NOME: .... **MATRICOLA:** ....

Corso di Laurea in Fisica, A.A. 2012/2013
Calcolo 2, Esame scritto del 13.02.2013

1) a) Si trovi la soluzione generale dell'equazione differenziale

$$y''' - 2y'' + y' = 2e^x \,. \tag{*}$$

b) Esiste soluzione dell'equazione (*) che soddisfa tutte le tre condizioni

$$y(-1) = y(1)\,, \quad y(0) = 0\,, \quad \lim_{x\to-\infty} y(x) = 0\,?$$

Se esiste, si trovino tutte.

2) Si calcoli il volume dell'intersezione tra l'interno di paraboloide di rotazione

$$z \leq 2 - x^2 - y^2$$

e l'esterno di iperboloide di rotazione

$$z \geq \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,.$$

Suggerimento: Si può usare il fatto che l'intersezione in questione si ottiene ruotando la figura $\left\{(y\,,z)\,;y > 0\,,\frac{1}{y} \leq z \leq 2 - y^2\right\}$ del piano yz attorno all'asse z, oppure che si tratta del dominio normale limitato dai grafici delle funzioni $f(x\,,y) = 2 - x^2 - y^2$ e $g(x\,,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ definite sull'insieme dei punti del piano xy nei quali $f(x\,,y) \geq g(x\,,y)$.

3) Si calcoli il flusso uscente del campo vettoriale

$$V(x\,,y\,,z) = \begin{pmatrix} x + x^2 y \\ -y^2 - x\,y^2 + y\,z \\ 2\,y\,z - z \end{pmatrix}\,, \qquad (x\,,y\,,z) \in \mathbb{R}^3$$

dal semiellissoide solido

$$x^2 + y^2 + \frac{z^2}{2} \leq 1\,, \quad z \geq 0\,.$$

4) Consideriamo la funzione periodica di periodo $2\,\pi$

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

che nell'intervallo $[\,0\,,2\pi\,)$ è data tramite la formula

$$f(x) = e^{-x}\,, \qquad x \in [\,0\,,2\pi\,)\,.$$

a) Si calcolino i coefficienti di Fourier $c_k(f)\,,k \in \mathbb{Z}\,,$ di f e si studi la convergenza puntuale della serie di Fourier

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(f)\,e^{ikx}\,.$$

b) Si calcoli la somma della serie

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \big|c_k(f)\big|^2\,.$$

Soluzioni:

1) : a) L'equazione differenziale da risolvere è lineare ed a coefficienti costanti. Risolviamo prima l'equazione omogenea :

Il polinomio caratteristico $\lambda^3 - 2\,\lambda^2 + \lambda = \lambda\,(\lambda - 1)^2$ ha i zeri

$$\lambda_1 = 0 \text{ (semplice) e } \lambda_2 = 1 \text{ (doppio)},$$

perciò

$$e^{0\,x} = 1\,, \quad e^{1\,x} = e^x\,, \quad x\,e^{1\,x} = x\,e^x$$

sono tre soluzioni linearmente indipendenti. Cosicché la soluzione generale dell'equazione omogenea

$$y''' - 2\,y'' + y' = 0$$

è

$$y(x) = c_1 + c_2\,e^x + c_3\,x\,e^x\,, \qquad c_1\,, c_2\,, c_3 \text{ costanti.}$$

Per trovare una soluzione particolare dell'equazione non omogenea, il modo più semplice è osservare che la non-omogeneità $2\,e^x$ è (multiplo costante di) un esponenziale con il coefficiente 1 di x nell'esponente un zero doppio del polinomio caratteristico, quindi esiste una soluzione particolare dell'equazione differenziale non omogenea della forma $c\,x^2e^x$ con c una costante. Per la sostituzione di $y(x) = c\,x^2e^x$ in l'equazione non omogenea si ottiene

$$\begin{aligned} &6\,c\,e^x + 6\,c\,x\,e^x + c\,x^2e^x \\ &- 2\,(2\,c\,e^x + 4\,c\,x\,e^x + c\,x^2e^x) \\ &+ 2\,c\,x\,e^x + c\,x^2e^x = 2\,e^x \end{aligned}$$

e risulta $c = 1$. Cosicché x^2e^x è una soluzione particolare dell'equazione non omogenea.

