NOME: ....   **MATRICOLA:** ....

Corso di Laurea in Fisica, A.A. 2015/2016
Calcolo 1, Esame scritto del 13.06.2016

1) Data la funzione

$$f(x) = \ln\frac{e^{2x}+4}{e^x+2}\,,$$

a) determinare il dominio (massimale) di f ;

b) trovare tutti gli asintoti di f ;

c) trovare tutti i massimi e minimi locali di f ;

d) studiare la convessità di f ;

e) tracciare un grafico qualitativo per f .

2) Discutere la convergenza della serie

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sqrt{k^\alpha+1}}{\ln\left(e^{k^\alpha}+e^{k^{-\alpha}}\right)}$$

al variare del parametro reale $\alpha\in\mathbb{R}$.

3) a) Si calcoli l'integrale

$$\int_0^1 \big(\operatorname{arctg} x\big)^2 x \, \mathrm{d}x \,.$$

b) Dire se converge o no l'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \big(\operatorname{arctg} x\big)^2 \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x \,.$$

4) Sia data la funzione

$$f(x\,,y) = \frac{x\,y}{27} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}\,, \qquad (x\,,y) \in (0\,,+\infty) \times (0\,,+\infty)\,.$$

a) Trovare i massimi e minimi locali di f.

b) Trovare i massimi e minimi globali di f.

5) Sia data la curva piana chiusa C tramite la parametrizzazione

$$\begin{cases} x(t) = 2\cos t - \cos(2t) \\ y(t) = 2\sin t - \sin(2t) \end{cases}, \qquad 0 \leq t \leq 2\pi\,.$$

a) Trovare tutti i punti di C a distanza minima dall'origine $(0\,,0)$, nonché quelli a distanza massima.

b) Calcolare la lunghezza di C.

Soluzioni:

1) **:** a) Siccome $\dfrac{e^{2x}+4}{e^x+2} > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, la funzione $f(x)$ è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$.

b) La funzione f è definita su tutta la retta reale, perciò non ha asintoto verticale.

La prima condizione per l'esistenza di un asintoto obliquo per $x \to +\infty$ è l'esistenza del limite finito

$$\begin{aligned} m_+ = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \ln \frac{e^{2x}(1+4\,e^{-2x})}{e^x(1+2\,e^{-x})} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\Big(\ln e^x + \ln \frac{1+4\,e^{-2x}}{1+2\,e^{-x}} \Big) \\ &= \lim_{x\to+\infty} \Big(1 + \frac{1}{x} \ln \frac{1+4\,e^{-2x}}{1+2\,e^{-x}} \Big) \\ &= 1 + \frac{1}{+\infty} \ln 1 = 1\,. \end{aligned}$$

La seconda condizione perché esisti un asintoto obliquo per $x \to +\infty$, necessariamente di forma

$$y = m_+ x + n_+ = x + n_+\,,$$

è l'esistenza del limite finito

$$\begin{aligned} n_+ = \lim_{x\to+\infty} \big(f(x) - m_+ x \big) &= \lim_{x\to+\infty} \Big(\ln \frac{e^{2x}(1+4\,e^{-2x})}{e^x(1+2\,e^{-x})} - x \Big) \\ &= \lim_{x\to+\infty} \Big(x + \ln \frac{1+4\,e^{-2x}}{1+2\,e^{-x}} - x \Big) \\ &= \lim_{x\to+\infty} \ln \frac{1+4\,e^{-2x}}{1+2\,e^{-x}} = 0\,. \end{aligned}$$

Risulta che la retta $y = x$ è asintoto obliquo per $x \to +\infty$.

Similmente, la prima condizione per l'esistenza di un asintoto obliquo di f per $x \to -\infty$ è l'esistenza del limite finito

$$m_- = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} \ln \frac{e^{2x}+4}{e^x+2} = \frac{1}{-\infty} \ln \frac{4}{2} = 0\,.$$

Poi, la seconda condizione perché esisti un asintoto obliquo per $x \to -\infty$, necessariamente di forma

$$y = m_- x + n_- = 0 \cdot x + n_- = n_- ,$$

è l'esistenza del limite finito

$$n_- = \lim_{x \to -\infty} \big(f(x) - m_- x \big) = \lim_{x \to -\infty} \ln \frac{e^{2x} + 4}{e^x + 2} = \ln \frac{4}{2} = \ln 2 .$$

Cosicché la retta $y = \ln 2$ è asintoto orizzontale di f per $x \to -\infty$.

Osserviamo che il grafico di f si trova sotto (sopra) l'asintoto $y = \ln 2$ per $x < \ln 2$ $\big(x > \ln 2 \big)$. Infatti, si verifica facilmente che

$$\ln \frac{e^{2x} + 4}{e^x + 2} < \ln 2 \Longleftrightarrow x < \ln 2 .$$

D'altro canto il grafico di f si trova sopra (sotto) l'asintoto $y = x$ per $x < \ln 2$ $\big(x > \ln 2 \big)$. Infatti,

$$\ln \frac{e^{2x} + 4}{e^x + 2} > x = \ln e^x \Longleftrightarrow x < \ln 2 .$$

Perciò a sinistra del punto di intersezione $\big(\ln 2 , \ln 2 \big)$ dell'asintoto orizzontale $y = \ln 2$ con l'asintoto obliquo $y = x$ il grafico di f si trova sotto l'asintoto orizzontale e sopra l'asintoto obliquo, mentre a destra di questo punto di intersezione il grafico di f si trova sopra l'asintoto orizzontale e sotto l'asintoto obliquo. In particolare, il punto di intersezione si trova sul grafico di f.

c) Per trovare gli intervalli di monotonia e gli extremi locali di f, dobbiamo prima calcolare la sua derivata :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\partial}{\partial x} \Big(\ln(e^{2x} + 4) - \ln(e^x + 2) \Big) = \frac{2\, e^{2x}}{e^{2x} + 4} - \frac{e^x}{e^x + 2} \\ &= \frac{e^x}{(e^{2x} + 4)\,(e^x + 2)} \cdot \big(e^{2x} + 4\, e^x - 4 \big) . \end{aligned} \tag{1}$$

