in $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_3 = 2$.
Riportiamo il comportamento di f' e di f nella seguente tabella :

x	$-\infty$		0		x_1		1		x_2		2		$+\infty$
f'		$+$	$+\infty$	$+$	0	$-$	$-\infty$	$-$	0	$+$	$+\infty$	$+$	
f''		$+$	$*$		$-$		$*$		$+$		$*$	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\sqrt[3]{2}/\sqrt{3}$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\sqrt[3]{2}/\sqrt{3}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

d) Usando le informazioni di cui sopra, è facile tracciare il grafico di f :

$y = x - 1$ è asintoto obliquo di f per $x \to -\infty$. Il grafico di f sale da $-\infty$ fino al punto $(0\,,0)$, dove ha tangente verticale, e poi fino al massimo locale $\left(\dfrac{3-\sqrt{3}}{3}\,,\dfrac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{3}}\right)$, dove ha tangente orizzontale. Successivamente scende a $(1\,,0)$, dove ha tangente verticale, e poi fino al minimo locale $\left(\dfrac{3-\sqrt{3}}{3}\,,-\dfrac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{3}}\right)$, dove ha tangente orizzontale. Finalmente il grafico sale a $(2\,,0)$, dove ha tangente verticale, e poi a $+\infty$ lungo l'asintoto obliquo $y = x - 1$.

Rimarchiamo che il grafico di

$$f(x) = \sqrt[3]{(x-1)^3 - x + 1}$$

si trova sopra l'asintoto obliquo

$$y = x - 1 = \sqrt[3]{(x-1)^3}$$

per $-x + 1 > 0 \iff x < 1$, e sotto l'asintoto per $x > 1$.

2) : Applicando la formula di Taylor con il resto di Peano alla funzione $\ln(1+x)$ si ottiene

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \text{ per } x \to 0$$

e risulta

$$\begin{aligned}
\ln(1+x) &= \left(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)^2 \\
&= \left(x - \frac{x^2}{2}\right)^2 + 2\left(x - \frac{x^2}{2}\right)o(x^2) + o(x^2)^2 \\
&= x^2 - x^3 + \frac{x^4}{4} + o(x^3) + o(x^4) \\
&= x^2 - x^3 + o(x^3) \text{ per } x \to 0\,.
\end{aligned}$$

D'altro canto abbiamo

$$\sin(2x) = 2x + o(x^2) \text{ per } x \to 0$$

e quindi

$$f(x) = \big(\ln(1+x)\big)^2 \sin(2x)\Big(x^2 - x^3 + o(x^3)\Big)\Big(2x + o(x^2)\Big)$$

$$= 2x^3 - 2x^4 + \Big(x^2 - x^3\Big) o(x^2) + 2x\, o(x^3) + o(x^3)\, o(x^2)$$
$$= 2x^3 - 2x^4 + o(x^4) \ \text{ per } \ x \to 0\ .$$

Cosicché il polinomio di Taylor di ordine 4 di f in $x_o = 0$ è

$$2x^3 - 2x^4$$

ed il limite di

$$\frac{f(x) - 2x^3}{x^4} = \frac{-2x^4 + o(x^4)}{x^4} = -2 + \frac{o(x^4)}{x^4}$$

per $x \to 0$ è -2 .

3) : La serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln^k(x)}{2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\ln(x)}{2}\right)^k$$

è una serie geometrica che certamente non converge per

$$\left|\frac{\ln(x)}{2}\right| \geq 1 \iff \big|\ln(x)\big| \geq 2 \iff 0 < x \leq \frac{1}{e^2} \text{ oppure } x \geq e^2$$

perché

$$\lim_{k\to\infty} \left|\frac{\ln(x)}{2}\right|^k = \begin{cases} 1 & \text{se } x = \dfrac{1}{e^2}\,,\, e^2 \\ +\infty & \text{se } 0 < x < \dfrac{1}{e^2} \text{ oppure } x > e^2 \end{cases} \neq 0\ .$$

Per

$$\left|\frac{\ln(x)}{2}\right| < 1 \iff \big|\ln(x)\big| < 2 \iff \frac{1}{e^2} < x < e^2$$

invece la serie converge assolutamente ed usando la formula

$$\sum_{k=1}^{\infty} q^k = \frac{q}{1-q}\,, \qquad q \in \mathbb{R}\,,\ |q| < 1$$

possiamo anche calcolare la sua somma :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln^k(x)}{2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\ln(x)}{2}\right)^k = \frac{\dfrac{\ln(x)}{2}}{1 - \dfrac{\ln(x)}{2}} = \frac{\ln(x)}{2 - \ln(x)}\ .$$

In particolare, per $x = e^{-1}$ abbiamo

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln^k(e^{-1})}{2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^k = \frac{-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} = -\frac{1}{3}\,.$$

4) **:** Tramite la sostituzione

$$t = \sqrt{x}\,, \qquad \mathrm{d}t = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$$

possiamo eliminare la radice quadrata nella funzione da integrare :

$$\int \frac{\arctan(\sqrt{x})}{\sqrt{x}\,(\sqrt{x}-1)^3}\,\mathrm{d}x = 2\int \frac{\arctan(t)}{(t-1)^3}\,\mathrm{d}t\,.$$