È possibile trovare una soluzione particolare dell'equazione differenziale non omogenea anche usando il metodo della variazione delle costanti :

Cerchiamo una soluzione particolare sotto la forma

$$y(x) = c_1(x) + c_2(x)\,e^x + c_3(x)\,x\,e^x\,.$$

Per avere

$$y'(x) = c_2(x)\, e^x + c_3(x)\, (e^x + x\, e^x)$$

dobbiamo richiedere

$$c_1'(x) + c_2'(x)\, e^x + c_3'(x)\, x\, e^x = 0\,, \tag{1}$$

e per avere poi

$$y''(x) = c_2(x)\, e^x + c_3(x)\, (2\, e^x + x\, e^x)$$

dobbiamo richiedere anche

$$c_2'(x)\, e^x + c_3'(x)\, (e^x + x\, e^x) = 0\,. \tag{2}$$

Risulta

$$y'''(x) = c_2'(x)\, e^x + c_2(x)\, e^x + c_3'(x)\, (2\, e^x + x\, e^x) + c_3(x)\, (3\, e^x + x\, e^x)$$

e tramite sostituzione in l'equazione non omogenea si ottiene

$$\begin{aligned} &c_2'(x)\, e^x + c_2(x)\, e^x + c_3'(x)\, (2\, e^x + x\, e^x) + c_3(x)\, (3\, e^x + x\, e^x) \\ &- 2\, \big(c_2(x)\, e^x + c_3(x)\, (2\, e^x + x\, e^x)\big) \\ &+ c_2(x)\, e^x + c_3(x)\, (e^x + x\, e^x) = 2\, e^x\,, \end{aligned}$$

cioè

$$c_2'(x)\, e^x + c_3'(x)\, (2\, e^x + x\, e^x) = 2\, e^x\,. \tag{3}$$

Per trovare $c_1'\,, c_2'\,, c_3'$ dobbiamo quindi risolvere il sistema di equazioni lineari costituito da (1), (2), (3). Sottraendo (2) da (3) risulta

$$c_3'(x)\, e^x = 2\, e^x \iff c_3'(x) = 2\,,$$

sostituendo poi $c_3'(x) = 2$ in (2) otteniamo

$$c_2'(x)\, e^x + 2\, (e^x + x\, e^x) = 0 \iff c_2'(x) = -\, 2\, x - 2$$

ed ora da (1) risulta anche

$$c_1'(x) + (-\, 2\, x - 2)\, e^x + 2\, x\, e^x = 0 \iff c_1'(x) = 2\, e^x\,.$$

Per avere $c_1'(x) = 2\, e^x\,, c_2'(x) = -\, 2\, x - 2$ e $c_3'(x) = 2$ scegliamo

$$c_1(x) = 2\, e^x\,, \quad c_2(x) = -\, x^2 - 2\, x\,, \quad c_3(x) = 2\, x$$

ed otteniamo la soluzione particolare

$$y(x) = 2\, e^x + (-\, x^2 - 2\, x)\, e^x + (2\, x)\, x\, e^x = 2\, e^x - 2\, x\, e^x + x^2 e^x$$

dell'equazione diferenziale non omogenea. Ma $2\,e^x - 2\,x\,e^x$ essendo una soluzione dell'equazione omogenea,

$$y(x) - \big(2\,e^x - 2\,x\,e^x\big) = x^2 e^x$$

è pure una soluzione particolare dell'equazione non omogenea.

Avendo ora la soluzione generale dell'equazione omogenea ed aver trovato la soluzione particolare x^2e^x dell'equazione non omogenea, possiamo concludere che

$$y(x) = c_1 + c_2\,e^x + c_3\,x\,e^x + x^2e^x\,, \qquad c_1\,, c_2\,, c_3 \text{ costanti}$$

è la soluzione generale dell'equazione differenziale

$$y''' - 2\,y'' + y' = 2\,e^x\,.$$

b) Perché una soluzione $y(x) = c_1 + c_2\,e^x + c_3\,x\,e^x + x^2e^x$ dell'equazione (*) verifichi $y(-1) = y(1)$ dobbiamo avere

$$c_1 + c_2\,\frac{1}{e} - c_3\,\frac{1}{e} + \frac{1}{e} = c_1 + c_2\,e + c_3\,e + e\,,$$

$$c_2\left(e - \frac{1}{e}\right) + c_3\left(e + \frac{1}{e}\right) + e - \frac{1}{e} = 0\,.$$

