**NOME:** ................. **MATRICOLA:** .................

Corso di Laurea in Matematica, A.A. 2013/2014
Analisi Reale e Complessa, Esame del 12.02.2014

1) (i) Sia $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0\,,+\infty)$ una funzione misurabile che non è costante quasi ovunque. Si dimostri che esiste una costante $c > 0$ tale che

$$\big|f^{-1}\big((-\infty\,,c)\big)\big| > 0\,, \quad \big|f^{-1}\big((c\,,+\infty)\big)\big| > 0\,.$$

(**Suggerimento:** Si consideri

$$c_o := \sup\big\{c \in \mathbb{R}\,;\, \big|f^{-1}\big((-\infty\,,c)\big)\big| = 0\big\}$$

e si esamini $\big|f^{-1}\big((c\,,+\infty)\big)\big|$ per $c > c_o$ .)

(ii) $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione misurabile che non è costante quasi ovunque. Si dimostri che esiste una costante $c \in \mathbb{R}$ tale che

$$\big|f^{-1}\big((-\infty\,,c)\big)\big| > 0\,, \quad \big|f^{-1}\big((c\,,+\infty)\big)\big| > 0\,.$$

2) (a) Si verifichi che la formula

$$F(s) := \int\limits_0^{+\infty} e^{i x^2} e^{-s x}\,\mathrm{d}x\,, \qquad s \in (0\,,+\infty)$$

definisce una funzione derivabile $F : (0\,,+\infty) \longrightarrow \mathbb{C}$ .

(b) Si esprima la derivata $F'(s)$ mediante un integrale dipendente dal parametro $s$ .

(c) Si verifichi che $F$ soddisfa l'equazione differenziale

$$F'(s) - \frac{i\,s}{2}\,F(s) = -\,\frac{i}{2}\,.$$

(d) Esiste il limite finito $\lim\limits_{0<s\to 0} F(s)$ ?

3) (a) Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ un aperto e sia $\overline{\Omega}$ la sua immagine per coniungio in $\mathbb{C}$. Sia $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ una funzione olomorfa e sia $g : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{C}$ la funzione definita da

$$g(z) := \overline{f(\overline{z})}\,.$$

Dimostrare che $g$ è olomorfa.

(b) Sia $\Omega := \{z \in \mathbb{C} :\ \Im m(z) > -1\}$ e sia $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ una funzione olomorfa tale che $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$. Mostrare che $f$ si estende ad una funzione olomorfa su $\mathbb{C}$.

(c) Sia $\overline{\mathbb{H}} := \{z \in \mathbb{C}\,; \Im m(z) \geq 0\}$ e $h : \overline{\mathbb{H}} \longrightarrow \mathbb{C}$ una funzione continua su $\overline{\mathbb{H}}$, olomorfa su $\overline{\mathbb{H}} \setminus \mathbb{R}$ e tale che $h(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$. Mostrare che $h$ si estende ad una funzione olomorfa su $\mathbb{C}$.

**Suggerimento:** Mostrare che se $\tilde{h} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ è una funzione continua su $\mathbb{C}$ e olomorfa su $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ allora l'integrale di linea di $\tilde{h}(z)\mathrm{d}z$ lungo il bordo di ogni rettangolo è nullo.

4) (A) Calcolare

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{(2e^{ix} - 1)^3(e^{ix} - 2)}\,\mathrm{d}x$$

usando il teorema dei residui.

(B) Trovare il minimo $r \in \mathbb{R}_+$ tale che valga

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{(2\rho e^{ix} - 1)^3(\rho e^{ix} - 2)}\,\mathrm{d}x = 0$$

per ogni $\rho > r$.

**Soluzioni:**

**1) :** (i) Eliminiamo prima i "cattivi" $c \in \mathbb{R}$ per quali $\big| f^{-1}\big((-\infty\,,c)\big)\big| = 0$. Tali $c$ esistono: poiché $f \geq 0$, abbiamo

$$c < 0 \Longrightarrow \big| f^{-1}\big((-\infty\,,c)\big)\big| = \big|\,\emptyset\,\big| = 0\,,$$

quindi

$$(-\infty\,,0) \subset \big\{ c \in \mathbb{R}\,;\big| f^{-1}\big((-\infty\,,c)\big)\big| = 0 \big\}\,.$$

Consideriamo

$$c_o := \inf \big\{ c \in \mathbb{R}\,;\big| f^{-1}\big((-\infty\,,c)\big)\big| = 0 \big\} \in [\,0\,,+\infty\,]\,.$$

Mostriamo che $c_o < +\infty$ :

Supponiamo che fosse $c_o = +\infty$. Allora per ogni $c \in \mathbb{R}$ esiste un $c' > c$ con $\big| f^{-1}\big((-\infty\,,c')\big)\big| = 0$, quindi possiamo scegliere una successione crescente $\big(c_k\big)_{k \geq 1}$ di numeri reali con

$$\big| f^{-1}\big((-\infty\,,c_k)\big)\big| = 0 \text{ per ogni } k \geq 1 \text{ e } c_k \longrightarrow +\infty\,.$$

Per la proprietà di continuità crescente della misura di Lebesgue risulta l'ugualità

$$\begin{aligned} \big|\,\mathbb{R}\,\big| = \big| f^{-1}\big((-\infty\,,+\infty)\big| &= \Big| f^{-1}\Big( \bigcup_{k \geq 1} (-\infty\,,c_k) \Big)\Big| \\ &= \lim_{k \to \infty} \big| f^{-1}\big((-\infty\,,c_k)\big)\big| = 0\,, \end{aligned}$$

che ovviamente non è vera.

