NOME: .... **MATRICOLA:** ....

Corso di Laurea in Fisica, A.A. 2012/2013
Calcolo 2, Esame scritto del 13.06.2013

1) a) Si trovi la soluzione generale del sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} x'(t) = 2\,x(t) - \ \ y(t) + 2\,e^t \\ y'(t) = 3\,x(t) - 2\,y(t) + 4\,e^t \end{cases} . \qquad (*)$$

b) Si trovino tutte le soluzioni del sistema (*) che soddisfano la condizione

$$\lim_{t\to -\infty} x(t) = 0\ .$$

2) Siano $a\,,b\,,p\,,q > 0$. Si calcoli il volume del tratto del cilindro ellittico solido $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leq 1$ situato tra il piano $z = 0$ ed il paraboloide $z = \dfrac{x^2}{p} + \dfrac{y^2}{q}$, cioè del solido

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3\,;\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\,, 0 \leq z \leq \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} \right\} .$$

Suggerimento: È conveniente usare il seguente cambiamento di variabili (coordinate cilindriche generalizzate) :

$$\begin{aligned} x &= a\,r\,\cos\varphi \\ y &= b\,r\,\sin\varphi\ , \qquad r \geq 0\,, 0 \leq \varphi < 2\pi\,, z \in \mathbb{R}\,. \\ z &= z \end{aligned}$$

3) Per $r > 0$, si calcoli il flusso uscente del campo vettoriale

$$V(x\,,y\,,z) = \begin{pmatrix} x^3 \\ y^3 \\ z^3 \end{pmatrix}\,, \qquad (x\,,y\,,z) \in \mathbb{R}^3$$

dalla palla

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2\,.$$

4) Consideriamo la funzione periodica di periodo 2π

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

che nell'intervallo $(-\pi\,,\pi]$ è data tramite la formula

$$f(x) = |\sin x|\,, \qquad x \in (-\pi\,,\pi]\,.$$

a) Si calcolino i coefficienti di Fourier $c_k(f)\,, k \in \mathbb{Z}$, di f e si studi la convergenza puntuale della serie di Fourier

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(f)\, e^{ikx}\,.$$

b) Si calcoli la somma della serie

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left|c_k(f)\right|^2.$$

Soluzioni:

1) **:** a) Il sistema di equazioni differenziale da risolvere è lineare ed a coefficienti costanti.

Risloviamo prima il sistema omogeneo associato

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} .$$

Il polinomio caratteristico della matrice dei coefficienti è

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 3 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1$$

ed ha due zeri semplici :

$$\lambda_1 = 1 \,, \qquad \lambda_2 = -1 \,.$$

Gli autovettori corrispondenti all'autovalore λ_1 sono le soluzioni non zeri dell'equazione matriciale

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda_1 & -1 \\ 3 & -2-\lambda_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

cioè di

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff x_1 = y_1 \,,$$

quindi i multipli non zeri del vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Similmente si trova che gli autovettori corrispondenti all'autovalore λ_2 sono i multipli non zeri del vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Cosicché la soluzione generale del sistema omogeneo è

$$c_1\, e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2\, e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1\, e^t + c_2\, e^{-t} \\ c_1\, e^t + 3\, c_2\, e^{-t} \end{pmatrix} ,$$

dove $c_1 \,, c_2$ sono costanti arbitrari.

Per trovare una soluzione particolare del sistema non omogeneo possiamo usare il metodo della variazione delle costanti :

Cerchiamo una soluzione particolare sotto la forma

$$c_1(t)\, e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2(t)\, e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

che deve quindi soddisfare l'equazione matriciale

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(c_1(t)\,e^t\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+c_2(t)\,e^{-t}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\right)\\&=\begin{pmatrix}2&-1\\3&-2\end{pmatrix}\left(c_1(t)\,e^t\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+c_2(t)\,e^{-t}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\right)+\begin{pmatrix}2\,e^t\\4\,e^t\end{pmatrix}\,,\end{aligned}$$

cioè

$$c_1'(t)\,e^t\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+c_2'(t)\,e^{-t}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}=e^t\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}\,.$$