Poi $y(0) = 0$ è equivalente a

$$c_1 + c_2 = 0$$

e $\lim\limits_{x\to-\infty} y(x) = 0$ accade se e solo se

$$c_1 = 0\,.$$

Risulta che perché tutte le tre condizioni di cui sopra siano soddisfatte e necessario e sufficiente avere

$$c_1 = c_2 = 0 \text{ e } c_3\left(e + \frac{1}{e}\right) + e - \frac{1}{e} = 0\,,$$

cioè

$$c_1 = c_2 = 0 \text{ e } c_3 = -\,\frac{e^2-1}{e^2+1}\,,$$

Di conseguenza

$$y(x) = -\,\frac{e^2-1}{e^2+1}\,x\,e^x + x^2e^x$$

è la sola soluzione dell'equazione (*) soddisfacente le tre condizioni

$$y(-1) = y(1)\,, \quad y(0) = 0\,, \quad \lim_{x\to-\infty} y(x) = 0\,.$$

2) : **Soluzione usando la formula nota per il volume dei solidi di rotazione :**

Ricordiamo che se $\varphi\,,\psi : [\,a\,,b\,] \longrightarrow [\,0\,,+\infty)$ sono funzioni continue tale che $\psi \leq \varphi$ allora il volume del solido di rotazione

$$E = \left\{(x\,,y\,,z) \in \mathbb{R}^3\,;a \leq z \leq b\,,\psi(z) \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq \varphi(z)\right\}$$

(che si ottiene ruotando la figura

$$\left\{(y\,,z) \in \mathbb{R}^2\,;a \leq z \leq b\,,\psi(z) \leq y \leq \varphi(z)\right\} \subset \text{piano } yz$$

attorno all'asse z) è

$$\text{Volume}\,(E) = \pi \int_a^b \big(\varphi(z)^2 - \psi(z)^2\big)\mathrm{d}z\,. \tag{**}$$

Infatti, per ogni $z \in [\,a\,,b]$ la sezione

$$E_z = \left\{(x\,,y) \in \mathbb{R}^2\,;(x\,,y\,,z) \in E\right\}$$

è l'anello

$$\left\{(x\,,y) \in \mathbb{R}^2\,;\psi(z) \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq \varphi(z)\right\}$$

e quindi l'area di E_z è uguale a $\pi\big(\varphi(z)^2 - \psi(z)^2\big)$. Per il teorema di riduzione (Teorema di Fubini) risulta

$$\text{Volume}\,(E) = \int_a^b \text{Area}\,(E_z)\,\mathrm{d}z = \int_a^b \pi\big(\varphi(z)^2 - \psi(z)^2\big)\mathrm{d}z\,.$$

Il nostro solido di rotazione S è descritto dalle disuguaglianze

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq z \leq 2 - x^2 - y^2\,,$$

cioè da

$$0 < z < 2\,, \quad \frac{1}{z} \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq \sqrt{2-z}\,. \tag{***}$$

Poiché (***) sia possibile, dobbiamo avere

$$\frac{1}{z} \leq \sqrt{2-z} \iff \frac{1}{z^2} \leq 2-z \iff z^3 - 2\,z^2 + 1 \leq 0\,.$$

Ma $z^3 - 2\,z^2 + 1$ chiaramente si annulla in $z = 1$, perciò è divisibile con $z-1$. Si trova $z^3 - 2\,z^2 + 1 = (z-1)(z^2 - z - 1)$. Poiché i zeri di $z^2 - z - 1$ sono $\dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, abbiamo

$$z^3 - 2\,z^2 + 1 = (z-1)\left(z - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(z - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$$

e risulta che per $z > 0$

$$z^3 - 2\,z^2 + 1 \leq 0 \iff 1 \leq z \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}\,.$$

