NOME: .... **MATRICOLA:** ....

Corso di Laurea in Matematica, A.A. 2007/2008
Analisi Matematica 2, Esame scritto del 12.06.2008

1) Determinare gli intervalli in cui la funzione $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definita tramite la formula

$$f(x) = \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$

è uniformamente continua e quelli in cui è lipschitziana.

2) Determinare una primitiva della funzione

$$f(x) = \frac{1}{\Big(1 + (\cos x)^2\Big) \sin x} \ .$$

3) Determinare i valori del parametro reale β per cui il seguente limite esiste, è finito ed è diverso da zero :

$$\lim_{x\to+\infty} x^\beta\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} x\right) .$$

4) Determinare i valori del parametro reale α per cui il seguente integrale improprio converge :

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} x}\,\mathrm{d}x .$$

5) Dire per quali valori di $\alpha\in\mathbb{R}$ la seguente serie converge:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n!}}{n^{\alpha n}} .$$

Soluzioni:

1) **:** f è derivabile e la sua derivata

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\cos\sqrt{x}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\sqrt{x}-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\sin\sqrt{x}}{x} \\ &= \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{x}\,\cos\sqrt{x}-\sin\sqrt{x}}{x\,\sqrt{x}} \end{aligned}$$

è limitata sull'intero dominio $(0,+\infty)$ di f . Infatti, poiché

$$\left|\frac{\sqrt{x}\,\cos\sqrt{x}-\sin\sqrt{x}}{x\,\sqrt{x}}\right| \leq \frac{\sqrt{x}+1}{x\,\sqrt{x}} \leq \frac{2\,\sqrt{x}}{x\,\sqrt{x}} = \frac{2}{x}\,, \qquad x \geq 1\,,$$

esiste il limite finito

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0\,,$$

mentre, usando la regola di de l'Hospital, si ottiene anche

$$\begin{aligned} \lim_{0<x\to 0} f'(x) &\overset{t=\sqrt{x}}{=} \lim_{t\to 0} \frac{1}{2}\,\frac{t\,\cos t-\sin t}{t^3} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{2}\,\frac{\cos t - t\,\sin t - \cos t}{3\,t^2} \\ &= \lim_{t\to 0} -\frac{1}{6}\,\frac{\sin t}{t} \\ &= -\frac{1}{6}\,. \end{aligned}$$

Risulta che f è lipschitziana, ed in particolare uniformamente continua, in tutto il suo dominio.

2) : Usando la sostituzione $u = \cos x$, si ottiene prima

$$\begin{aligned}
\int f(x)\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{\Big(1+(\cos x)^2\Big)\sin x}\,\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{1}{\Big(1+(\cos x)^2\Big)\Big((\sin x)^2\Big)}\,\sin x\,\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{1}{\Big(1+(\cos x)^2\Big)\Big(1-(\cos x)^2\Big)}\,\sin x\,\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{1}{1-(\cos x)^4}\,\underbrace{\sin x}_{-(\cos x)'}\,\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{1}{u^4-1}\,\mathrm{d}u\,.
\end{aligned}$$

Ora, per integrare la funzione $\dfrac{1}{u^4-1}$ usiamo il suo sviluppo in fratti semplici :

La decomposizione del polinomio con coefficienti reali u^4-1 in fattori irriducili è $u^4-1=(u-1)\,(u+1)\,(u^2+1)$. Perciò

$$\frac{1}{u^4-1} = \frac{A}{u-1} + \frac{B}{u+1} + \frac{C\,u+D}{u^2+1}\,,$$

cioè

$$1 = A\,(u+1)(u^2+1) + B\,(u-1)(u^2+1) + (C\,u+D)\,(u^2-1)$$

per opportune costanti reali $A\,,B,C,D$. Per $u=1$ otteniamo

$$1 = 4\,A\,,\ \text{ossia}\ A = \frac{1}{4}\,,$$

mentre per $u=-1$,

$$1 = -4\,B\,,\ \text{ossia}\ B = -\frac{1}{4}\,.$$

Di conseguenza

$$\begin{aligned}
(C\,u+D)\,(u^2-1) &= 1 - \frac{1}{4}(u+1)(u^2+1) + \frac{1}{4}(u-1)(u^2+1) \\
&= 1 - \frac{1}{2}(1+u^2) = \frac{1}{2}(1-u^2)
\end{aligned}$$

e risulta

$$C\,u + D = -\frac{1}{2}\,,\ \text{cioè}\ C = 0\ ,\ D = -\frac{1}{2}\,.$$

Concludiamo che

$$\frac{1}{u^4+1} = \frac{1}{4}\,\frac{1}{u-1} - \frac{1}{4}\,\frac{1}{u+1} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{u^2+1}\,.$$

