NOME: .... **MATRICOLA:** ....

Corso di Laurea in Fisica, A.A. 2012/2013
Calcolo 2, Esame scritto del 12.09.2013

1) a) Si trovi la soluzione generale dell'equazione differenziale

$$y'' - \frac{2\,y}{x^2} = 3\,\ln x\,. \tag{*}$$

b) Si trovi la soluzione dell'equazione (*) che soddisfa la condizione iniziale

$$y(1) = 1\,, \quad y'(1) = 0\,.$$

2) Si calcoli il volume del solido limitato dal paraboloido

$$z = x^2 + y^2\,, \quad x\,, y \geq 0$$

e la superficie

$$z = \sqrt{x\,y},\,, \quad x\,, y \geq 0\,,$$

cioè del solido

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3\,;\, x \geq 0\,, y \geq 0\,, x^2 + y^2 \leq z \leq \sqrt{x\,y} \right\}\,.$$

Suggerimento: È conveniente usare le coordinate cilindriche.

3) Si calcoli l'integrale doppio

$$\int\limits_{\substack{0\leq y\leq x\\ x^4+y^4\leq 1}} (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

(Dovrebbe essere $\dfrac{\pi}{8\sqrt{2}}$.)

4) Consideriamo la funzione periodica di periodo 2π

$$f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$$

che nell'intervallo $(-\pi\,,\pi]$ è data tramite la formula

$$f(x)=x^3\,,\qquad x\in(-\pi\,,\pi]\,.$$

a) Si calcolino i coefficienti di Fourier $c_k(f)\,,k\in\mathbb{Z}\,,$ di f e si studi la convergenza puntuale della serie di Fourier

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(f)\,e^{ikx}\,.$$

b) Si calcoli la somma della serie

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \big|c_k(f)\big|^2\,.$$

Soluzioni:

1) **:** a) L'equazione differenziale da risolvere è una equazione di Eulero. Per risolverla in $\big(0\,,+\infty\big)$ effettuiamo il cambiamento di variabile $x = e^t$.

Sia

$$z(t) = y(e^t) \text{ per } t \in \mathbb{R} \iff y(x) = z(\ln x) \text{ per } x > 0\,.$$

Allora

$$\begin{aligned} z(t) &= y(e^t)\,, \\ z'(t) &= y'(e^t)\,e^t\,, \\ z''(t) &= y''(e^t)\,e^{2t} + y'(t)\,e^t\,, \end{aligned}$$

quindi

$$\begin{aligned} y(e^t) &= z(t)\,, \\ y'(e^t) &= z'(t)\,e^{-t}\,, \\ y''(e^t) &= z''(t)\,e^{-2t} - y'(t)\,e^{-t} = \big(z''(t) - z'(t)\big)e^{-2t}\,, \end{aligned}$$

e l'equazione $y'' - \dfrac{2\,y}{x^2} = 3\,\ln x$ si riduce ad una equazione differenziale lineare a coefficienti costanti:

$$\begin{aligned} \big(z''(t) - z'(t)\big)e^{-2t} - \frac{2\,z(t)}{e^{2t}} &= 3\,t\,, \\ z''(t) - z'(t) - 2\,z(t) &= 3\,t\,e^{2t}\,. \end{aligned}$$

La soluzione generale di questa equazione è

$$z(t) = c_1\,e^{2t} + c_2\,e^{-t} + \frac{t^2}{2}\,e^{2t} - \frac{t}{3}\,e^{2t} \;:$$

Risolviamo prima l'equazione omogenea $z'' - z' - 2\,z = 0$:
Il polinomio caratteristico $\lambda^2 - \lambda - 2$ ha i zeri $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = -1$, perciò

$$e^{2\,t}\,, \quad e^{-\,t}$$

sono due soluzioni linearmente indipendenti. Cosicché la soluzione generale dell'equazione omogenea è

$$z(t) = c_1\, e^{2t} + c_2\, e^{-t}\,, \qquad c_1\,, c_2 \text{ costanti.}$$

Per trovare una soluzione particolare dell'equazione non omogenea, usiamo il metodo della variazione delle costanti :
Cerchiamo una soluzione particolare sotto la forma