I zeri della derivata soddisfano l'equazione di secondo grado in e^x

$$\big(e^x \big)^2 + 4\, e^x - 4 = 0 .$$

Le radici del'equazione $u^2 + 4\, u - 4 = 0$ sono $-2 \pm 2\sqrt{2}$, perciò

$$u^2+4u-4\begin{cases} >0 & \text{se } u<-2-2\sqrt{2}\,, \\ <0 & \text{se } -2-2\sqrt{2}<u<-2+2\sqrt{2}\,, \\ >0 & \text{se } u>-2+2\sqrt{2}\,. \end{cases}$$

In particolare

$$u^2+4u-4\begin{cases} <0 & \text{se } 0<u<-2+2\sqrt{2}\,, \\ >0 & \text{se } u>-2+2\sqrt{2}\,, \end{cases}$$

e così

$$e^{2x}+4\,e^x-4\begin{cases} <0 & \text{se } x<\ln\bigl(-2+2\sqrt{2}\,\bigr)\,, \\ >0 & \text{se } x>\ln\bigl(-2+2\sqrt{2}\,\bigr)\,. \end{cases}$$

Risulta che f' si annulla in $x=\ln\bigl(-2+2\sqrt{2}\,\bigr)$ ed è

$$\begin{aligned} &<0 \text{ in } \Bigl(-\infty\,,\ln\bigl(-2+2\sqrt{2}\,\bigr)\Bigr)\,, \\ &>0 \text{ in } \Bigl(\ln\bigl(-2+2\sqrt{2}\,\bigr),+\infty\Bigr)\,, \end{aligned}$$

Perciò f è

$$\begin{aligned} &\text{strettamente decrescente in } \Bigl(-\infty\,,\ln\bigl(-2+2\sqrt{2}\,\bigr)\Bigr] \\ &\text{e strettamente crescente in } \Bigl[\ln\bigl(-2+2\sqrt{2}\,\bigr),+\infty\Bigr)\,. \end{aligned}$$

In particolare, il punto $x_{\min}=\ln\bigl(-2+2\sqrt{2}\,\bigr)\approx -0,188$ è un punto di minimo locale (ed anche globale, perché f è decrescente in $(-\infty\,,x_{\min}]$ e crescente in $[x_{\min}\,,+\infty)$). Il valore (minimo) di f in questo punto è

$$f(x_{\min})=\ln\Bigl(4\,(\sqrt{2}-1)\Bigr)=\ln\frac{4}{1+\sqrt{2}}\approx 0,505\ :$$

Infatti, $x=x_{\min}$ soddisfa l'equazione $e^{2x}+4\,e^x-4=0$, perciò

$$e^{2x}+4=4-4\,e^x+4=8-4\,e^x$$

e, tenendo conto che $e^x=-2+2\sqrt{2}$, risulta

$$e^{2x}+4=8-4\,(-2+2\sqrt{2}\,)=8\,(2-\sqrt{2}\,)\,.$$

D'altro canto

$$e^x+2=-2+2\sqrt{2}+2=2\sqrt{2}\,.$$

Di conseguenza

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln\frac{e^{2x}+4}{e^x+2} = \ln\frac{8\,(2-\sqrt{2}\,)\,)}{2\sqrt{2}} = \ln\Big(4\,(\sqrt{2}-1)\Big) \\ &= \ln\frac{4\,(\sqrt{2}-1)\,(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{2}+1} = \ln\frac{4}{1+\sqrt{2}}\,. \end{aligned}$$

Osserviamo che $x_{\min}$ si trova a sinistra del punto $\ln 2 \approx 0,693$, fino al quale il grafico di f si trova sotto l'asintoto orizzontale $y = \ln 2$ e sopra l'asintoto obliquo $y = x$:

Infatti, $x_{\min} = \ln(-2+2\sqrt{2}) < \ln 2$ è equivalente a

$$-2+2\sqrt{2} < 2 \iff 2\sqrt{2} < 4 \iff \sqrt{2} < 2$$

che è vero.

Usando (1) calcoliamo anche il coefficiente angolare della retta tangente al grafico di f nel punto $\ln 2$ dove il grafico attraversa sia l'asintoto orizzontale $y = \ln 2$ che l'asintoto obliquo $y = x$:

$$f'\big(\ln 2\big) = \frac{2\cdot 2^2}{2^2+4} - \frac{2}{2+2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \in (0\,,1)\,.$$

d) Per studiare le proprietà di convessità di f guardiamo il segno della seconda derivata.

Per il calcolo di f'' è conveniente trascrivere la formula per f' in (1) tale che la derivazione successiva diventi più semplice :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2\,e^{2x}}{e^{2x}+4} - \frac{e^x}{e^x+2} = \frac{2\,(e^{2x}+4)-8}{e^{2x}+4} - \frac{(e^x+2)-2}{e^x+2} \\ &= 2 - \frac{8}{e^{2x}+4} - 1 + \frac{2}{e^x+2} \\ &= 1 - \frac{8}{e^{2x}+4} + \frac{2}{e^x+2}\,. \end{aligned}$$

Risulta

$$f''(x) = \frac{16\,e^{2x}}{(e^{2x}+4)^2} - \frac{2\,e^x}{(e^x+2)^2}\,,$$

cioè

$$f''(x) = \frac{-2\,e^x}{(e^{2x}+4)^2(e^x+2)^2}\cdot\Big(e^{4x} - 8\,e^{3x} - 24\,e^{2x} - 32\,e^x + 16\Big).$$