Ora sappiamo che esistono numeri reali $c$ con $c > c_o$. Per ogni $c > c_o$ abbiamo $\big| f^{-1}\big((-\infty\,,c)\big)\big| > 0$ e per finire la dimostrazione ci chiediamo se esiste tra questi $c$ uno con $\big| f^{-1}\big((c\,,+\infty)\big)\big| > 0$. Mostriamo che è così :

Supponiamo che avessimo $\big| f^{-1}\big((c\,,+\infty)\big)\big| = 0$ per ogni $c > c_o$. Allora abbiamo, pure secondo la proprietà di continuità crescente della misura di Lebesgue,

$$\begin{aligned} \big| f^{-1}\big((c_o\,,+\infty)\big)\big| &= \Big| f^{-1}\Big( \bigcup_{k \geq 1} \big(c_o + 1/k\,,+\infty\big) \Big)\Big| \\ &= \lim_{k \to \infty} \big| f^{-1}\big(\big(c_o + 1/k\,,+\infty\big)\big)\big| = 0\,. \end{aligned}$$

Ma d'altro canto vale anche $\left|f^{-1}\big((-\infty\,,c_o)\big)\right| = 0$. Infatti, per la definizione di $c_o$ esiste una successione crescente $\big(c_k\big)_{k\geq 1}$ di numeri reali con

$$\left|f^{-1}\big((-\infty\,,c_k)\big)\right| = 0 \text{ per ogni } k \geq 1 \text{ e } c_k \longrightarrow c_o\,.$$

Usando per la terza volta la proprietà di continuità crescente della misura di Lebesgue, otteniamo

$$\begin{aligned}\left|f^{-1}\big((-\infty\,,c_o)\big)\right| &= \left|f^{-1}\Big(\bigcup_{k\geq 1}(-\infty\,,c_k)\Big)\right| \\ &= \lim_{k\to\infty}\left|f^{-1}\big((-\infty\,,c_k)\big)\right| = 0\,,\end{aligned}$$

Risulta

$$\begin{aligned}\left|\big\{x\in\mathbb{R}^n\,;f(x)\neq c_o\big\}\right| &= \Big|f^{-1}\big((-\infty\,,c_k)\cup(c_o\,,+\infty)\big)\Big| \\ &= \Big|f^{-1}\big((-\infty\,,c_k)\big)\cup f^{-1}\big((c_o\,,+\infty)\big)\Big| \\ &= \Big|f^{-1}\big((-\infty\,,c_k)\big)\Big| + \Big|f^{-1}\big((c_o\,,+\infty)\big)\Big| \\ &= 0\,,\end{aligned}$$

cioè che $f(x)$ è quasi ovunque uguale a $c_o$ è escluso per l'ipotesi su $f$.

Concludiamo che esiste un $c > c_o \geq 0$ per quale $\left|f^{-1}\big((c\,,+\infty)\big)\right| > 0$. Ma poiché $c > c_o$, vale anche $\left|f^{-1}\big((-\infty\,,c)\big)\right| > 0$.

(ii) Siano $f_+$ e $f_-$ la parte positiva rispettivamente negativa di $f$:

$$f_+(x) = \max\big(f(x)\,,0\big)\,,\ f_-(x) = \max\big(-\,f(x)\,,0\big)\,,\qquad x\in\mathbb{R}^n\,.$$

Allora $f_+$ e $f_-$ sono funzioni positive misurabili e, poiché $f = f_+ - f_-$, (almeno) una di loro non è costante quasi ovunque.

Supponiamo che $f_+$ non è costante quasi ovunque. Per come abbiamo visto in (i), esiste un $c > 0$ tale che

$$\left|f_+^{-1}\big((-\infty\,,c)\big)\right| > 0\,,\quad \left|f_+^{-1}\big((c\,,+\infty)\big)\right| > 0\,.$$

Ma per ogni $c' > 0$ abbiamo

$$f_+^{-1}\big((-\infty\,,c')\big) = f^{-1}\big((-\infty\,,c')\big) \text{ e } f_+^{-1}\big((c'\,,+\infty)\big) = f^{-1}\big((c'\,,+\infty)\big)\,,$$

perciò concludiamo che

$$\big|f^{-1}\big((-\infty\,,c)\big)\big|>0\,,\quad \big|f^{-1}\big((c\,,+\infty)\big)\big|>0\,.$$

Similmente ragioniamo anche nel caso quando $f_-$ non è costante quasi ovunque.

2) **:** (a) e (b) Le funzioni

$$\big[0\,,+\infty\big)\ni x\longmapsto e^{ix^2}e^{-sx}\in\mathbb{C}\,,\qquad s\in\big(0\,,+\infty\big)$$

sono continue, quindi misurabili, e poiché

$$\int\limits_0^{+\infty}|e^{ix^2}e^{-sx}|\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^{+\infty}e^{-sx}\mathrm{d}x=-\,\frac{1}{s}\,e^{-sx}\Bigg|_{x=0}^{x=+\infty}=\frac{1}{s}<+\infty\,,$$

sono addirittura sommabili. Di conseguenza la funzione

$$F:(0\,,+\infty)\ni s\longmapsto\int\limits_0^{+\infty}e^{ix^2}e^{-sx}\,\mathrm{d}x\in\mathbb{C}$$

è ben definita.