Cosicché (***) è equivalente a

$$1 \leq z \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}\,, \quad \frac{1}{z} \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq \sqrt{2-z}$$

e risulta che possiamo applicare (**) con

$$a = 1\,, \quad b = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\,, \quad \varphi(z) = \sqrt{2-z}\,, \quad \psi(z) = \frac{1}{z}\,.$$

Otteniamo :

$$\begin{aligned}
\text{Volume}\,(S) &= \pi \int\limits_{1}^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \left(2 - z - \frac{1}{z^2}\right) \mathrm{d}z \\
&= \pi\left(2\,z\,\Bigg|_{z=0}^{z=\frac{1+\sqrt{5}}{2}} - \frac{z^2}{2}\,\Bigg|_{z=0}^{z=\frac{1+\sqrt{5}}{2}} + \frac{1}{z}\,\Bigg|_{z=0}^{z=\frac{1+\sqrt{5}}{2}}\right) \\
&= \frac{\pi}{4}\big(5\sqrt{5} - 11\big)\,.
\end{aligned}$$

Soluzione usando che il nostro solido di rotazione è un dominio normale rispetto all'asse delle z :

Il solido di rotazione S descritto dalle disuguaglianze

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq z \leq 2-x^2-y^2\,,$$

è la regione in $\mathbb{R}^3$ tra i grafici delle funzioni

$$f:(x\,,y)\longmapsto 2-x^2-y^2$$

e

$$g:(x\,,y)\longmapsto \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

definite sull'insieme D dei punti $(x\,,y)\in\mathbb{R}^2$ nei quali $g(x\,,y)\leq f(x\,,y)$. Troviamo D. Indicando $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$, abbiamo

$$g(x\,,y)\leq f(x\,,y) \iff \frac{1}{\rho}\leq 2-\rho^2 \iff \rho^3-2\,\rho+1\leq 0\,.$$

Ora $\rho^3-2\,\rho+1$ chiaramente si annulla in $\rho=1$, perciò è divisibile con $\rho-1$. Si trova $\rho^3-2\,\rho+1=(\rho-1)(\rho^2+\rho-1)$. Poiché i zeri di $\rho^2+\rho-1$ sono $\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$, abbiamo

$$\rho^3-2\,\rho+1=(\rho-1)\bigg(\rho-\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\bigg)\bigg(\rho-\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\bigg)$$

e risulta che per $\rho\geq 0$

$$\rho^3-2\,\rho+1\leq 0 \iff \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\leq\rho\leq 1\,.$$

Cosicché

$$D=\bigg\{(x\,,y)\in\mathbb{R}^2\,;\,\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\leq\sqrt{x^2+y^2}\leq 1\bigg\}$$

è l'anello tra le circonferenze con centro in $(0\,,0)$ e raggi $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ rispettivamente 1. Risulta

$$\begin{aligned}\mathrm{Volume}\,(S) &= \int_S \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_{(x\,,y)\in D\,;\,g(x\,,y)\leq z\leq f(x\,,y)} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\ &= \int_D \bigg(\int_{g(x\,,y)}^{f(x\,,y)} \mathrm{d}z\bigg)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_D \big(f(x\,,y)-g(x\,,y)\big)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\end{aligned}$$

$$= \int\limits_D \left(2 - x^2 - y^2 - \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

e passando alle coordinate polari otteniamo

$$\begin{aligned}
\text{Volume}\,(S) &= \int\limits_{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}^{1} \int\limits_0^{2\pi} \left(2 - \rho^2 - \frac{1}{\rho}\right) \rho \,\mathrm{d}\rho \,\mathrm{d}\theta \\
&= 2\pi \left(\rho^2 \Big|_{\rho=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}^{\rho=1} - \frac{\rho^4}{4} \Big|_{\rho=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}^{\rho=1} - \rho \Big|_{\rho=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}^{\rho=1} \right) \\
&= 2\pi \left(1 - \Big(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\Big)^2 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\Big(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\Big)^4 \right. \\
&\qquad \left. - 1 + \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \right) \\
&= \frac{\pi}{4}\big(5\sqrt{5} - 11\big) \,.
\end{aligned}$$

3) **:** Per poter applicare il teorema della divergenza, calcoliamo la divergenza del campo $V(x\,,y\,,z) = \begin{pmatrix} x + x^2 y \\ -y^2 - x\,y^2 + y\,z \\ 2\,y\,z - z \end{pmatrix}$: poiché

