NOME: .... **MATRICOLA: ....**

Corso di Laurea in Matematica, A.A. 2007/2008
Analisi Matematica 2, Esame scritto del 10.07.2008

1) Determinare gli intervalli in cui la funzione $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definita tramite la formula

$$f(x) = \sqrt{\operatorname{arctg}(x^2)}$$

è uniformamente continua e quelli in cui è lipschitziana.

2) Dire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ la seguente serie converge:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\log\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \right]^{\alpha} .$$

3) Determinare una primitiva della funzione

$$f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^3 - 1} \, .$$

4) Calcolare l'area della regione piana compresa fra l'arco di parabola

$$y = 1 - x^2 \, , \quad -1 \leq x \leq 1$$

e la semicirconferenza

$$x^2 + y^2 = 1 \, , \quad y \geq 0 \, .$$

5) Determinare i valori del parametro reale α per cui il seguente integrale improprio converge :

$$\int_1^2 \frac{1}{(\log x)^\alpha} \, \mathrm{d}x \, .$$

Soluzioni:

1) **:** f è derivabile e la sua derivata

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\operatorname{arctg}(x^2)}} \cdot \frac{1}{1+x^4} \cdot 2x = \sqrt{\frac{x^2}{\operatorname{arctg}(x^2)}} \cdot \frac{1}{1+x^4}$$

è limitata sull'intero dominio $(0,+\infty)$ di f. Infatti, esistono i limiti finiti

$$\begin{aligned} \lim_{0<x\to 0} f'(x) &\overset{t=\operatorname{arctg}(x^2)}{=} \lim_{t\to 0} \sqrt{\frac{\operatorname{tg} t}{t}} \cdot \frac{1}{1+(\operatorname{tg} t)^2} = 1\,, \\ \lim_{x\to+\infty} f'(x) &= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{\operatorname{arctg}(x^2)}} \cdot \frac{x}{1+x^4} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot 0 = 0\,. \end{aligned}$$

Risulta che f è lipschitziana, ed in particolare uniformamente continua, in tutto il suo dominio.

2) **:** Poiché

$$\lim_{0<u\to 0} \frac{\log(1+u)}{u} = 1 \quad \text{e così} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\log\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = 1\,,$$

per il criterio del confronto la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\log\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right]^{\alpha}$$

converge esattamente quando converge la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(\sqrt{n}\right)^{\alpha}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha/2}}\,,$$

cioè per

$$\alpha/2 > 1 \iff \alpha > 2\,.$$

3) : Per determinare una primitiva della funzione

$$\frac{x^3+1}{x^3-1} = 1 + 2\,\frac{1}{x^3-1}$$

usiamo lo sviluppo di $\dfrac{1}{x^3-1}$ in fratti semplici :

La decomposizione del polinomio con coefficienti reali x^3-1 in fattori irriducili è $x^3-1=(x-1)\,(x^2+x+1)$. Perciò

$$\frac{1}{x^3-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B\,x+C}{x^2+x+1}\,,$$

cioè

$$1 = A\,(x^2+x+1) + (B\,x+C)\,(x-1)$$

per opportune costanti reali A, B, C. Per $x=1$ otteniamo

$$1 = 3\,A\,,\ \text{ossia } A = \frac{1}{3}\,.$$

Di conseguenza

$$\begin{aligned}(B\,x+C)\,(x-1) &= 1 - \frac{1}{3}\,(x^2+x+1) = \frac{1}{3}\,(-x^2-x+2)\\ &= \frac{1}{3}\,(x-1)(-x-2)\end{aligned}$$

e risulta

$$B\,x+C = \frac{1}{3}\,(-x-2)\,,\ \text{cioè } B = -\frac{1}{3}\,,\ C = -\frac{2}{3}\,.$$

Concludiamo che

$$\frac{1}{x^3-1} = \frac{1}{3}\,\frac{1}{x-1} - \frac{1}{3}\,\frac{x+2}{x^2+x+1}\,.$$

Risulta :

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3+1}{x^3-1}\,\mathrm{d}x &= x + 2\int \frac{1}{x^3-1}\,\mathrm{d}x\\ &= x + \frac{2}{3}\log|x-1| - \frac{2}{3}\int \frac{x+2}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x\,.\end{aligned}$$