Per la derivabilità di $F$ e la possibilità di derivare sotto il segno di integrale è sufficiente mostrare che, per ogni $\delta>0$, la restrizione di $F$ a $(\delta\,,+\infty)$, cioè la funzione

$$(\,\delta\,,+\infty)\ni s\longmapsto F(s)=\int\limits_0^{+\infty}e^{ix^2}e^{-sx}\,\mathrm{d}x\in\mathbb{C}\,,$$

è derivabile e che possiamo derivare sotto il segno di integrale. Ma le funzioni

$$(\,\delta\,,+\infty)\ni s\longmapsto e^{ix^2}e^{-sx}\in\mathbb{C}\,,\qquad x\in\big[0\,,+\infty\big)$$

sono derivabili e le derivate parziali

$$\frac{\partial}{\partial s}\big(e^{ix^2}e^{-sx}\big)=-\,x\,e^{ix^2}e^{-sx}$$

ammettono la magggiorazione uniforme

$$\left|\frac{\partial}{\partial s}\big(e^{ix^2}e^{-sx}\big)\right|\leq x\,e^{-\delta x}\,,\qquad x\in\big[0\,,+\infty\big)\,,s\in(\,\delta\,,+\infty)$$

dove la funzione

$$\big[0\,,+\infty\big) \ni x \longmapsto x\,e^{-\delta x}$$

è sommabile, perciò il teorema sulla dipendenza derivabile da parametri reali implica la derivabilità di $F$ in $(\delta\,,+\infty)$ e la validità della formula

$$F'(s) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial s}\big(e^{ix^2}e^{-sx}\big)\mathrm{d}x = -\int\limits_0^{+\infty} x\,e^{ix^2}e^{-sx}\mathrm{d}x\,, \qquad s \in (\delta\,,+\infty)\,.$$

(c) Usando che

$$F(s) = \int\limits_0^{+\infty} e^{ix^2}e^{-sx}\mathrm{d}x\,, F'(s) = -\int\limits_0^{+\infty} x\,e^{ix^2}e^{-sx}\mathrm{d}x\,, \qquad s \in (0\,,+\infty)\,,$$

otteniamo per ogni $s \in (0\,,+\infty)$ :

$$\begin{aligned}
F'(s) - \frac{i\,s}{2}\,F(s) &= \int\limits_0^{+\infty}\bigg(-\,x\,e^{ix^2}e^{-sx} - \frac{i\,s}{2}\,e^{ix^2}e^{-sx}\bigg)\mathrm{d}x \\
&= \int\limits_0^{+\infty}\bigg(-\,x - \frac{i\,s}{2}\bigg)e^{ix^2-sx}\mathrm{d}x \\
&= \frac{i}{2}\int\limits_0^{+\infty}\big(2\,i\,x - s\big)e^{ix^2-sx}\mathrm{d}x \\
&= \frac{i}{2}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(e^{ix^2-sx}\big)\mathrm{d}x = \frac{i}{2}\,e^{ix^2-sx}\bigg|_{x=0}^{x=+\infty} \\
&= -\frac{i}{2}\,.
\end{aligned}$$

(d) È ben noto che l'equazione differenziale lineare del primo ordine

$$y'(s) - \frac{i\,s}{2}\,y(s) = -\frac{i}{2} \tag{1}$$

ha una soluzione, definita su tutto $\mathbb{R}$, che soddisfa (per esempio) la condizione iniziale

$$y(1) = F(1)\,.$$

Ma secondo (c) la funzione $F : (0\,,+\infty) \longrightarrow \mathbb{C}$ soddisfa la stessa equazione differenziale, quindi $(y-F)(s)$ è una soluzione dell'equzione differenziale lineare omogenea

$$z'(s) - \frac{i\,s}{2}\,z(s) = 0 \tag{2}$$

soddisfacente la condizione iniziale

$$z(0) = 0\,.$$

Dall'unicità della soluzione risulta che $(y-F)(s) = 0 \iff y(s) = F(s)$ per ogni $s \in (0\,,+\infty)$ e concludiamo che esiste finito il limite

$$\lim_{0<s\to 0} F(s) = \lim_{0<s\to 0} y(s) = y(0)\,.$$

Rimarchiamo che per dimostrare l'esistenza del limite $\lim\limits_{0<s\to 0} F(s)$ non possiamo usare il teorema della convergenza dominata perché se $g : \big[0\,,+\infty\big) \longrightarrow \big[0\,,+\infty\big)$ fosse una funzione tale che, per un $\varepsilon > 0$,

$$|e^{i\,x^2}e^{-s\,x}| \leq g(x)\,, \qquad x \in \big[0\,,+\infty\big)\,, s \in \big[0\,,\varepsilon\big)\,,$$

allora risulterebbe (con $s = 0$) $1 \leq g(x)$ per ogni $x \in \big[0\,,+\infty\big)$, quindi $g$ non può essere sommabile.

## Osservazione 1.

L'equazione (1) si può risolvere esplicitamente ed usando la soluzione esplicita possiamo ottenere informazioni sul limite $\lim\limits_{0<s\to 0} F(s)$.