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\big(x + x^2 y\big) &= 1 + 2\,x\,y\,, \\
\frac{\partial}{\partial y}\big(-\, y^2 - x\,y^2 + y\,z\big) &= -\,2\,y - 2\,x\,y + z\,, \\
\frac{\partial}{\partial z}\big(2\,y\,z - z\big) &= 2\,y - 1\,,
\end{aligned}$$

risulta

$$(\operatorname{div} V)(x\,,y\,,z) = \big(1 + 2\,x\,y\big) + \big(-\,2\,y - 2\,x\,y + z\big) + \big(2\,y - 1\big) = z\,.$$

Usando il teorema della divergenza (Teorema di Gauss-Ostrogradski) risulta ora che il flusso uscente del campo $V(x\,,y\,z)$ dal semiellissoide solido

$$x^2 + y^2 + \frac{z^2}{2} \le 1\,, \quad z \ge 0\,,$$

è uguale all'integrale di volume

$$\int\limits_{\substack{x^2+y^2+z^2/2\leq 1\\ z\geq 0}} (\operatorname{div} V)(x\,,y\,,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int\limits_{\substack{x^2+y^2+z^2/2\leq 1\\ z\geq 0}} z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,.$$

Il dominio di integrazione è normale rispetto all'asse delle z:

$$\left\{(x\,,y\,,z)\,;x^2+y^2\leq 1\,,0\leq z\leq \sqrt{2}\,\sqrt{1-x^2-y^2}\right\}.$$

Perciò possiamo usare il teorema di riduzione ottenendo

$$\begin{aligned}\int\limits_{\substack{x^2+y^2+z^2/2\leq 1\\ z\geq 0}} z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z &= \int\limits_{x^2+y^2\leq 1}\Bigg(\int\limits_0^{\sqrt{2}\sqrt{1-x^2-y^2}} z\,\mathrm{d}z\Bigg)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\ &= \int\limits_{x^2+y^2\leq 1}\left(\frac{z^2}{2}\,\Bigg|_{x=0}^{z=\sqrt{2}\sqrt{1-x^2-y^2}}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\ &= \int\limits_{x^2+y^2\leq 1}\big(1-x^2-y^2\big)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.\end{aligned}$$

Ora passando alle coordinate polari finiamo il calcolo :

$$\begin{aligned}\int\limits_{x^2+y^2\leq 1}\big(1-x^2-y^2\big)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int\limits_0^1\int\limits_0^{2\pi}\big(1-\rho^2\big)\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\\ &= 2\,\pi\left(\frac{\rho^2}{2}\,\Bigg|_{\rho=0}^{\rho=1} - \frac{\rho^4}{4}\,\Bigg|_{\rho=0}^{\rho=1}\right)\\ &= 2\,\pi\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right) = \frac{\pi}{2}\,.\end{aligned}$$

Cosicché il flusso uscente del campo $V(x\,,y\,z)$ dal semiellissoide solido

$$x^2+y^2+\frac{z^2}{2}\leq 1\,,\quad z\geq 0\,,$$

è uguale a $\dfrac{\pi}{2}$.

4) **:** a) I coefficienti di Fourier (complessi) di f sono

$$\begin{aligned} c_k(f) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,e^{-ikx}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-x}e^{-ikx}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-(1+ik)x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\,\frac{e^{-(1+ik)x}}{-(1+ik)}\Bigg|_{x=0}^{x=2\pi} \\ &= \frac{1}{2\pi}\Big(-\frac{e^{-(1+ik)2\pi}}{1+ik}+\frac{1}{1+ik}\Big) \\ &= \frac{1-e^{-2\pi}}{2\pi}\cdot\frac{1}{1+ik}\,, \qquad k\in\mathbb{Z}\,. \end{aligned}$$

Risulta che la serie di Fourier di f è

$$\frac{1-e^{-2\pi}}{2\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{e^{ikx}}{1+ik}\,.$$

Poiché la funzione f è regolare a tratti, la sua serie di Fourier converge in ogni punto $x\in\mathbb{R}$ à

$$\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$$

che nel nostro caso è uguale ad $f(x)$ se x non è multiplo intero di 2π ed è uguale a $\dfrac{1+e^{-2\pi}}{2}$ se x è multiplo intero di 2π. Cosicché