$$z(t) = c_1(t)\, e^{2t} + c_2(t)\, e^{-t}\,.$$

Per avere

$$z'(t) = 2\, c_1(t)\, e^{2t} - c_2(t)\, e^{-t}$$

dobbiamo richiedere

$$c_1'(t)\, e^{2t} + c_2'(t)\, e^{-t} = 0\,. \tag{1}$$

Risulta

$$z''(t) = 2\, c_1'(t)\, e^{2t} + 4\, c_1(t)\, e^{2t} - c_2'(t)\, e^{-t} + c_2(t)\, e^{-t}$$

e tramite sostituzione in l'equazione non omogenea si ottiene

$$\begin{aligned} &2\, c_1'(t)\, e^{2t} + 4\, c_1(t)\, e^{2t} - c_2'(t)\, e^{-t} + c_2(t)\, e^{-t} \\ &- \big(2\, c_1(t)\, e^{2t} - c_2(t)\, e^{-t}\big) \\ &- 2\, \big(c_1(t)\, e^{2t} + c_2(t)\, e^{-t}\big) = 3\, t\, e^{2t}\,, \end{aligned}$$

cioè

$$2\, c_1'(t)\, e^{2t} - c_2'(t)\, e^{-t} = 3\, t\, e^{2t}\,. \tag{2}$$

Per trovare $c_1'\,, c_2'$ dobbiamo quindi risolvere il sistema di equazioni lineari costituito da (1), (2). Sommando (1) e (2) risulta

$$3\, c_1'(t)\, e^{2t} = 3\, t\, e^{2t} \iff c_1'(t) = t$$

e sostituendo poi $c_1'(t) = t$ in (1) otteniamo

$$t\, e^{2t} + c_2'(t)\, e^{-t} = 0 \iff c_2'(t) = -\, t\, e^{3t}\,.$$

Per avere $c_1'(t) = t$ e $c_2'(t) = -\, t\, e^{3t}$ scegliamo

$$c_1(t) = \frac{t^2}{2}\,, \quad c_2(t) = -\, t\, \frac{e^{3t}}{3} + \frac{e^{3t}}{9}$$

ed otteniamo la soluzione particolare

$$\frac{t^2}{2}\, e^{2t} + \bigg(-\, t\, \frac{e^{3t}}{3} + \frac{e^{3t}}{9}\bigg) e^{-t} = \frac{t^2}{2}\, e^{2t} - \frac{t}{3}\, e^{2t} + \frac{e^{2t}}{9}$$

dell'equazione diferenziale non omogenea. Ma $\dfrac{e^{2t}}{9}$ essendo una soluzione dell'equazione omogenea,

$$\left(\frac{t^2}{2}\,e^{2t}-\frac{t}{3}\,e^{2t}+\frac{e^{2t}}{9}\right)-\frac{e^{2t}}{9}=\frac{t^2}{2}\,e^{2t}-\frac{t}{3}\,e^{2t}$$

è pure una soluzione particolare dell'equazione non omogenea. Avendo ora la soluzione generale dell'equazione omogenea ed aver trovato la soluzione particolare $\dfrac{t^2}{2}\,e^{2t}-\dfrac{t}{3}\,e^{2t}$ dell'equazione non omogenea, possiamo concludere che

$$z(t)=c_1\,e^{2t}+c_2\,e^{-t}+\frac{t^2}{2}\,e^{2t}-\frac{t}{3}\,e^{2t}\,,\qquad c_1\,,c_2 \text{ costanti}$$