La soluzione generale dell'equazione omogenea (2) è

$$z(s) = c\,\exp\bigg(\int \frac{i\,s}{2}\,\mathrm{d}s\bigg) = c\,\exp\bigg(\frac{i\,s^2}{4}\bigg)$$

dove $c$ è una costante arbitraria. Con il metodo della variazione delle costanti si trova anche la soluzione particolare di (1) (quella che in $s = 0$ si annulla)

$$y_p(s) = -\,\frac{i}{2}\,\exp\bigg(\frac{i\,s^2}{4}\bigg)\int_0^s \exp\bigg(-\,\frac{i\,\sigma^2}{4}\bigg)\mathrm{d}\sigma\,.$$

Perciò la soluzione generale di (1) è

$$y(s) = z(s) + y_p(s) = \exp\left(\frac{i\,s^2}{4}\right)\left(c - \frac{i}{2}\int_0^s \exp\left(-\,\frac{i\,\sigma^2}{4}\right)\mathrm{d}\sigma\right)$$

con $c$ una costante. Rimarchiamo che $y(0) = c$.

Scegliamo ora $c$ tale che valga

$$y(s) = F(s)\,, \qquad s \in (0\,,+\infty)$$

(scegliando $c$, per esempio, tale che $y(1)$ sia uguale a $F(1)$). Allora

$$\lim_{0<s\to 0} F(s) = y(0) = c\,.$$

Per ogni $s > 0$ abbiamo

$$\begin{aligned}
\left| c - \frac{i}{2}\int_0^s \exp\left(-\,\frac{i\,\sigma^2}{4}\right)\mathrm{d}\sigma\right| &= \big|y(s)\big| \\
&= \big|F(s)\big| = \left|\int_0^{+\infty} e^{i\,x^2} e^{-\,s\,x}\,\mathrm{d}x\right| \\
&\leq \int_0^{+\infty} \left|e^{i\,x^2} e^{-\,s\,x}\right|\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} e^{-\,s\,x}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{e^{-\,s\,x}}{-\,s}\Bigg|_{x=0}^{x=+\infty} = \frac{1}{s}\,,
\end{aligned}$$

perciò

$$\lim_{s\to+\infty}\left| c - \frac{i}{2}\int_0^s \exp\left(-\,\frac{i\,\sigma^2}{4}\right)\mathrm{d}\sigma\right| = 0\,,$$

cioè

$$c = \lim_{s\to+\infty} \frac{i}{2}\int_0^s \exp\left(-\,\frac{i\,\sigma^2}{4}\right)\mathrm{d}\sigma\,.$$

Poiché

$$\frac{1}{2}\int_0^s \exp\left(-\,\frac{i\,\sigma^2}{4}\right)\mathrm{d}\sigma \overset{\sigma=2t}{=} \int_0^{s/2} e^{-it^2}\mathrm{d}t\,,$$

risulta che l'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} e^{-is^2} \mathrm{d}s = \lim_{s \to +\infty} \int_0^{s/2} e^{-it^2} \mathrm{d}t$$

converge (ma non assolutamente!) e

$$\lim_{0<s\to 0} F(s) = c = i \int_0^{+\infty} e^{-is^2} \mathrm{d}s = \int_0^{+\infty} \sin\!\big(s^2\big) \mathrm{d}s + i \int_0^{+\infty} \cos\!\big(s^2\big) \mathrm{d}s \,.$$

## Osservazione 2.

Secondo l'Osservazione 1 converge anche l'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} e^{ix^2} \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \cos\!\big(x^2\big) \mathrm{d}x + i \int_0^{+\infty} \sin\!\big(x^2\big) \mathrm{d}x = i\,\overline{c}\,.$$

La definizione di $F$ suggeriva però l'ugualità di $\lim\limits_{0<s\to 0} F(s)$ all'integrale improprio di cui sopra, cioè a $i\,\overline{c}$, e non a

$$c = i \int_0^{+\infty} e^{-is^2} \mathrm{d}s \,.$$

Tramite stime dirette verificheremo qui che è proprio così, quindi vale

$$i\,\overline{c} = c \iff \int_0^{+\infty} \cos\!\big(x^2\big) \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \sin\!\big(x^2\big) \mathrm{d}x \,.$$

**Riduzione.** È sufficiente verificare che per un $a > 0$, e per ragioni di opportunità sceglieremo $a = \sqrt{2\pi}$, vale

$$\lim_{0<s\to 0} \int_a^{+\infty} e^{ix^2} e^{-sx} \,\mathrm{d}x = \int_a^{+\infty} e^{ix^2} \mathrm{d}x \,. \tag{3}$$

Infatti, poiché

$$\big| e^{ix^2} e^{-sx} \big| \leq 1 \,, \qquad x \in \big[\,0\,,a\big]\,, s \in \big[\,0\,,+\infty\big)$$

e la funzione costante 1 è sommabile su $\big[\,0\,,a\big]$, usando il teorema della convergenza dominata per parametro reale deduciamo

$$\lim_{0<s\to 0}\int\limits_0^a e^{ix^2}e^{-sx}\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^a e^{ix^2}\mathrm{d}x\,.$$

Ammesso che valesse (3) risulta

$$\lim_{0<s\to 0}\int\limits_0^{+\infty} e^{ix^2}e^{-sx}\,\mathrm{d}x=\lim_{0<s\to 0}\int\limits_0^a e^{ix^2}e^{-sx}\,\mathrm{d}x+\lim_{0<s\to 0}\int\limits_a^{+\infty} e^{ix^2}e^{-sx}\,\mathrm{d}x$$

$$=\int\limits_0^a e^{ix^2}\mathrm{d}x+\int\limits_a^{+\infty} e^{ix^2}\mathrm{d}x=\int\limits_0^{+\infty} e^{ix^2}\mathrm{d}x\,.$$