Risulta che il segno di $f''(x)$ è opposto al segno del polinomio di quarto grado in e^x

$$\begin{gathered} e^{4x} - 8\,e^{3x} - 24\,e^{2x} - 32\,e^x + 16 \\ = (e^x)^4 - 8\,(e^x)^3 - 24\,(e^x)^2 - 32\,e^x + 16 \end{gathered}$$

ed abbiamo quindi da studiare il segno del polinomio di quarto grado

$$P(u) := u^4 - 8\,u^3 - 24\,u^2 - 32\,u + 16\,.$$

A questo fine cerchiamo di completare $u^4 - 8\,u^3$ alla potenza quarta di $u - c$ con c una costante corrispondente. Siccome, per il formula del binomio di Newton

$$(u-c)^4 = u^4 - 4\,c\,u^3 + 6\,c^2u^2 - 4\,c^3u + c^4,$$

troviamo che dobbiamo avere $c = 2$ e quindi

$$(u-2)^4 = u^4 - 8\,u^3 + 24\,u^2 - 32\,u + 16\,.$$

Risulta che

$$\begin{aligned} P(u) = (u-2)^4 - 48\,u^2 &= \Big((u-2)^2 + 4\sqrt{3}\,u\Big)\Big((u-2)^2 - 4\sqrt{3}\,u\Big) \\ &= \Big(\underbrace{u^2 - 4\,(1-\sqrt{3})\,u + 4}_{>0}\Big)\Big(u^2 - 4\,(1+\sqrt{3})\,u + 4\Big) \end{aligned}$$

e di conseguenza il segno di $P(u)$ coincide con il segno del polinomio del secondo grado

$$u^2 - 4\,(1+\sqrt{3})\,u + 4\,.$$

Calcoliamo i zeri di questo polinomio

$$\begin{aligned} c_{1,2} &= 2\,(1+\sqrt{3}) \pm \sqrt{4\,(1+\sqrt{3})^2 - 4} \\ &= 2\,(1+\sqrt{3}) \pm 2\sqrt{2\sqrt{3} + 3} \\ &= 2\Big(1 + \sqrt{3} \pm \sqrt[4]{3}\sqrt{2+\sqrt{3}}\Big) \\ &= 2\left(1 + \sqrt{3} \pm \frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{2}}\sqrt{4 + 2\sqrt{3}}\right) \\ &= 2\left(1 + \sqrt{3} \pm \frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{2}}\sqrt{(1+\sqrt{3})^2}\right) \\ &= 2\,(1+\sqrt{3})\left(1 \pm \frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt[4]{4}}\right) \end{aligned}$$

e deduciamo

$$\begin{aligned} &P(u) > 0 \text{ per } u < c_1\,, \\ &P(u) < 0 \text{ per } c_1 < u < c_2\,, \\ &P(u) > 0 \text{ per } u > c_2\,. \end{aligned} \tag{2}$$

Sappiamo ora che

$$f''(x) = \frac{-\,2\,e^x}{(e^{2x}+4)^2(e^x+2)^2}\,P\big(e^x\big)$$

dove $P(u)$ è un polinomio di quarto grado con due zeri reali

$$\begin{aligned} c_1 &= 2\,(1+\sqrt{3})\left(1-\frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt[4]{4}}\right) \approx 0,379\,, \\ c_2 &= 2\,(1+\sqrt{3})\left(1+\frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt[4]{4}}\right) \approx 10,549 \end{aligned}$$

e vale (2). Perciò

$$\begin{aligned} &f''(x) < 0 \text{ per } \ x < \ln c_1\,, \\ &f''(x) > 0 \text{ per } \ \ln c_1 < x < \ln c_2\,, \\ &f''(x) < 0 \text{ per } \ x > \ln c_2\,. \end{aligned} \tag{3}$$

cioè

$$\begin{aligned} &f \text{ è concava in } \ (-\infty, \ln c_1]\,, \\ &f \text{ è convessa in } [\ln c_1\,, \ln c_2]\,, \\ &f \text{ è concava in } \ [\ln c_2\,, +\infty)\,. \end{aligned}$$

In particolare

$$\begin{aligned} \ln c_1 &= \ln\left(2\,(1+\sqrt{3})\left(1-\frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt[4]{4}}\right)\right) \approx -0,97\,, \\ \ln c_2 &= \ln\left(2\,(1+\sqrt{3})\left(1+\frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt[4]{4}}\right)\right) \approx 2,356 \end{aligned}$$

sono punti di flesso di f.

Le disuguaglità

$$x_{\min} < 0 < \ln 2 < \ln c_2$$

sono ovvie. La disugualità $\ln c_1 < x_{\min}$ è indicata dalle stime numeriche, ma possiamo verificarla anche direttamente. Infatti, tenendo conto di (3), basta verificare che $f''(x_{\min}) > 0$:

Siccome $x_{\min} = \ln(-2 + 2\sqrt{2}\,)$ e

$$f''(x) = \frac{16\,e^{2x}}{(e^{2x}+4)^2} - \frac{2\,e^x}{(e^x+2)^2}\,,$$

risulta

$$\begin{aligned}
f''(x_{\min}) &= \frac{16\,(-2+2\sqrt{2}\,)^2}{\big((-2+2\sqrt{2}\,)^2+4\big)^2} - \frac{2\,(-2+2\sqrt{2}\,)}{(-2+2\sqrt{2}+2)^2} \\
&= \frac{64\,(-1+\sqrt{2}\,)^2}{(16-8\sqrt{2}\,)^2} - \frac{4\,(-1+\sqrt{2}\,)}{8} \\
&= \frac{64\,(-1+\sqrt{2}\,)^2}{(8\sqrt{2}\,)^2(\sqrt{2}-1)^2} - \frac{-1+\sqrt{2}}{2} \\
&= \frac{1}{2} - \frac{-1+\sqrt{2}}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{2} > 0\,.
\end{aligned}$$

Cosicché

$$\ln c_1 < x_{\min} < 0 < \ln 2 < \ln c_2\,.$$

e) Riportiamo il comportamento di f', f'' e f nella seguente tabella :

x	$-\infty$		$\ln c_1$		$x_{\min}$		0		$\ln 2$		$\ln c_2$		$+\infty$
			$-0,97$		$-\,0,188$				$0,693$		$2,356$		
f'			$-$		0		$+$		$\frac{1}{2}$		$+$		
f''		$-$	0				$+$				0	$-$	
f	$\ln 2$		$\searrow$		$\ln\frac{4}{1+\sqrt{2}}$	$\nearrow$	$\ln\frac{5}{3}$	$\nearrow$	$\ln 2$		$\nearrow$		$+\infty$
	$0,693$				$0,505$		$0,51$		$0,693$				

Usando le informazioni di cui sopra, tracciamo ora il grafico di f :

$y = \ln 2$ è asintoto orizzontale per $x \to -\infty$ e il grafico di f scende da $\ln 2$ fino al punto di minimo

$$\big(x_{\min}\,,\,f(x_{\min})\big) = \Big(\ln\big(-\,2+2\sqrt{2}\,\big)\,,\,\ln\frac{4}{1+\sqrt{2}}\Big),$$

nel quale ha tangente orizzontale. Fino al punto di flesso $\ln c_1 < x_{\min}$ il grafico è concavo, e dopo diventa convesso.