è la soluzione generale dell'equazione differenziale

$$z''-z'-2\,z=3\,t\,e^{-2\,t}\,.$$

Ora la soluzione generale dell'equazione differenziale (*) si ottiene dalla soluzione generale dell'equazione di cui sopra tramite il cambiamento di variabile $x=e^t \iff t=\ln x$:

$$y(x)=c_1\,x^2+c_2\,\frac{1}{x}+\left(\frac{\ln^2 x}{2}-\frac{\ln x}{3}\right)x^2\,.$$

b) Poiché

$$y'(x)=2\,c_1\,x-c_2\,\frac{1}{x^2}+\left(\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{3\,x}\right)x^2+2\left(\frac{\ln^2 x}{2}-\frac{\ln x}{3}\right)x\,,$$

abbiamo

$$y(1)=c_1+c_2\,,\qquad y'(1)=2\,c_1-c_2-\frac{1}{3}\,.$$

Perciò la soluzione che soddisfa la condizione iniziale $y(1)=1\,,y'(1)=0$ si ottiene per le costanti $c_1\,,c_2$ soddisfacenti il sistema

$$\begin{cases} c_1+c_2 & =1 \\ 2\,c_1-c_2-\dfrac{1}{3} & =0 \end{cases}\,.$$

Si trovano $c_1=\dfrac{4}{9}$ e $c_2=\dfrac{5}{9}$, quindi la soluzione cercata è

$$y(x) = \frac{4}{9}\,x^2 + \frac{5}{9}\,\frac{1}{x} + \left(\frac{\ln^2 x}{2} - \frac{\ln x}{3}\right)x^2\,.$$

2) : Il solido S in questione è la regione in $\mathbb{R}^3$ tra i grafici delle funzioni

$$f : (x\,,y) \longmapsto \sqrt{x\,y}$$

e

$$g : (x\,,y) \longmapsto x^2 + y^2$$

definite sull'insieme D dei punti $(x\,,y) \in \mathbb{R}^2$ per quali sono soddisfatte le conditioni $x\,,y \geq 0$ e $g(x\,,y) \leq f(x\,,y)$:

$$D = \left\{(x\,,y) \in \mathbb{R}^2\,;\; x\,,y \geq 0\,, x^2 + y^2 \leq \sqrt{x\,y}\right\}.$$

Risulta

$$\begin{aligned}
\mathrm{Volume}\,(S) &= \int\limits_S \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int\limits_{(x\,,y\,,z)\in D\,;\,g(x\,,y)\leq z\leq f(x\,,y)} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\
&= \int\limits_D \Bigg(\int\limits_{g(x\,,y)}^{f(x\,,y)} \mathrm{d}z\Bigg)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int\limits_D \big(f(x\,,y) - g(x\,,y)\big)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \int\limits_D \Big(\sqrt{x\,y} - (x^2 + y^2)\Big)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.
\end{aligned}$$

Ci conviene ora passare alle coordinate polari. Poiché

$$x = \rho\cos\theta \geq 0\,, y = \rho\sin\theta \geq 0 \iff 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

e per $x = \rho\cos\theta \geq 0$ e $y = \rho\sin\theta \geq 0$

$$x^2 + y^2 \leq \sqrt{x\,y} \iff 0 \leq \rho \leq \sqrt{\cos\theta\sin\theta}\,,$$

abbiamo

$$D = \left\{(\rho\cos\theta\,, \rho\sin\theta) \in \mathbb{R}^2\,;\; 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\,, 0 \leq \rho \leq \sqrt{\cos\theta\sin\theta}\right\}.$$

Di conseguenza

$$\mathrm{Volume}\,(S) = \int\limits_0^{\pi/2} \int\limits_0^{\sqrt{\cos\theta\sin\theta}} \Big(\rho\sqrt{\cos\theta\sin\theta} - \rho^2\Big)\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left(\frac{\rho^3}{3} \Bigg|_{\rho=o}^{\rho=\sqrt{\cos\theta\sin\theta}} \cdot \sqrt{\cos\theta\sin\theta} - \frac{\rho^4}{4} \Bigg|_{\rho=o}^{\rho=\sqrt{\cos\theta\sin\theta}} \right) \mathrm{d}\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left(\frac{(\cos\theta\sin\theta)^2}{3} - \frac{(\cos\theta\sin\theta)^2}{4} \right) \mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{1}{12} \int_0^{\pi/2} (\cos\theta\sin\theta)^2 \,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{48} \int_0^{\pi/2} \sin^2(2\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{1}{48} \int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos(4\theta)}{2} \,\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{192}\,.$$