**Stime.** Per ogni $b>\sqrt{2\pi}$ abbiamo

$$\int\limits_{\sqrt{2\pi}}^b e^{ix^2}\mathrm{d}x-\int\limits_{\sqrt{2\pi}}^b e^{ix^2}e^{-sx}\,\mathrm{d}x$$

$$=\int\limits_{\sqrt{2\pi}}^b e^{ix^2}\big(1-e^{-sx}\big)\mathrm{d}x\overset{t=x^2}{=}\int\limits_{2\pi}^{b^2}\frac{e^{it}}{2\sqrt{t}}\Big(1-e^{-s\sqrt{t}}\Big)\mathrm{d}t$$

$$=\int\limits_{2\pi}^{b^2}\frac{1}{2\sqrt{t}}\Big(1-e^{-s\sqrt{t}}\Big)\mathrm{d}\frac{e^{it}}{i}$$

$$=\frac{e^{it}}{2\sqrt{t}\,i}\Big(1-e^{-s\sqrt{t}}\Big)\bigg|_{x=2\pi}^{x=b^2}$$

$$-\int\limits_{2\pi}^{b^2}\frac{e^{it}}{i}\bigg(-\frac{1}{4t\sqrt{t}}\Big(1-e^{-s\sqrt{t}}\Big)-\frac{1}{2\sqrt{t}}\,e^{-s\sqrt{t}}\,\frac{-s}{2\sqrt{t}}\bigg)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{e^{ib^2}}{2\,b\,i}\Big(1-e^{-sb}\Big)-\frac{1}{2\sqrt{2\pi}\,i}\Big(1-e^{-s\sqrt{2\pi}}\Big)$$

$$+\frac{1}{4\,i}\int\limits_{2\pi}^{b^2}\bigg(\frac{e^{it}}{t\sqrt{t}}\Big(1-e^{-s\sqrt{t}}\Big)+\frac{e^{it}}{t}\,s\,e^{-s\sqrt{t}}\bigg)\mathrm{d}t$$

e per $b \to +\infty$ otteniamo

$$\int_{\sqrt{2\pi}}^{+\infty} e^{ix^2} \mathrm{d}x - \int_{\sqrt{2\pi}}^{+\infty} e^{ix^2} e^{-sx}\,\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{2\pi}\,i}\Big(1 - e^{-s\sqrt{2\pi}}\Big) + \frac{1}{4i}\int_{2\pi}^{+\infty} \frac{e^{it}}{t\sqrt{t}}\Big(1 - e^{-s\sqrt{t}}\Big)\mathrm{d}t$$

$$+ \frac{1}{4i}\int_{2\pi}^{+\infty} \frac{e^{it}}{t}\, s\, e^{-s\sqrt{t}}\mathrm{d}t\,.$$

**Convergenze.** Per avere (3) nel caso $a = \sqrt{2\pi}$ basta quindi verificare le convergenze

$$\lim_{0<s\to 0}\Big(1 - e^{-s\sqrt{2\pi}}\Big) = 0\,,$$

$$\lim_{0<s\to 0}\int_{2\pi}^{+\infty} \frac{e^{it}}{t\sqrt{t}}\Big(1 - e^{-s\sqrt{t}}\Big)\mathrm{d}t = 0\,,$$

$$\lim_{0<s\to 0}\int_{2\pi}^{+\infty} \frac{e^{it}}{t}\, s\, e^{-s\sqrt{t}}\mathrm{d}t = 0\,.$$

La prima convergenza è ovvia.

La seconda convergenza risulta dal teorema della convergenza dominata per parametro reale tenendo conto dalla maggiorazione uniforme

$$\left|\frac{e^{it}}{t\sqrt{t}}\Big(1 - e^{-s\sqrt{t}}\Big)\right| \le \frac{1}{t\sqrt{t}}\,, \qquad t \in \big[2\pi\,, +\infty\big)\,, s \in \big[0\,, +\infty\big)$$

dove $\dfrac{1}{t\sqrt{t}}$ è sommabile su $\big[2\pi\,, +\infty\big)$.

Per verificare la terza convergenza, useremo la disuguaglianza

$$e^{-x} \le \frac{1}{\sqrt{2e}}\,\frac{1}{\sqrt{x}}\,, \qquad x > 0\ : \tag{4}$$

Mostriamo una disuguaglianza più generale: per ogni $0 < \alpha < 1$ vale

$$e^{-x} \leq \left(\frac{\alpha}{e}\right)^{\alpha} \frac{1}{x^{\alpha}}\,, \qquad x > 0\,.$$

A questo fine studiamo la funzione $\alpha \ln x - x = \ln\big(x^{\alpha} e^{-x}\big)$ definita su $\big(0\,,+\infty\big)$. La derivata $\dfrac{\alpha}{x} - 1$ è positiva per $0 < x < \alpha$ e negativa per $x > \alpha$, perciò $x = \alpha$ è un punto di massimo. Risulta che

$$x^{\alpha} e^{-x} \leq \alpha^{\alpha} e^{-\alpha} = \left(\frac{\alpha}{e}\right)^{\alpha}, \qquad x > 0\,.$$

Ora (4) implica

$$e^{-s\sqrt{t}} \leq \frac{1}{\sqrt{2e}}\,\frac{1}{\sqrt{s}\,\sqrt[4]{t}}\,, \qquad s > 0\,, t > 0\,.$$

e risulta la stima

$$\left|\int_{2\pi}^{+\infty} \frac{e^{it}}{t}\, s\, e^{-s\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_{2\pi}^{+\infty} \frac{s}{t}\, e^{-s\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \leq \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{2e}} \int_{2\pi}^{+\infty} \frac{1}{t\sqrt[4]{t}}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{2e}\,\sqrt[4]{2\pi}}\,.$$

Di conseguenza vale anche la terza convergenza.