Da questo punto il grafico comincia a salire. Nel punto $\big(\ln 2\,,\ln 2\big)$, nel quale il coefficiente angolare della retta tangente è uguale a $\dfrac{1}{2}$, sale sopra l'asintoto orizzontale $y = \ln 2$ ed attraversa anche l'asintoto obliquo $y = x$ per $x \to +\infty$, passando sotto di esso. Fino al secondo punto di flesso $\ln c_2 > \ln 2$ il grafico resta convesso e dopo diventa concavo.

Finalmente il grafico sale a $+\infty$ avendo la retta $y = x$ come asintoto obliquo per $x \to +\infty$, restanto sempre sotto di essa.

Generalizzazione.

Discutiamo l'andamento del grafico della funzione

$$f(x) = \ln\frac{e^{2x} + a}{e^x + b}$$

dove le costanti reali $a\,, b > 0$ sono arbitrari.

a) Siccome $\dfrac{e^{2x} + a}{e^x + b} > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, la funzione $f(x)$ è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$.

b) La funzione f è definita su tutta la retta reale, perciò non ha asintoto verticale.

La prima condizione per l'esistenza di un asintoto obliquo per $x \to +\infty$ è l'esistenza del limite finito

$$\begin{aligned}
m_+ = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\ln\frac{e^{2x}(1 + a\,e^{-2x})}{e^x(1 + b\,e^{-x})} \\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\bigg(\ln e^x + \ln\frac{1 + a\,e^{-2x}}{1 + b\,e^{-x}}\bigg) \\
&= \lim_{x\to+\infty}\bigg(1 + \frac{1}{x}\ln\frac{1 + a\,e^{-2x}}{1 + b\,e^{-x}}\bigg) \\
&= 1 + \frac{1}{+\infty}\ln 1 = 1\,.
\end{aligned}$$

La seconda condizione perché esisti un asintoto obliquo per $x \to +\infty$, necessariamente di forma

$$y = m_+ x + n_+ = x + n_+ \, ,$$

è l'esistenza del limite finito

$$\begin{aligned} n_+ = \lim_{x\to+\infty} \big(f(x) - m_+ x\big) &= \lim_{x\to+\infty} \left(\ln \frac{e^{2x}(1 + a\,e^{-2x})}{e^x(1 + b\,e^{-x})} - x \right) \\ &= \lim_{x\to+\infty} \left(x + \ln \frac{1 + a\,e^{-2x}}{1 + b\,e^{-x}} - x \right) \\ &= \lim_{x\to+\infty} \ln \frac{1 + a\,e^{-2x}}{1 + b\,e^{-x}} = 1 \, . \end{aligned}$$

Risulta che la retta $y = x$ è asintoto obliquo per $x \to +\infty$.

Similmente, la prima condizione per l'esistenza di un asintoto obliquo di f per $x \to -\infty$ è l'esistenza del limite finito

$$m_- = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} \ln \frac{e^{2x} + a}{e^x + b} = \frac{1}{-\infty} \ln \frac{a}{b} = 0 \, .$$

Poi, la seconda condizione perché esisti un asintoto obliquo per $x \to -\infty$, necessariamente di forma

$$y = m_- x + n_- = 0 \cdot x + n_- = n_- \, ,$$

è l'esistenza del limite finito

$$n_- = \lim_{x\to-\infty} \big(f(x) - m_- x\big) = \lim_{x\to-\infty} \ln \frac{e^{2x} + a}{e^x + b} = \ln \frac{a}{b} \, .$$

Cosicché la retta $y = \ln \dfrac{a}{b}$ è asintoto orizzontale di f per $x \to -\infty$.

Osserviamo che il grafico di f si trova sotto (sopra) l'asintoto $y = \ln \dfrac{a}{b}$ per $x < \ln \dfrac{a}{b}$ $\left(x > \ln \dfrac{a}{b} \right)$. Infatti, si verifica facilmente che

$$\ln \frac{e^{2x} + a}{e^x + b} < \ln \frac{a}{b} \Longleftrightarrow x < \ln \frac{a}{b} \, .$$

D'altro canto il grafico di f si trova sopra (sotto) l'asintoto $y = x$ per $x < \ln \dfrac{a}{b}$ $\left(x > \ln \dfrac{a}{b} \right)$. Infatti,

$$\ln \frac{e^{2x} + a}{e^x + b} > x = \ln e^x \Longleftrightarrow x < \ln \frac{a}{b} \, .$$

Perciò a sinistra del punto di intersezione $\left(\ln\dfrac{a}{b}\,,\ln\dfrac{a}{b}\right)$ dell'asintoto orizzontale $y = \ln\dfrac{a}{b}$ con l'asintoto obliquo $y = x$ il grafico di f si trova sotto l'asintoto orizzontale e sopra l'asintoto obliquo, mentre a destra di questo punto di intersezione il grafico di f si trova sopra l'asintoto orizzontale e sotto l'asintoto obliquo. In particolare, il punto di intersezione si trova sul grafico di f.

c) Per trovare gli intervalli di monotonia e gli extremi locali di f, dobbiamo prima calcolare la sua derivata :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\partial}{\partial x}\Big(\ln(e^{2x}+a) - \ln(e^x+b)\Big) = \frac{2\,e^{2x}}{e^{2x}+a} - \frac{e^x}{e^x+b} \\ &= \frac{e^x}{(e^{2x}+a)\,(e^x+b)}\cdot\big(e^{2x}+2\,b\,e^x-a\big)\,. \end{aligned} \tag{4}$$