Si trovano $c_1'(t)=1\,,c_2'(t)=e^{2t}$ quindi una soluzione particolare si ottiene con $c_1(t)=t\,,c_2(t)=\dfrac{1}{2}\,e^{2t}$:

$$\begin{aligned}t\,e^t\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\,e^{2t}\,e^{-t}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}&=t\,e^t\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\,e^t\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\\&=t\,e^t\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+e^t\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\,e^t\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\,.\end{aligned}$$

Ma $\dfrac{1}{2}\,e^t\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ è soluzione del sistema omogeneo, perciò anche

$$t\,e^t\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+e^t\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\,,$$

che è una funzione più semplice, è soluzione particolare del sistema non omogeneo.

Avendo ora la soluzione generale del sistema omogeneo ed aver trovato anche una soluzione particolare del sistema non omogeneo, possiamo concludere che

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix}&=t\,e^t\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+e^t\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+c_1\,e^t\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+c_2\,e^{-t}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}t\,e^t+c_1\,e^t+c_2\,e^{-t}\\(t+1)\,e^t+c_1\,e^t+3\,c_2\,e^{-t}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

dove $c_1\,,c_2$ sono costanti arbitrari, è la soluzione generale del sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases}x'(t)=2\,x(t)-y(t)+2\,e^t\\y'(t)=3\,x(t)-2\,y(t)+4\,e^t\end{cases}\,.$$

b) Perché una soluzione $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t\,e^t + c_1\,e^t + c_2\,e^{-t} \\ (t+1)\,e^t + c_1\,e^t + 3\,c_2\,e^{-t} \end{pmatrix}$ del sistema (*) verifichi $\lim\limits_{t\to-\infty} x(t) = 0$ dobbiamo avere

$$\lim_{t\to-\infty} \left(t\,e^t + c_1\,e^t + c_2\,e^{-t} \right) = 0\,.$$

Ma, poiché

$$\lim_{t\to-\infty} t\,e^t = \lim_{t\to-\infty} e^t = 0\,, \quad \lim_{t\to-\infty} e^{-t} = +\infty\,,$$

questo accade se e soltanto se $c_2 = 0\,$. Di conseguenza

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (t+c_1)\,e^t \\ (t+1+c_1)\,e^t \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} t+c_1 \\ t+1+c_1 \end{pmatrix}\,,$$

dove c_1 è una costante arbitraria, sono tutte le soluzioni del sistema (*) che soddisfano la condizione

$$\lim_{t\to-\infty} x(t) = 0\,.$$

2) : Il solido

$$S := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3\,;\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1\,, 0 \le z \le \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} \right\}$$

è un dominio normale rispetto all'asse delle z : indicando con E l'ellisse pieno

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2\,;\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1 \right\}\,,$$

S è la regione in $\mathbb{R}^3$ tra i grafici delle funzioni

$$g : E \ni \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto 0\,,$$
$$f : E \ni \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q}\,.$$

Risulta che

$$\text{Volume}\,(S) = \int\limits_S \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int\limits_{(x\,,y)\in E\,;\,g(x\,,y)\le z\le f(x\,,y)} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

$$= \int\limits_E \left(\int\limits_{g(x,y)}^{f(x,y)} \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int\limits_E \big(f(x\,,y) - g(x\,,y) \big) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \int\limits_E \left(\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} \right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

Per calcolare l'integrale alla parte destra ci conviene usare il seguente cambiamento di variabili (coordinate polari generalizzate) :

$$\begin{array}{l} x = a\,r\,\cos\varphi \\ y = b\,r\,\sin\varphi \end{array}, \qquad r \geq 0\,, 0 \leq \varphi < 2\pi\,.$$