Risulta

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{u^4-1}\,\mathrm{d}u &= \frac{1}{4}\int \frac{1}{u-1}\,\mathrm{d}u - \frac{1}{4}\int \frac{1}{u+1}\,\mathrm{d}u - \frac{1}{2}\int \frac{1}{u^2+1}\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{4}\,\log|u-1| - \frac{1}{4}\,\log|u+1| - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} u + C \\ &= \frac{1}{4}\,\log\left|\frac{u-1}{u+1}\right| - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} u + C\end{aligned}$$

e così

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\,\log\left|\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right| + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\big(\cos x\big) + C$$

3) : Poiché

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\,x\right) = 0\,,$$

per $\beta \leq 0$ abbiamo

$$\lim_{x\to+\infty} x^\beta\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\,x\right) = 0\,.$$

Supponiamo adesso che $\beta > 0$. Allora il limite

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} x^\beta\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\,x\right) &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\,x}{x^{-\beta}} \\ \underline{\text{per de l'Hospital}} \rightarrow \quad &= \lim_{x\to+\infty}\frac{-\dfrac{1}{1+x^2}}{-\beta\,x^{-\beta-1}} \\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\beta+1}}{\beta\,(1+x^2)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\beta-1}}{\beta\left(\dfrac{1}{x^2}+1\right)}\end{aligned}$$

risulta essere uguale a 0 per $(0<)\beta<1$, a $\dfrac{1}{\beta}=1$ per $\beta=1$, ed a $+\infty$ per $\beta>0$.

Concludiamo che il limite

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\beta}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} x\right)$$

è finito e diverso da zero solo per $\beta=1$, e per questo valore

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} x\right)=1\,.$$

4) : L'integrale

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{x^{\alpha}}{\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} x}\,\mathrm{d}x$$

può essere improprio (dipendente dal valore di α) sia in 0 che a $+\infty$. Esaminiamo separatamente la sua convergenza in 0 ed all'infinito.

Le funzioni $\dfrac{x^{\alpha}}{\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} x}$ e x^{α} sono asintoticamente equivalenti in 0:

$$\lim_{0<x\to 0}\frac{\dfrac{x^{\alpha}}{\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} x}}{x^{\alpha}}=\lim_{0<x\to 0}\frac{1}{\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} x}=\frac{2}{\pi}\,.$$

Perciò

$$\int\limits_0^{1}\frac{x^{\alpha}}{\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} x}\,\mathrm{d}x \text{ converge } \iff \int\limits_0^{1}x^{\alpha}\,\mathrm{d}x \text{ converge } \iff \alpha>-1\,.$$

D'altro canto, tenendo conto del risultato nell'esercizio 3), la funzione $\dfrac{x^{\alpha}}{\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} x}$ è asintoticamente equivalente a $+\infty$ alla funzione $x^{\alpha+1}$:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{x^{\alpha}}{\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} x}}{x^{\alpha+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x\left(\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} x\right)}=1\,.$$

Di conseguenza

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^\alpha}{\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x}\,\mathrm{d}x \ \text{ converge } \iff \int_1^{+\infty} x^{\alpha+1}\,\mathrm{d}x \ \text{ converge } \iff \alpha < -2\,.$$

Concludiamo che

$$\begin{aligned}
&\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x}\,\mathrm{d}x \ \text{ converge} \\
\iff &\int_0^{1} \frac{x^\alpha}{\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x}\,\mathrm{d}x \ \text{ e } \int_1^{+\infty} \frac{x^\alpha}{\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x}\,\mathrm{d}x \ \text{ convergono} \\
\iff &\alpha > -1 \ \text{ e } \ \alpha < -2 \\
\iff &\underline{\text{non accade mai}}\,.
\end{aligned}$$

5) : Applichiamo il criterio del rapporto : poiché

$$\frac{\dfrac{\sqrt{(n+1)!}}{(n+1)^{\alpha(n+1)}}}{\dfrac{\sqrt{n!}}{n^{\alpha n}}} = \frac{(n+1)^{\frac{1}{2}-\alpha}}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{\alpha n}} \longrightarrow \frac{1}{e^\alpha} \cdot \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha > \dfrac{1}{2} \\ 1 & \text{se } \alpha = \dfrac{1}{2} \\ +\infty & \text{se } \alpha < \dfrac{1}{2} \end{cases} ,$$

cioè

$$\frac{\dfrac{\big((n+1)!\big)^2}{(n+1)^{\alpha(n+1)}}}{\dfrac{\big(n!\big)^2}{n^{\alpha n}}} \longrightarrow \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha > \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{\sqrt{e}} < 1 & \text{se } \alpha = \dfrac{1}{2} \\ +\infty & \text{se } \alpha < \dfrac{1}{2} \end{cases} ,$$

la serie data converge se e soltanto se $\alpha \geq \dfrac{1}{2}$.