I zeri della derivata soddisfano l'equazione di secondo grado in e^x

$$\big(e^x\big)^2 + 2\,b\,e^x - a = 0\,.$$

Le radici dell'equazione $u^2 + 2\,b\,u - a = 0$ sono $-\,b \pm \sqrt{b^2+a}$, perciò

$$u^2 + 2\,b\,u - a \begin{cases} > 0 & \text{se } \; u < -\,b - \sqrt{b^2+a}\,, \\ < 0 & \text{se } \; -\,b - \sqrt{b^2+a} < u < -\,b + \sqrt{b^2+a}\,, \\ > 0 & \text{se } \; u > -\,b + \sqrt{b^2+a}\,. \end{cases}$$

In particolare

$$u^2 + 2\,b\,u - a \begin{cases} < 0 & \text{se } \; 0 < u < -\,b + \sqrt{b^2+a}\,, \\ > 0 & \text{se } \; u > -\,b + \sqrt{b^2+a}\,, \end{cases}$$

e così

$$e^{2x} + 2\,b\,e^x - a \begin{cases} < 0 & \text{se } \; x < \ln\big(-\,b + \sqrt{b^2+a}\,\big)\,, \\ > 0 & \text{se } \; x > \ln\big(-\,b + \sqrt{b^2+a}\,\big)\,. \end{cases}$$

Risulta che f' si annulla in $x = \ln\big(-\,b + \sqrt{b^2+a}\,\big)$ ed è

$$\begin{aligned} &< 0 \text{ in } \Big(-\infty, \ln\big(-\,b + \sqrt{b^2+a}\,\big)\Big)\,, \\ &> 0 \text{ in } \Big(\ln\big(-\,b + \sqrt{b^2+a}\,\big), +\infty\Big)\,, \end{aligned}$$

Perciò f è

$$\text{strettamente decrescente in } \Big(-\infty\,, \ln\big(-\,b+\sqrt{b^2+a}\,\big)\Big]$$
$$\text{e strettamente crescente in } \Big[\ln\big(-\,b+\sqrt{b^2+a}\,\big), +\infty\Big)\,.$$

In particolare, $x_{\min} = \ln\big(-\,b+\sqrt{b^2+a}\,\big)$ è un punto di minimo locale (ed anche globale, perché f è decrescente in $(-\infty\,, x_{\min}]$ e crescente in $[x_{\min}\,, +\infty)$). Il valore (minimo) di f in questo punto è

$$f(x_{\min}) = \ln\Big(2\,(\sqrt{b^2+a}-b)\Big) = \ln\frac{2\,a}{b+\sqrt{b^2+a}}\quad :$$

Infatti, $x = x_{\min}$ soddisfa l'equazione $e^{2x}+2\,b\,e^x-a=0$, perciò

$$e^{2x}+a = a-2\,b\,e^x+a = 2\,a-2\,b\,e^x$$

e, tenendo conto che $e^x = -\,b+\sqrt{b^2+a}$, risulta

$$e^{2x}+a = 2\,a-2\,b\,(-\,b+\sqrt{b^2+a}\,) = 2\,(b^2+a-b\sqrt{b^2+a}\,)\,.$$

D'altro canto

$$e^x+b = -\,b+\sqrt{b^2+a}+b = \sqrt{b^2+a}\,.$$

Di conseguenza

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln\frac{e^{2x}+a}{e^x+b} = \ln\frac{2\,(b^2+a-b\sqrt{b^2+a}\,)}{\sqrt{b^2+a}} \\ &= \ln\Big(2\,(\sqrt{b^2+a}-b)\Big) = \ln\frac{2\,(\sqrt{b^2+a}-b)\,(\sqrt{b^2+a}-b)}{\sqrt{b^2+a}+b} \\ &= \ln\frac{2\,a}{b+\sqrt{b^2+a}}\,. \end{aligned}$$

Osserviamo che $x_{\min}$ si trova a sinistra del punto $\ln\dfrac{a}{b}$, fino al quale il grafico di f si trova sotto l'asintoto orizzontale $y = \ln\dfrac{a}{b}$ e sopra l'asintoto obliquo $y = x$:

Infatti, $x_{\min} = \ln(-\,b+\sqrt{b^2+a}\,) < \ln\dfrac{a}{b}$ è equivalente a

$$-\,b+\sqrt{b^2+a} < \frac{a}{b} \iff b\sqrt{b^2+a} < b^2+a \iff b < \sqrt{b^2+a}$$

che è vero per ogni $a\,, b > 0$.

Usando (4) calcoliamo anche il coefficiente angolare della retta tangente al grafico di f nel punto $\ln\dfrac{a}{b}$ dove il grafico attraversa sia l'asintoto orizzontale $y = \ln\dfrac{a}{b}$ che l'asintoto obliquo $y = x$:

$$f'\Big(\ln\frac{a}{b}\Big) = \frac{2\,\dfrac{a^2}{b^2}}{\dfrac{a^2}{b^2}+a} - \frac{\dfrac{a}{b}}{\dfrac{a}{b}+b} = \frac{a}{b^2+a} \in (0\,,1)\,.$$

d) Per studiare le proprietà di convessità di f guardiamo il segno della seconda derivata.

Per il calcolo di f'' è conveniente trascrivere la formula per f' in (4) tale che la derivazione successiva diventi più semplice :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2\,e^{2x}}{e^{2x}+a} - \frac{e^x}{e^x+b} = \frac{2\,(e^{2x}+a)-2\,a}{e^{2x}+a} - \frac{(e^x+b)-b}{e^x+b} \\ &= 2 - \frac{2\,a}{e^{2x}+a} - 1 + \frac{b}{e^x+b} \\ &= 1 - \frac{2\,a}{e^{2x}+a} + \frac{b}{e^x+b}\,. \end{aligned}$$

Risulta

$$f''(x) = \frac{4\,a\,e^{2x}}{(e^{2x}+a)^2} - \frac{b\,e^x}{(e^x+b)^2}\,,$$

cioè

$$f''(x) = \frac{-\,e^x}{(e^{2x}+a)^2(e^x+b)^2}\cdot\Big(b\,e^{4\,x} - 4\,a\,e^{3\,x} - 6\,a\,b\,e^{2\,x} - 4\,a\,b^2e^x + a^2b\Big).$$

Risulta che il segno di $f''(x)$ è opposto al segno del polinomio di quarto grado in e^x

$$b\,e^{4\,x} - 4\,a\,e^{3\,x} - 6\,a\,b\,e^{2\,x} - 4\,a\,b^2e^x + a^2b$$

ed abbiamo quindi da studiare il segno del polinomio di quarto grado

$$P(u) := b\,u^4 - 4\,a\,u^3 - 6\,a\,b\,u^2 - 4\,a\,b^2u + a^2b\,.$$

La discussione nel caso generale è assai ingarbugliata e significa comprendere l'andamento del grafico del polinomio $P(u)$ nell'intervallo $(0\,,+\infty)$ per $a\,,b > 0$ arbitrari.