Per integrare $\dfrac{x+2}{x^2+x+1}$, mettiamo in evidenza nel numeratore la derivata $2x+1$ del denominatore :

$$\frac{x+2}{x^2+x+1} = \frac{1}{2}\,\frac{2x+4}{x^2+x+1} = \frac{1}{2}\,\frac{2x+1}{x^2+x+1} + \frac{3}{2}\,\frac{1}{x^2+x+1}$$

Risulta che

$$\int \frac{x+2}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\log(x^2+x+1) + \frac{3}{2}\int \frac{1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x$$

e quindi

$$\int \frac{x^3+1}{x^3-1}\,\mathrm{d}x = x + \frac{2}{3}\log|x-1| - \frac{1}{3}\log(x^2+x+1) - \int \frac{1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x\,.$$

Ora, per integrare $\dfrac{1}{x^2+x+1}$, scriviamo il denominatore come un moltiplo scalare della somma di 1 con il quadrato di un polinomio di grado 1 :

$$x^2+x+1 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4}\left(\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\,x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1\right)$$

Risulta che

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x &= \frac{4}{3}\int \frac{1}{1+\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\,x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}\int \frac{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\,x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)'}{1+\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\,x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C\end{aligned}$$

e così

$$\begin{aligned}&\int \frac{x^3+1}{x^3-1}\,\mathrm{d}x \\ &= x + \frac{2}{3}\log|x-1| - \frac{1}{3}\log(x^2+x+1) - \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C\,.\end{aligned}$$

4) **:** Anzitutto osserviamo che

$$0 \le 1 - x^2 \le \sqrt{1-x^2}\,, \qquad -1 \le x \le 1\,,$$

quindi la regione compresa fra l'arco di parabola

$$y = 1 - x^2\,,\ -1 \le x \le 1$$

e l'asse delle x <u>è contenuta</u> nella regione compresa fra la semicirconferenza

$$y = \sqrt{1-x^2}\,,\ -1 \le x \le 1$$

e l'asse delle x. Così l'area tra le due archi è la differenza

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x - \int_{-1}^{1} \big(1-x^2\big)\,\mathrm{d}x\,.$$

Il primo integrale lo calcoliamo usando la sostituzione $t = \arcsin x$, cioè $x = \sin t$:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1-(\sin t)^2}\cdot\cos t\,\mathrm{d}t = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos t)^2\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1+\cos(2\,t)}{2}\,\mathrm{d}t = \left(\frac{t}{2} + \frac{\sin(2\,t)}{4}\right)\Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2} \\
&= \frac{\pi}{2}\,.
\end{aligned}$$

Il secondo integrale è facile da calcolare :

$$\int_{-1}^{1} \big(1-x^2\big)\,\mathrm{d}x = \left(x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{1} = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}\,.$$

Concludiamo che l'area tra l'arco di parabola $y = 1 - x^2$, $-1 \le x \le 1$, e la semicirconferenza unità superiore è uguale a

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{3} = \frac{3\,\pi - 8}{6}\,.$$

5) **:** L'integrale

$$\int_1^2 \frac{1}{(\log x)^\alpha}\,\mathrm{d}x$$

può essere improprio (dipendente dal valore di α) in 1.

Per stabilire i casi di convergenza, ci serve l'equivalenza asintotica di $\log x$ e $x-1$ per $x \to 1$:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\log x}{x-1} \overset{u=x-1}{=} \lim_{u\to 0} \frac{\log(1+u)}{u} = 1\,.$$

Risulta che le funzioni

$$\frac{1}{(\log x)^\alpha}\,, \quad \frac{1}{(x-1)^\alpha}$$

sono asintoticamente equivalenti per $x \to 1$ e perciò

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{1}{(\log x)^\alpha}\,\mathrm{d}x \text{ converge } &\Longleftrightarrow \int_1^2 \frac{1}{(x-1)^\alpha}\,\mathrm{d}x \text{ converge} \\ &\Longleftrightarrow \int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \text{ converge} \\ &\Longleftrightarrow \alpha < 1\,. \end{aligned}$$