**Conclusione.** Abbiamo

$$\lim_{0<s\to 0} F(s) = \lim_{0<s\to 0} \int_0^{+\infty} e^{ix^2} e^{-sx}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} e^{ix^2}\,\mathrm{d}x = i \int_0^{+\infty} e^{-ix^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

Cosicché

$$\int_0^{+\infty} \cos\big(x^2\big)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \sin\big(x^2\big)\,\mathrm{d}x \in \mathbb{R} \tag{5}$$

e $\lim\limits_{0<s\to 0} F(s)$ è il prodotto del valore comune degli integrali impropri (5) con $1 + i$.

Gli integrali (5) si chiamano Integrali di Fresnel, considerati dal fisico Augustin Jean Fresnel (1788-1828) nelle sue ricerche in ottica, e possono essere esplicitamente calcolati: il loro valore è $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$.

3) **:** (a) (Primo metodo) Abbiamo

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to z_0}\frac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0} &= \lim_{z\to z_0}\frac{\overline{f(\overline{z})}-\overline{f(\overline{z}_0)}}{z-z_0} = \lim_{z\to z_0}\overline{\left(\frac{f(\overline{z})-f(\overline{z}_0)}{\overline{z}-\overline{z}_0}\right)}\\
&= \overline{\left(\lim_{z\to z_0}\frac{f(\overline{z})-f(\overline{z}_0)}{\overline{z}-\overline{z}_0}\right)} = \overline{\left(\lim_{z\to \overline{z}_0}\frac{f(z)-f(\overline{z}_0)}{z-\overline{z}_0}\right)}\\
&= \overline{f'(\overline{z}_0)}.
\end{aligned}$$

(nella terza e nella quarta uguaglianza abbiamo usato la bicontinuità del coniugio). Quindi, per ogni $z_0\in\overline{\Omega}$, la funzione $g$ è derivabile in senso complesso in $z_0$ e il valore della derivata di $g$ in $z_0$ è $\overline{f'(\overline{z}_0)}$.

(a) (Secondo metodo) Siano $u:\Omega\to\mathbb{R}$ e $v:\Omega\to\mathbb{R}$ la parte reale e la parte immaginaria della funzione $f$. Si ha

$$f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)$$

per ogni $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ e di conseguenza

$$g(x+iy)=u(x,-y)-iv(x,-y)$$

per ogni $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Dunque la parte reale di $g$ è la funzione

$$\hat{u}:\overline{\Omega}\to\mathbb{R} \text{ definita da } \hat{u}(x,y):=u(x,-y)$$

e la parte immaginaria di $g$ è la funzione

$$\hat{v}:\overline{\Omega}\to\mathbb{R} \text{ definita da } \hat{v}(x,y):=-v(x,-y)\,.$$

Le funzioni $\hat{u}$ e $\hat{v}$ sono di classe $\mathcal{C}^\infty$ (e in particolare $\mathcal{C}^1$) in quanto composizione di funzioni di classe $\mathcal{C}^\infty$, quindi $g$ è olomorfa se e solo se $\hat{u}$ e $\hat{v}$ soddisfano le condizioni di Cauchy-Reimann.

Abbiamo

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\hat{u}}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial u}{\partial x}(x,-y)\,,\\
\frac{\partial\hat{u}}{\partial y}(x,y) &= -\frac{\partial u}{\partial y}(x,-y)\,,\\
\frac{\partial\hat{v}}{\partial x}(x,y) &= -\frac{\partial v}{\partial x}(x,-y)\,,\\
\frac{\partial\hat{v}}{\partial y}(x,y) &= \frac{\partial v}{\partial y}(x,-y)\,.
\end{aligned}$$

Quindi,

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,-y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x,-y) = \frac{\partial \hat{v}}{\partial y}(x,y)$$

(nella terza uguaglianza abbiamo usato le condizioni di Cauchy-Riemann per $u$ e $v$).

Analogamente,

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial u}{\partial y}(x,-y) = \frac{\partial v}{\partial x}(x,-y) = -\frac{\partial \hat{v}}{\partial x}(x,y)\,.$$

Quindi $\hat{u}$ e $\hat{v}$ soddisfano le condizioni di Cauchy-Riemann e così $g$ è una funzione olomorfa.

(b) Sia $g : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{C}$ definita come nel punto a). Le funzioni $f$ e $g$ sono olomorfe nei loro domini e $\Omega$ e $\overline{\Omega}$, inoltre $\Omega \cup \overline{\Omega} = \mathbb{C}$. Quindi, se le restrizioni di $f$ e $g$ all'aperto $\Omega \cap \overline{\Omega}$ coincidono, allora $f$ e $g$ si incollano ad una funzione olomorfa su $\mathbb{C}$.

Siccome $\Omega \cap \overline{\Omega}$ è connesso, le restrizioni di $f$ e $g$ sono uguali su $\Omega \cap \overline{\Omega}$ se e solo se sono uguali su un qualsiasi sottoinsieme non discreto di $\Omega \cap \overline{\Omega}$.

Infine, siccome $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$, abbiamo $g(x) = \overline{f(\overline{x})} = f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ dove $\mathbb{R} \subset \Omega \cap \overline{\Omega}$ è non discreto.