3) : Per passare alle coordinate polari osserviamo che per

$$x = \rho\cos\theta\,, y = \rho\sin\theta \text{ con } \rho \geq 0\,, 0 \leq \theta < 2\pi$$

abbiamo

$$0 \leq y \leq x \iff 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$$

e

$$x^4 + y^4 \leq 1 \iff \rho \leq \frac{1}{\sqrt[4]{\cos^4\theta + \sin^4\theta}}\,.$$

Di conseguenza

$$\iint_{\substack{0\leq y\leq x \\ x^4+y^4\leq 1}} (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{\pi/4} \left(\int_0^{\frac{1}{\sqrt[4]{\cos^4\theta+\sin^4\theta}}} \rho^3\,\mathrm{d}\rho \right) \mathrm{d}\theta$$

$$= \int_0^{\pi/4} \left(\frac{\rho^4}{4} \Bigg|_{\rho=0}^{\rho=\frac{1}{\sqrt[4]{\cos^4\theta+\sin^4\theta}}} \right) \mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^{\pi/4} \frac{\mathrm{d}\theta}{\cos^4\theta + \sin^4\theta}\,.$$

Sappiamo (dal Calcolo 1) che per integrare una funzione razionale di $\cos^2\theta$, $\sin^2\theta$ e $\cos\theta\sin\theta$ ci serve il cambiamento di variabile $u = \operatorname{tg}\theta$:

$$\int\limits_{\substack{0\leq y\leq x\\ x^4+y^4\leq 1}} (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{1}{4}\int\limits_0^{\pi/4} \frac{\mathrm{d}\theta}{\cos^4\theta\big(1+\operatorname{tg}^4\theta\big)}$$

$$= \frac{1}{4}\int\limits_0^{\pi/4} \frac{1+\operatorname{tg}^2\theta}{1+\operatorname{tg}^4\theta}\,\mathrm{d}(\operatorname{tg}\theta)$$

$$= \frac{1}{4}\int\limits_0^{1} \frac{1+u^2}{1+u^4}\,\mathrm{d}u\,.$$

Ora la decomposizione della funzione razionale $\dfrac{1+u^2}{1+u^4}$ in fratti semplici è

$$\frac{1+u^2}{1+u^4} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{u^2+\sqrt{2}\,u+1} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{u^2-\sqrt{2}\,u+1}$$

e

$$\int\limits_0^1 \frac{1}{2}\,\frac{1}{u^2\pm\sqrt{2}\,u+1}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{\sqrt{2}}\int\limits_0^1 \frac{1}{1+\big(\sqrt{2}\,u\pm 1\big)^2}\,\mathrm{d}\big(\sqrt{2}\,u\pm 1\big)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\big(\sqrt{2}\,u\pm 1\big)\Big|_{u=0}^{u=1}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\operatorname{arctg}\big(\sqrt{2}\pm 1\big) - \operatorname{arctg}\big(\pm 1\big)\Big)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\operatorname{arctg}\big(\sqrt{2}\pm 1\big) \mp \frac{\pi}{4}\Big)\,,$$

perciò

$$\int\limits_{\substack{0\leq y\leq x\\ x^4+y^4\leq 1}} (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{1}{4\sqrt{2}}\Big(\operatorname{arctg}\big(\sqrt{2}+1\big) + \operatorname{arctg}\big(\sqrt{2}-1\big)\Big)\,.$$

Se $\varphi = \operatorname{arctg}\big(\sqrt{2}+1\big)$ allora

$$0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}\,,\ \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \mathrm{ctg}\,\varphi = \frac{1}{\mathrm{tg}\,\varphi} = \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2} - 1$$

implica che

$$\mathrm{arctg}\big(\sqrt{2} - 1\big) = \frac{\pi}{2} - \varphi = \frac{\pi}{2} - \mathrm{arctg}\big(\sqrt{2} + 1\big)\,,$$

cioè

$$\mathrm{arctg}\big(\sqrt{2} + 1\big) + \mathrm{arctg}\big(\sqrt{2} - 1\big) = \frac{\pi}{2}\,.$$