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{1-e^{-2\pi}}{2\pi}\cdot\frac{e^{ikx}}{1+ik} = \begin{cases} e^{-x} & \text{per } x\in(0\,,2\pi) \\ \dfrac{1+e^{-2\pi}}{2} & \text{per } x=0\,,2\pi \end{cases}$$

ossia

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{e^{ikx}}{1+ik} = \begin{cases} \dfrac{2\pi\,e^{-x}}{1-e^{-2\pi}} & \text{per } x\in(0\,,2\pi) \\ \dfrac{(1+e^{-2\pi})\pi}{1-e^{-2\pi}} & \text{per } x=0\,,2\pi \end{cases}\,.$$

Calcoliamo anche i coefficienti di Fourier reali :

$$\begin{aligned} a_k(f) = c_k(f)+c_{-k}(f) &= \frac{1-e^{-2\pi}}{2\pi}\Big(\frac{1}{1+ik}+\frac{1}{1-ik}\Big) \\ &= \frac{1-e^{-2\pi}}{\pi}\cdot\frac{1}{1+k^2}\,, \qquad k\geq 0 \end{aligned}$$

e

$$
\begin{aligned}
b_k(f) = i\big(c_k(f) - c_{-k}(f)\big) &= i\,\frac{1-e^{-2\pi}}{2\pi}\left(\frac{1}{1+ik} - \frac{1}{1-ik}\right) \\
&= \frac{1-e^{-2\pi}}{\pi}\cdot\frac{k}{1+k^2}\,, \qquad k \geq 1\,.
\end{aligned}
$$

Con i coefficienti di Fourier reali risulta la convergenza

$$
\frac{1-e^{-2\pi}}{2\pi} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1-e^{-2\pi}}{\pi}\cdot\frac{\cos(kx)}{1+k^2} + \frac{1-e^{-2\pi}}{\pi}\cdot\frac{k\,sin(kx)}{1+k^2}\right)
$$

$$
= \begin{cases} e^{-x} & \text{per } \; x \in (0\,,2\pi) \\ \dfrac{1+e^{-2\pi}}{2} & \text{per } \; x = 0\,,2\pi \end{cases}
$$

ossia

$$
\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\cos(kx)}{1+k^2} + \frac{k\,sin(kx)}{1+k^2}\right) = \begin{cases} \dfrac{\pi\,e^{-x}}{1-e^{-2\pi}} & \text{per } \; x \in (0\,,2\pi) \\ \dfrac{(1+e^{-2\pi})\pi}{2\,(1-e^{-2\pi})} & \text{per } \; x = 0\,,2\pi \end{cases}\,.
$$

Osservazione :

Per $x = \pi$ l'ultima uguaglianza implica l'identità interessante

$$
\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{1+k^2} = \frac{1}{2} + \frac{\pi\,e^{-\pi}}{1-e^{-2\pi}} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\pi}{\cosh\pi}\right).
$$

b) Per l'identità di Parseval abbiamo

$$
\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\big|c_k(f)\big|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\big|f(x)\big|^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-2x}\,\mathrm{d}x = \frac{1-e^{-4\pi}}{4\pi}
$$

cioè

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{(1-e^{-2\pi})^2}{4\pi^2}\cdot\frac{1}{1+k^2} = \frac{1-e^{-4\pi}}{4\pi}\,, \\
&\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+k^2} = \frac{(1-e^{-4\pi})\,\pi}{(1-e^{-2\pi})^2} = \frac{1+e^{-2\pi}}{1-e^{-2\pi}}\,\pi = \frac{\pi}{\tanh\pi}\,.
\end{aligned}
$$

Osservazione :

Dall'ultima uguaglianza possiamo ottenere successivamente

$$
\begin{aligned}
1+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1+k^2} &= \frac{\pi}{\tanh\pi}\ ,\\
\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1+k^2} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{\tanh\pi}-1\right),\\
\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{1+k^2} &= \frac{1}{2}\left(1+\frac{\pi}{\tanh\pi}\right).
\end{aligned}
$$