Le prime due derivate di $P(u)$ sono

$$P'(u) = 4\,b\,u^3 - 12\,a\,u^2 - 12\,a\,b\,u - 4\,a\,b^2\,,$$
$$P''(u) = 12\,b\,u^2 - 24\,a\,u - 12\,a\,b = 12\,(b\,u^2 - 2\,a\,u - a\,b)\,.$$

$P''(u)$ è un polinomio di secondo grado e così possiamo calcolare i suoi zeri :

$$u_1 = \frac{a - \sqrt{a^2 + a\,b^2}}{b}\,, \quad u_2 = \frac{a + \sqrt{a^2 + a\,b^2}}{b}\,.$$

Abbiamo $u_1 < 0 < u_2$ e

$$P''(u) > 0 \text{ per } u < u_1 \text{ e } u > u_2\,,$$
$$P''(u) < 0 \text{ per } u_1 < u < u_2\,.$$

Risulta che il polinomio cubico $P'(u)$ cresce da $-\infty$ in $-\infty$ fino a $P'(u_1)$ in u_1 , poi decresce fino a $P'(u_2)$ in u_2 , e successivamente cresce fino a $+\infty$ in $+\infty$. Troviamo il segno di $P'(u_1)$:

Usando

$$b\,u_1^2 - 2\,a\,u_1 - a\,b = 0 \Longleftrightarrow b\,u_1^2 = 2\,a\,u_1 + a\,b$$

otteniamo

$$\begin{aligned} P'(u_1) &= 4\,u_1(2\,a\,u_1 + a\,b) - 12\,a\,u_1^2 - 12\,a\,b\,u_1 - 4\,a\,b^2 \\ &= -\,4\,a\,u_1^2 - 8\,a\,b\,u_1 - 4\,a\,b^2 \\ &= -\,4\,a\,(u_1 - b)^2 \leq 0\,. \end{aligned}$$

Ma $u_1 < 0$ non può essere uguale a $b > 0$, perciò $P'(u_1) < 0$. Ora, poiché $P'(u)$ è crescente in $(-\infty\,, u_1]$ e decrescente in $[u_1\,, u_2]$, risulta

$$P'(u) \leq P'(u_1) < 0\,, \qquad u < u_2\,.$$

Nell'intervallo $[u_2\,, +\infty)$ il polinomio $P'(u)$ cresce strettamente da $P'(u_2) < 0$ a $+\infty$, perciò si annulla in un solo punto $u_3 > u_2$.

Concludiamo che esiste un punto $u_3 > u_2 = \dfrac{a + \sqrt{a^2 + a\,b^2}}{b}$ tale che

$$P'(u) < 0 \text{ per } u < u_3\,,$$
$$P'(u) > 0 \text{ per } u > u_3\,.$$

e così il polinomio di quarto grado $P(u)$ decresce strettamente da $+\infty$ in $-\infty$ a $P(u_3)$ in u_3 , per crescere poi strettamente fino a $+\infty$ in $+\infty$. Troviamo il segno di $P(u_3)$:

Le uniche informazioni che abbiamo su u_3 sono che è maggiore di u_2 , che conosciamo, e che $P'(u_3)=0$. La condizione

$$\begin{aligned} 0 = P'(u_3) &= 4\,b\,u_3^3 - 12\,a\,u_3^2 - 12\,a\,b\,u_3 - 4\,a\,b^2 \\ &= 4\,(b\,u_3^3 - 3\,a\,u_3^2 - 3\,a\,b\,u_3 - a\,b^2) \end{aligned}$$

implica che $b\,u_3^3 = 3\,a\,u_3^2 + 3\,a\,b\,u_3 + a\,b^2$ e quindi

$$\begin{aligned} P(u_3) &= u_3\,(3\,a\,u_3^2 + 3\,a\,b\,u_3 + a\,b^2) \\ &\quad - 4\,a\,u_3^3 - 6\,a\,b\,u_3^2 - 4\,a\,b^2 u_3 + a^2 b \\ &= -\,u_3^3 - 3\,a\,b\,u_3^2 - 3\,a\,b^2 u_3 + a^2 b\,. \end{aligned}$$

Ma $u_3 > u_2 = \dfrac{a + \sqrt{a^2 + a\,b^2}}{b} > \dfrac{a}{b}$ implica

$$\begin{aligned} P(u_3) &< -\frac{a^3}{b^3} - 3\,a\,b\,\frac{a^2}{b^2} - 3\,a\,b^2\frac{a}{b} + a^2 b \\ &= -\frac{a^3}{b^3} - 3\,\frac{a^3}{b} - 2\,a^2 b < 0\,. \end{aligned}$$

Risulta che $P(u)$ decresce in $(-\infty\ , u_3]$ strettamente da $+\infty$ a $P(u_3) < 0$ e quindi si annulla in un solo $-\infty < c_1 < u_3$. Poiché

$$0 < \frac{a}{b} < u_3$$

e

$$P(0) = a^2 b > 0\,, P\Big(\frac{a}{b}\Big) = -3\,\frac{a^4}{b^3} - 6\,\frac{a^3}{b} - 3\,a^2 b < 0\,,$$

abbiamo $0 < c_1 < \dfrac{a}{b}$.

D'altro canto $P(u)$ cresce in $[u_3\,, +\infty)$ strettamente da $P(u_3) < 0$ a $+\infty$ e di conseguenza si annulla in un solo $c_2 > u_3$.