Possiamo quindi concludere :

$$\int\limits_{\substack{0\le y\le x \\ x^4+y^4\le 1}} (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{\pi}{8\sqrt{2}}\,.$$

4) **:** a) Chiaramente

$$c_o(f) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} x^3\,\mathrm{d}x = 0\,.$$

Gli altri coefficienti di Fourier (complessi) di f sono

$$\begin{aligned}
c_k(f) &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\,e^{-ikx}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} x^3 e^{-ikx}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(x^3\frac{e^{-ikx}}{-ik}\,\Bigg|_{x=-\pi}^{x=\pi} + \frac{3}{ik}\int\limits_{-\pi}^{\pi} x^2 e^{-ikx}\,\mathrm{d}x\right) \\
&= \frac{(-1)^k\pi^2}{-ik} + \frac{1}{2\pi}\,\frac{3}{ik}\left(x^2\frac{e^{-ikx}}{-ik}\,\Bigg|_{x=-\pi}^{x=\pi} + \frac{2}{ik}\int\limits_{-\pi}^{\pi} x e^{-ikx}\,\mathrm{d}x\right) \\
&= \frac{(-1)^k\pi^2}{-ik} - \frac{1}{2\pi}\,\frac{6}{k^2}\int\limits_{-\pi}^{\pi} x e^{-ikx}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{(-1)^k\pi^2}{-ik} - \frac{1}{2\pi}\,\frac{6}{k^2}\left(x\frac{e^{-ikx}}{-ik}\,\Bigg|_{x=-\pi}^{x=\pi} + \frac{1}{ik}\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{-ikx}\,\mathrm{d}x\right)
\end{aligned}$$

$$= \frac{(-1)^k \pi^2}{-ik} - \frac{6}{k^2}\,\frac{(-1)^k}{-ik} = \frac{(-1)^k}{-ik}\left(\pi^2 - \frac{6}{k^2}\right)$$
$$= \frac{(-1)^k}{k}\left(\pi^2 - \frac{6}{k^2}\right) i\,.$$

Risulta che la serie di Fourier di f è

$$\sum_{0\neq k\in\mathbb{Z}} \frac{(-1)^k}{k}\left(\pi^2 - \frac{6}{k^2}\right) i\, e^{ikx}\,.$$

Poiché la funzione f è regolare a tratti, la sua serie di Fourier converge in ogni punto $x \in \mathbb{R}$ à

$$\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$$

che nel nostro caso è uguale ad $f(x)$ se x non è multiplo intero dispari di π ed è uguale a $\dfrac{\pi^3 - \pi^3}{2} = 0$ se x è multiplo intero dispari di π. Cosicché

$$\sum_{0\neq k\in\mathbb{Z}} \frac{(-1)^k}{k}\left(\pi^2 - \frac{6}{k^2}\right) i\, e^{ikx} = \begin{cases} x^3 & \text{per } x \in (-\pi\,,\pi) \\ 0 & \text{per } x = -\pi,\,,\pi \end{cases}\,.$$

Calcoliamo anche i coefficienti di Fourier reali :

$$a_k(f) = c_k(f) + c_{-k}(f) = 0\,, \qquad k \geq 0\,,$$
$$b_k(f) = i\big(c_k(f) - c_{-k}(f)\big) = \frac{(-1)^k}{k}\left(\frac{6}{k^2} - \pi^2\right), \qquad k \geq 1\,.$$

Con i coefficienti di Fourier reali risulta la convergenza

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}\left(\frac{6}{k^2} - \pi^2\right)\sin(kx) = \begin{cases} x^3 & \text{per } x \in (-\pi\,,\pi) \\ 0 & \text{per } x = -\pi,\,,\pi \end{cases}\,.$$

b) Per l'identità di Parseval abbiamo

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \big|c_k(f)\big|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \big|f(x)\big|^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^6\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^6}{7}\,,$$

cioè

$$\sum_{0\neq k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{k^2}\left(\pi^2 - \frac{6}{k^2}\right)^2 = \frac{\pi^6}{7} \iff \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\left(\pi^2 - \frac{6}{k^2}\right)^2 = \frac{\pi^6}{14}\,.$$