Usando ora integrazione per parti si ottiene

$$\begin{aligned} 2\int \frac{\arctan(t)}{(t-1)^3}\,\mathrm{d}t &= -\int \arctan(t)\,\mathrm{d}\frac{1}{(t-1)^2} \\ &= -\frac{\arctan(t)}{(t-1)^2} + \int \frac{1}{(t-1)^2(1+t^2)}\,\mathrm{d}t\,. \end{aligned}$$

Lo sviluppo di $\dfrac{1}{(t-1)^2(1+t^2)}$ in fratti semplici è dalla forma

$$\frac{1}{(t-1)^2(1+t^2)} = \frac{a}{t-1} + \frac{b}{(t-1)^2} + \frac{ct+d}{1+t^2}$$

ed allora

$$1 = a(t-1)(1+t^2) + b(1+t^2) + (ct+d)(t-1)^2\,.$$

Risultano

$$a = -\frac{1}{2}\,, \quad b = \frac{1}{2}\,, \quad ct+d = \frac{t}{2}$$

e di conseguenza

$$\begin{aligned} &\int \frac{\arctan(\sqrt{x})}{\sqrt{x}\,(\sqrt{x}-1)^3}\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{\arctan(t)}{(t-1)^2} + \int \frac{1}{(t-1)^2(1+t^2)}\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{\arctan(t)}{(t-1)^2} - \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{t-1} + \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{(t-1)^2} + \frac{1}{2}\int \frac{t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= -\frac{\arctan(t)}{(t-1)^2} - \frac{1}{2}\ln|t-1| - \frac{1}{2\,(t-1)} + \frac{1}{4}\ln(1+t^2) + C \\
&= -\frac{\arctan(t)}{(t-1)^2} + \frac{1}{4}\ln\frac{1+t^2}{(t-1)^2} - \frac{1}{2\,(t-1)} + C \\
&= -\frac{\arctan(\sqrt{x}\,)}{(1-\sqrt{x}\,)^2} + \frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{(1-\sqrt{x}\,)^2} + \frac{1}{2\,(1-\sqrt{x}\,)} + C\,.
\end{aligned}
$$

5) : a) I massimi e minimi relativi di f sono *punti stazionari*, cioè annullano le derivate parziali di

$$
f(x,y) = \frac{x^3+y^3}{3} + y^2 - 9x\,.
$$

Per trovarli, calcoliamo le derivate parziali di f :

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= x^2 - 9\,, \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= y^2 + 2\,y\,.
\end{aligned}
$$

Risulta che i punti stazionari di f sono le soluzioni del sistema di equazioni

$$
\left\{ \begin{array}{ll} x^2 - 9 & = 0 \\ y^2 + 2\,y & = 0 \end{array} \right. ,
$$

cioè i punti

$$
(3\,,0)\,,\quad (-3\,,0)\,,\quad (3\,,-2)\,,\quad (-3\,,-2)\,.
$$

Per poter dire se jun punto stazionario è massimo o minimo relativo, calcoliamo anche le derivate parziali di secondo ordine :

$$
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2\,x\,,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0\,,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2\,y + 2\,.
$$

Perciò la matrice hessiana di f in $(x\,,y)$ è

$$
\begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 2\,y+2 \end{pmatrix}
$$

con determinante

$$\begin{vmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 2y+2 \end{vmatrix} = 4x(y+1)\,.$$

Ora, poiché il determinante della matrice hessiana in $(-3\,,0)$ e $(3\,,-2)$ è strettamente negativa, questi punti sono punti di sella.

D'altro canto, il determinante della matrice hessiana in $(3\,,0)$ e $(-3\,,-2)$ è strettamente positiva. Perciò questi punti sono punti di estremo relativo. Poiché l'elemento nell'angolo sinistro superiore della matrice hessiana in $(3\,,0)$ è >0, il punto $(3\,,0)$ è un punto di minimo relativo. Similmente si verifica che $(3\,,-2)$ è un punto di massimo relativo.

b) Poiché ω è una forma differenziale esatta su $\mathbb{R}^2$ ed f è una sua primitiva, per ogni curva regolare a tratti in $\mathbb{R}^2$

$$[a\,,b] \ni t \longmapsto \gamma(t) \in \mathbb{R}^2$$

abbiamo

$$\int_\gamma \omega = f\Big(\gamma(b)\Big) - f\Big(\gamma(a)\Big)\,.$$

In particolare, se γ è il grafico della funzione $y = \sin x$ per $x \in \big[0, \pi/2\big]$, allora

$$\int_\gamma \omega = f\left(\frac{\pi}{2}\,,1\right) - f\big(0\,,0\big) = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi^3}{8}+1\right) + 1 - \frac{9\,\pi}{2}$$
$$= \frac{\pi^3}{24} - \frac{9\,\pi}{2} + \frac{4}{3}\,.$$