Conclusione: il polinomio $P(u)$ ha esattamente due zeri reali,

$$0 < c_1 < \frac{a}{b} < \frac{a + \sqrt{a^2 + a\,b^2}}{b} < c_2$$

e

$$\begin{aligned} &P(u) > 0 \text{ per } u < c_1\,, \\ &P(u) < 0 \text{ per } c_1 < u < c_2\,, \\ &P(u) > 0 \text{ per } u > c_2\,. \end{aligned} \tag{5}$$

La discussione nel caso $a = b^2$ (questo è il caso del compito 1) con $b = 2$) è più semplice: avendo la possibilità di calcolare esplicitamente i zeri di $P(u)$, per lo studio del segno di $P(u)$ non abbiamo bisogno di comprendere l'andamento completo del suo grafico.

Infatti, per $a = b^2$ abbiamo

$$\begin{aligned}
P(u) &= b\,u^4 - 4\,b^2u^3 - 6\,b^3u^2 - 4\,b^4u + b^5\,.\\
&= b\,(u^4 - 4\,b\,u^3 - 6\,b^2u^2 - 4\,b^3u + b^4)\\
&= b\Big((u^4 - 4\,b\,u^3 + 6\,b^2u^2 - 4\,b^3u + b^4) - 12\,b^2u^2\Big)\\
&= b\Big((u-b)^4 - (2\sqrt{3}\,b\,u)^2\Big)\\
&= b\Big(\underbrace{(u-b)^2 + 2\sqrt{3}\,b\,u}_{>0}\Big)\Big((u-b)^2 - 2\sqrt{3}\,b\,u\Big)
\end{aligned}$$

e risulta che il segno di $P(u)$ coincide con il segno del polinomio di secondo grado

$$(u-b)^2 - 2\sqrt{3}\,b\,u = u^2 - 2\,(1+\sqrt{3})\,b\,u + b^2.$$

I zeri di questo polinomio di secondo grado si calcolano usando la formula nota :

$$\begin{aligned}
c_{1,2} &= (1+\sqrt{3})\,b \pm \sqrt{(1+\sqrt{3})^2b^2 - b^2}\\
&= (1+\sqrt{3})\,b \pm b\sqrt{2\sqrt{3}+3}\\
&= b\Big(1+\sqrt{3} \pm \sqrt[4]{3}\sqrt{2+\sqrt{3}}\Big)\\
&= b\left(1+\sqrt{3} \pm \frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{2}}\sqrt{4+2\sqrt{3}}\right)\\
&= b\left(1+\sqrt{3} \pm \frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{2}}\sqrt{(1+\sqrt{3})^2}\right)\\
&= (1+\sqrt{3})\left(1 \pm \frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt[4]{4}}\right)b\,.
\end{aligned}$$

Si verifica facilmente che

$$0 < \underbrace{(1+\sqrt{3})\left(1 - \frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt[4]{4}}\right)b}_{=c_1} < b < \underbrace{(1+\sqrt{3})\left(1 + \frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt[4]{4}}\right)b}_{=c_2}$$

ed abbiamo (5).

Sappiamo ora che

$$f''(x) = \frac{-\,e^x}{(e^{2x}+a)^2(e^x+b)^2}\,P\big(e^x\big)$$

dove $P(u)$ è un polinomio di quarto grado con due zeri reali

$$0 < c_1 < \frac{a}{b} < \frac{a+\sqrt{a^2+a\,b^2}}{b} < c_2$$

e vale (5). Perciò

$$-\infty < \ln c_1 < \ln\frac{a}{b} < \ln\frac{a+\sqrt{a^2+a\,b^2}}{b} < \ln c_2 < +\infty$$

e

$$\begin{aligned}
&f''(x) < 0 \text{ per } x < \ln c_1\,,\\
&f''(x) > 0 \text{ per } \ln c_1 < x < \ln c_2\,,\\
&f''(x) < 0 \text{ per } x > \ln c_2\,,
\end{aligned}$$

cioè

$$\begin{aligned}
&f \text{ è concava in } (-\infty\,, \ln c_1\,]\,,\\
&f \text{ è convessa in } [\,\ln c_1\,, \ln c_2\,]\,,\\
&f \text{ è concava in } [\,\ln c_2\,, +\infty)\,.
\end{aligned}$$

In particolare, $\ln c_1$ e $\ln c_2$ sono punti di flesso di f.

Abbiamo già visto che $x_{\min} = \ln(-\,b+\sqrt{b^2+a}\,)$ si trova a sinistra di $\ln\dfrac{a}{b}$. Vediamo adesso quale è la sua posizione rispetto a $\ln c_1$:

A questo fine ci serve il segno di $f''(x_{\min})$. Ricordando che

$$f''(x) = \frac{4\,a\,e^{2x}}{(e^{2x}+a)^2} - \frac{b\,e^x}{(e^x+b)^2}\,,$$

risulta

$$\begin{aligned}
f''(x_{\min}) &= \frac{4\,a\big(-\,b+\sqrt{b^2+a}\,\big)^2}{\Big(\big(-\,b+\sqrt{b^2+a}\,\big)^2+a\Big)^2} - \frac{b\big(-\,b+\sqrt{b^2+a}\,\big)}{\big(-\,b+\sqrt{b^2+a}+b\big)^2}\\
&= \frac{4\,a\big(-\,b+\sqrt{b^2+a}\,\big)^2}{\Big(2\,b^2+2\,a-2\,b\sqrt{b^2+a}\Big)^2} - \frac{b\big(-\,b+\sqrt{b^2+a}\,\big)}{b^2+a}
\end{aligned}$$

$$= \frac{a\big(-b+\sqrt{b^2+a}\big)^2}{(b^2+a)\big(-b+\sqrt{b^2+a}\big)^2} - \frac{b\big(-b+\sqrt{b^2+a}\big)}{b^2+a}$$
$$= \frac{a+b^2-b\sqrt{b^2+a}}{b^2+a}$$
$$= \frac{\sqrt{b^2+a}-b}{\sqrt{b^2+a}} > 0\,.$$