Poiché

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} a\,r\,\cos\varphi \\ b\,r\,\sin\varphi \end{pmatrix} ;\, 0 \leq r \leq 1\,, 0 \leq \varphi < 2\pi \right\}$$

ed il determinante della matrice di Jacobi del cambiamento è

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\,\cos\varphi & -a\,r\,\sin\varphi \\ b\,\sin\varphi & b\,r\,\cos\varphi \end{vmatrix} = a\,b\,r\big(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\big) = a\,b\,r\,,$$

otteniamo

$$\begin{aligned} \mathrm{Volume}\,(S) &= \int\limits_0^1 \int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{a^2 r^2 \cos^2\varphi}{p} + \frac{b^2 r^2 \sin^2\varphi}{q} \right) a\,b\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi \\ &= a\,b \int\limits_0^1 \int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{a^2 \cos^2\varphi}{p} + \frac{b^2 \sin^2\varphi}{q} \right) r^3 \mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi \\ &= \frac{a\,b}{4} \left(\frac{a^2}{p} \int\limits_0^{2\pi} \cos^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi + \frac{b^2}{q} \int\limits_0^{2\pi} \sin^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi \right). \end{aligned}$$

Ricordando ora (dall'Analisi 1) che

$$\int\limits_0^{2\pi} \cos^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \int\limits_0^{2\pi} \frac{1+\cos(2\varphi)}{2}\,\mathrm{d}\varphi = \pi + \frac{1}{4}\,\sin(2\varphi)\Big|_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} = \pi$$

e

$$\int_0^{2\pi} \sin^2\varphi \,\mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{1-\cos(2\varphi)}{2}\,\mathrm{d}\varphi = \pi - \frac{1}{4}\sin(2\varphi)\Big|_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} = \pi$$

possiamo concludere :

$$\mathrm{Volume}(S) = \frac{a\,b}{4}\left(\frac{a^2}{p}\pi + \frac{b^2}{q}\pi\right) = \frac{\pi\,a\,b}{4}\left(\frac{a^2}{p} + \frac{b^2}{q}\right).$$

3) : Poiché la divergenza del campo $V(x\,,y\,,z) = \begin{pmatrix} x^3 \\ y^3 \\ z^3 \end{pmatrix}$ è

$$(\mathrm{div}\,V)(x\,,y\,,z) = \frac{\partial}{\partial x}(x^3) + \frac{\partial}{\partial y}(y^3) + \frac{\partial}{\partial z}(z^3) = 3\big(x^2+y^2+z^2\big)\,,$$

il teorema della divergenza (Teorema di Gauss-Ostrogradski) implica che il flusso uscente del campo $V(x\,,y\,z)$ dalla palla $x^2+y^2+z^2 \leq r^2$ è uguale all'integrale triplo

$$\int\limits_{x^2+y^2+z^2\leq r^2} (\mathrm{div}\,V)(x\,,y\,,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = 3 \int\limits_{x^2+y^2+z^2\leq r^2} \big(x^2+y^2+z^2\big)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,.$$

Per il calcolo dell'integrale alla parte destra usiamo le coordinate sferiche

$$\begin{aligned} x &= \rho\sin\theta\cos\varphi \\ y &= \rho\sin\theta\sin\varphi\,, \qquad \rho\geq 0\,, 0\leq\theta\leq\pi\,, 0\leq\varphi<2\pi\ : \\ z &= \rho\cos\theta \end{aligned}$$

poiché

$$\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \rho^2\sin\theta\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$$

otteniamo che

$$\begin{aligned} 3\int\limits_{x^2+y^2+z^2\leq r^2} \big(x^2+y^2+z^2\big)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z &= \int_0^r\int_0^\pi\int_0^{2\pi} 3\,\rho^4\sin\theta\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi \\ &= 6\pi\int_0^r\int_0^\pi \rho^4\sin\theta\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta \end{aligned}$$