(c) Sia $\tilde{h} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la funzione definita da

$$\tilde{h}(z) := \begin{cases} h(z) & \text{se } \Im m(z) \geq 0\,; \\ \overline{h(\overline{z})} & \text{se } \Im m(z) < 0\,. \end{cases}$$

Per il punto a) la funzione $\tilde{h}$ è continua nel suo dominio e olomorfa su $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Se mostriamo che l'integrale della 1-forma continua $\tilde{h}(z)\mathrm{d}z$ sul bordo di ogni rettangolo (a lati orizzontali e verticali ) è nullo allora, come visto a lezione, $\tilde{h}$ è la derivata in senso complesso di una funzione olomorfa su $\mathbb{C}$, quindi è essa stessa una funzione olomorfa su $\mathbb{C}$.

Sia $R$ un rettangolo interamente contenuto in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. In questo caso l'integrale di linea

$$\int_{\partial^+ R} \tilde{h}(z)\mathrm{d}z$$

è nullo per il teorema integrale di Cauchy.

Sia ora $R$ un rettangolo con il lato inferiore contenuto nell'asse reale. Più precisamente siano $a\,,b$ e $c$ numeri reali tali che $a<b$ e $c>0$, e sia $R$ il rettangolo di vertici $a\,,b\,,b+ic\,,a+ic\,.$ Mostriamo che anche in questo caso

$$\int_{\partial^+ R}\tilde{h}(z)\mathrm{d}z=0\,.$$

Siccome $\tilde{h}$ è uniformemente continua su $R$, fissato un reale $\epsilon>0$, esiste un altro reale $0<\delta_o<c$ tale che $|\,\tilde{h}(x)-\tilde{h}(x+i\delta)|<\epsilon$ per qualsiasi $0<\delta\le\delta_o$ e $x\in[\,a\,,b]\,.$ Sia $0<\delta\le\delta_o$ arbitrario ed indichiamo con

- $R'\subset R$ il rettangolo di vertici $a\,,b\,,b+i\delta\,,a+i\delta\,,$
- $R''\subset R$ il rettangolo di vertici $a+i\delta\,,b+i\delta\,,b+ic\,,a+ic\,.$

Abbiamo

$$\int_{\partial^+ R}\tilde{h}(z)\mathrm{d}z=\int_{\partial^+ R'}\tilde{h}(z)\mathrm{d}z+\int_{\partial^+ R''}\tilde{h}(z)\mathrm{d}z=\int_{\partial^+ R'}\tilde{h}(z)\mathrm{d}z$$

(nell'ultima uguaglianza abbiamo usato il teorema integrale di Cauchy su $R''$).

Esplicitando l'ultimo integrale di linea otteniamo

$$\int_{\partial^+ R'}\tilde{h}(z)\mathrm{d}z=$$

$$\int_a^b\tilde{h}(x)\mathrm{d}x+\int_0^\delta i\tilde{h}(b+iy)\mathrm{d}y-\int_a^b\tilde{h}(x+i\delta)\mathrm{d}x-\int_0^\delta i\tilde{h}(a+iy)\mathrm{d}y$$

e, detto $M$ il massimo del modulo di $\tilde{h}$ su $R$, abbiamo

$$\begin{aligned}&\left|\int_{\partial^+ R'}\tilde{h}(z)\mathrm{d}z\right|\\ \le&\left|\int_a^b\tilde{h}(x)\mathrm{d}x-\int_a^b\tilde{h}(x+i\delta)\mathrm{d}x\right|+\left|\int_0^\delta i(\tilde{h}(b+iy)-\tilde{h}(a+iy))\mathrm{d}y\right|\\ \le&\,\epsilon(b-a)+2M\delta\,.\end{aligned}$$

In conclusione

$$\left|\int_{\partial^+ R}\tilde{h}(z)\mathrm{d}z\right|\le\epsilon(b-a)+2M\delta$$

e siccome possiamo prendere $\epsilon$ e $\delta$ piccoli a piacere, risulta

$$\int_{\partial^+ R} \tilde{h}(z)\mathrm{d}z = 0\,.$$

Si noti che, nel caso appena tratttato, si poteva pervenire allo stesso risultato, applicando direttamente il Teorema di Gauss-Green sul rettangolo (nel caso del rettangolo tale teorema è stato dimostarto in tutti i dettagli a lezione).

In modo analogo si tratta il caso in cui il lato superiore di $R$ è contenuto nell'asse reale.

Infine, se $R$ è un rettangolo contenente al suo interno un segmento dell'asse reale, esistono rettangoli $R_1$, con lato inferiore contenuto in $\mathbb{R}$, e $R_2$, con lato superiore contenuto in $\mathbb{R}$, tali che $R = R_1 \cup R_2$. In questo caso

$$\int_{\partial^+ R} \tilde{h}(z)\mathrm{d} \int_{\partial^+ R_1} \tilde{h}(z)\mathrm{d}z + \int_{\partial^+ R_2} \tilde{h}(z)\mathrm{d}z = 0$$

perché i due addendi rientrano nel casi trattati precedentemente.

4) **:** Le funzioni integrande sono funzioni razionali di $e^{ix}$ e quindi di $\sin(x)$ e $\cos(x)$, inoltre il dominio di integrazione è l'intervallo $[0, 2\pi]$. Perciò gli integrali in questione si trattano per riduzione ad integrali di 1-forme razionali sul bordo di opportuni dischi.