$$= 12\pi \int_0^r \rho^4 \mathrm{d}\rho$$

$$= \frac{12\pi r^5}{5}\,.$$

4) : a) I coefficienti di Fourier (complessi) di f sono

$$\begin{aligned}
c_k(f) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-ikx}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\sin x|\, e^{-ikx}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} (\sin x)\, e^{-ikx}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} (\sin x)\, e^{-ikx}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} (\sin x)\, e^{-ikx}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} (\sin y)\, e^{iky}\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (\sin x)\, \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (\sin x)\big(\cos(kx)\big)\mathrm{d}x\,, \qquad k \in \mathbb{Z}\,.
\end{aligned}$$

Per $k = \pm 1$

$$c_{\pm 1}(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (\sin x)\,(\cos x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \sin(2x)\,\mathrm{d}x = 0\,,$$

mentre per $k \neq \pm 1$ otteniamo tramite integrazione per parti

$$\begin{aligned}
c_k(f) &= -\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(kx)\,\mathrm{d}(\cos x) \\
&= -\frac{1}{\pi}\left((\cos x)\big(\cos(kx)\big)\Big|_{x=0}^{x=\pi} + k\int_0^{\pi} (\cos x)\big(\sin(kx)\big)\mathrm{d}x \right)
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(1+\cos(k\pi) - k\int_0^\pi (\cos x)\big(\sin(kx)\big)\mathrm{d}x\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(1+\cos(k\pi) - k\int_0^\pi \sin(kx)\,\mathrm{d}(\sin x)\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(1+\cos(k\pi) - k(\sin x)\big(\sin(kx)\big)\Big|_{x=0}^{x=\pi}\right.$$

$$\left. + k^2\int_0^\pi (\sin x)\big(\cos(kx)\big)\mathrm{d}x\right)$$

$$= \frac{1+(-1)^k}{\pi} + k^2 c_k(f)\,,$$

quindi

$$c_k(f) = \frac{1+(-1)^k}{(1-k^2)\,\pi}\,.$$

Risulta che

$$\begin{aligned} c_k(f) &= 0 && \text{per } k \text{ dispari,} \\ c_k(f) &= \frac{2}{(1-k^2)\,\pi} && \text{per } k \text{ pari.} \end{aligned}$$

Poiché f è regolare a tratti e continua, la sua serie di Fourier converge uniformemente a f :

$$\frac{2}{\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}\text{ pari}} \frac{e^{ikx}}{1-k^2} = |\sin x| \text{ uniformemente in } \mathbb{R}\,.$$

Calcoliamo anche i coefficienti di Fourier reali :

$$a_k(f) = c_k(f) + c_{-k}(f) = \begin{cases} 0 & \text{per } k \geq 1 \text{ dispari} \\ \dfrac{4}{(1-k^2)\,\pi} & \text{per } k \geq 0 \text{ pari} \end{cases}$$

e

$$b_k(f) = i\big(c_k(f) - c_{-k}(f)\big) = 0\,, \qquad k \geq 1\,.$$

Con i coefficienti di Fourier reali risulta la convergenza

$$\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{k \geq 2 \text{ pari}} \frac{\cos(k\,x)}{k^2 - 1} = |\sin x| \text{ uniformemente in } \mathbb{R}\,.$$

b) Per l'identità di Parseval abbiamo

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \big|c_k(f)\big|^2 = \frac{1}{2\,\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \big|f(x)\big|^2 \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\,\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$$

cioè

$$\begin{aligned}
\frac{4}{\pi^2} \sum_{k \in \mathbb{Z} \text{ pari}} \frac{1}{(1-k^2)^2} &= \frac{1}{2}\,, \\
1 + 2 \sum_{k \geq 2 \text{ pari}} \frac{1}{(k^2-1)^2} &= \frac{\pi^2}{8}\,, \\
\sum_{k \geq 2 \text{ pari}} \frac{1}{(k^2-1)^2} &= \frac{\pi^2 - 8}{16}\,.
\end{aligned}$$