Sia $D_\rho$ il disco di centro 0 e raggio $\rho$. Se $\rho$ è un reale positivo diverso da $0\,, 1/2$ e 2 abbiamo

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{(2\rho e^{ix} - 1)^3(\rho e^{ix} - 2)}\,\mathrm{d}x = \int_{\partial^+ D_\rho} \frac{1}{(2z-1)^3(z-2)iz}\,\mathrm{d}z$$

e per $\rho = 1$

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{(2e^{ix} - 1)^3(e^{ix} - 2)}\,\mathrm{d}x = \int_{\partial^+ D_1} \frac{1}{(2z-1)^3(z-2)iz}\,\mathrm{d}z\,.$$

(A) Siccome la funzione

$$k(z) := \frac{1}{(2z-1)^3(z-2)iz}$$

è olomorfa fuori da $0\,,1/2$ e $2\,$, per il teorema dei residui, otteniamo

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{(2e^{ix}-1)^3(e^{ix}-2)}\,\mathrm{d}x = Res(k,0) + Res(k,1/2)\,.$$

Poiché $0$ è un polo semplice per $k\,$, abbiamo

$$Res(k,0) = 2\pi i \lim_{z\to 0} z k(z) = 2\pi \lim_{z\to 0} \frac{1}{(2z-1)^3(z-2)} = \pi\,.$$

Siccome $1/2$ è un polo triplo per $k\,$, abbiamo

$$\begin{aligned}
Res(k,1/2) &= 2\pi i \frac{1}{2} \lim_{z\to\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\left[\left(z-\frac{1}{2}\right)^3 k(z)\right] \\
&= \pi i \lim_{z\to\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\left(\frac{1}{8(z-2)iz}\right) = \frac{\pi}{2^3} \lim_{z\to\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\left(\frac{1}{(z-2)z}\right) \\
&= \frac{\pi}{2^3} \lim_{z\to\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z}\right)\right) \\
&= \frac{\pi}{2^4} \lim_{z\to\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\left(\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z}\right) \\
&= \frac{\pi}{2^4} \lim_{z\to\frac{1}{2}} 2\left(\frac{1}{(z-2)^3}-\frac{1}{z^3}\right) = \frac{\pi}{2^3} \lim_{z\to\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{(z-2)^3}-\frac{1}{z^3}\right) \\
&= \frac{\pi}{2^3}\left(-\frac{2^3}{3^3}-2^3\right) \\
&= -\pi\left(\frac{1}{3^3}+1\right) = -\frac{28}{27}\pi\,.
\end{aligned}$$

In conclusione,

$$\begin{aligned}
\int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{(2e^{ix}-1)^3(e^{ix}-2)}\,\mathrm{d}x &= Res(k,0) + Res(k,1/2) \\
&= \pi\left(1-\frac{28}{27}\right) = -\frac{1}{27}\pi\,.
\end{aligned}$$

(B) Siccome la funzione $k$ è olomorfa su $\mathbb{C}\setminus\left\{0,\frac{1}{2},2\right\}$, la funzione

$$\rho \longmapsto \int_0^{2\pi} \frac{1}{(2\rho e^{ix}-1)^3(\rho e^{ix}-2)}\,\mathrm{d}x = \int_{\partial^+ D_\rho} \frac{1}{(2z-1)^3(z-2)iz}\,\mathrm{d}z$$

è costante su ciascuno degli intervalli $(0\,,1/2)$, $(1/2\,,2)$ e $(2\,,+\infty)$.

Ne segue che, per il punto (A), per ogni $\rho \in (1/2\,,2)$ si ha

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{(2\rho e^{ix}-1)^3(\rho e^{ix}-2)}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{27}\pi\,.$$

Inoltre $|k(z)|$ è definitivamente minore di $|z^{-2}|$ per $z \to \infty$ quindi, per il lemma del grande cerchio, abbiamo

$$\lim_{\rho\to+\infty} \int_0^{2\pi} \frac{1}{(2\rho e^{ix}-1)^3(\rho e^{ix}-2)}\,\mathrm{d}x = 0\,.$$

Quindi

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{(2\rho e^{ix}-1)^3(\rho e^{ix}-2)}\,\mathrm{d}x = 0$$

per ogni $\rho > 2$.

Se ne conclude che il minimo $r \in \mathbb{R}_+$ tale che valga

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{(2\rho e^{ix}-1)^3(\rho e^{ix}-2)}\,\mathrm{d}x = 0$$

per ogni $\rho > r$ è $r = 2$.

## Osservazione.

Si noti che, con le osservazioni svolte nel punto B), si può determinare l'integrale del punto A) senza calcolare il residuo di $k$ nel polo triplo $\frac{1}{2}$. Infatti, per il teorema dei residui, abbiamo

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \frac{1}{(2e^{ix}-1)^3(e^{ix}-2)}\,\mathrm{d}x &= \int_{\partial^+ D_1} \frac{1}{(2z-1)^3(z-2)iz}\,\mathrm{d}z \\ &= \int_{\partial^+ D_3} \frac{1}{(2z-1)^3(z-2)iz}\,\mathrm{d}z - Res(k,2)\,.\end{aligned}$$

Per quanto visto nel punto B),

$$\int\limits_{\partial^+ D_3} \frac{1}{(2z-1)^3(z-2)iz}\,\mathrm{d}z = 0\,.$$

Siccome 2 è un polo semplice per $k$,

$$Res(k,2) = 2\pi i \lim_{z\to 2}(z-2)k(z) = 2\pi \lim_{z\to 2} \frac{1}{(2z-1)^3 z} = \frac{1}{27}\,\pi\,.$$

Se ne conclude che

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{(2e^{ix}-1)^3(e^{ix}-2)}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{27}\,\pi\,.$$