Perciò $x_{\min}$ deve trovarsi nell'intervallo $(\ln c_1\,, \ln c_2)$ e quindi

$$-\infty < \ln c_1 < x_{\min} < \ln\frac{a}{b} < \ln\frac{a+\sqrt{a^2+a\,b^2}}{b} < \ln c_2 < +\infty\,.$$

e) Riportiamo il comportamento di f', f'' e f nella seguente tabella :

x	$-\infty$	$\ln c_1$		$x_{\min}$		$\ln\frac{a}{b}$		$\ln\frac{a+\sqrt{a^2+ab}}{b}$		$\ln c_2$		$+\infty$
f'		$-$		0	$+$	$\frac{a}{b^2+a}$		$+$				
f''	$-$	0				$+$				0	$-$	
f	$\ln\frac{a}{b}$	$\searrow$	$\ln\frac{2a}{b+\sqrt{b^2+a}}$		$\nearrow$	$\ln\frac{a}{b}$		$\nearrow$				$+\infty$

Usando le informazioni di cui sopra, tracciamo ora il grafico di f :
$y = \ln\dfrac{a}{b}$ è asintoto orizzontale per $x \to -\infty$ e il grafico di f scende da $\ln\dfrac{a}{b}$ fino al punto di minimo

$$\big(x_{\min}\,, f(x_{\min})\big) = \Big(\ln(-b+\sqrt{b^2+a})\,, \ln\frac{2a}{b+\sqrt{b^2+a}}\Big),$$

nel quale ha tangente orizzontale. Fino al punto di flesso $\ln c_1 < x_{\min}$ il grafico è concavo, e dopo diventa convesso.

Da questo punto il grafico comincia a salire. Nel punto $\Big(\ln\dfrac{a}{b}\,, \ln\dfrac{a}{b}\Big)$, nel quale il coefficiente angolare della retta tangente è uguale a $\dfrac{a}{b^2+a}$, sale sopra l'asintoto orizzontale $y = \ln\dfrac{a}{b}$ ed attraversa anche l'asintoto obliquo $y = x$ per $x \to +\infty$, passando sotto di esso. Fino al secondo punto di flesso $\ln c_2 > \ln\dfrac{a+\sqrt{a^2+ab}}{b} > \ln\dfrac{a}{b}$ il grafico resta convesso e dopo diventa concavo.

Finalmente il grafico sale a $+\infty$ avendo la retta $y = x$ come asintoto obliquo per $x \to +\infty$, restanto sempre sotto di essa.

2) : Siccome, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ ed ogni $k \geq 1$,

$$k^{\alpha}, k^{-\alpha} > 0 \Longrightarrow e^{k^{\alpha}} + e^{k^{-\alpha}} > 1 + 1 = 2 \Longrightarrow \ln\left(e^{k^{\alpha}} + e^{k^{-\alpha}}\right) > 0\,,$$

si tratta di una serie a termini strettamente postivi.

Per $\alpha = 0$ il termine

$$\frac{\sqrt{k^{\alpha} + 1}}{\ln\left(e^{k^{\alpha}} + e^{k^{-\alpha}}\right)} = \frac{\sqrt{1+1}}{\ln\left(e + e\right)} = \frac{\sqrt{2}}{1 + \ln 2}$$

non converge a 0, perciò la serie diverge.

Ora discutiamo separatamente i casi $\alpha > 0$ e $\alpha < 0$.

Per $\alpha > 0$ abbiamo

$$\sqrt{k^{\alpha} + 1} = \sqrt{k^{\alpha}\left(1 + \frac{1}{k^{\alpha}}\right)} = k^{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{1 + \frac{1}{k^{\alpha}}}$$

dove

$$\lim_{k \to \infty} \sqrt{1 + \frac{1}{k^{\alpha}}} = 1\,,$$

nonché

$$\begin{aligned}
\ln\left(e^{k^{\alpha}} + e^{k^{-\alpha}}\right) &= \ln\left(e^{k^{\alpha}}\left(1 + e^{k^{-\alpha} - k^{\alpha}}\right)\right) \\
&= \ln e^{k^{\alpha}} + \ln\left(1 + e^{k^{-\alpha} - k^{\alpha}}\right) \\
&= k^{\alpha} + \ln\left(1 + e^{k^{-\alpha} - k^{\alpha}}\right) \\
&= k^{\alpha}\left(1 + \frac{\ln\left(1 + e^{k^{-\alpha} - k^{\alpha}}\right)}{k^{\alpha}}\right)
\end{aligned}$$

dove

$$\lim_{k \to \infty} \ln\left(1 + e^{k^{-\alpha} - k^{\alpha}}\right) = \ln\left(1 + e^{0 - \infty}\right) = \ln 1 = 0$$

e quindi

$$\lim_{k \to \infty} \left(1 + \frac{\ln\left(1 + e^{k^{-\alpha} - k^{\alpha}}\right)}{k^{\alpha}}\right) = 1 + \frac{0}{+\infty} = 1\,.$$

Risulta che

$$\frac{\sqrt{k^\alpha+1}}{\ln\left(e^{k^\alpha}+e^{k^{-\alpha}}\right)} = \frac{k^{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{1+\dfrac{1}{k^\alpha}}}{k^\alpha\left(1+\dfrac{\ln\left(1+e^{k^{-\alpha}-k^\alpha}\right)}{k^\alpha}\right)}$$

$$= \frac{1}{k^{\frac{\alpha}{2}}}\cdot\frac{\sqrt{1+\dfrac{1}{k^\alpha}}}{1+\dfrac{\ln\left(1+e^{k^{-\alpha}-k^\alpha}\right)}{k^\alpha}}$$

e così

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\dfrac{\sqrt{k^\alpha+1}}{\ln\left(e^{k^\alpha}+e^{k^{-\alpha}}\right)}}{\dfrac{1}{k^{\frac{\alpha}{2}}}} = \lim_{k\to\infty}\frac{\sqrt{1+\dfrac{1}{k^\alpha}}}{1+\dfrac{\ln\left(1+e^{k^{-\alpha}-k^\alpha}\right)}{k^\alpha}} = 1\left\{\begin{array}{l} >0 \\ <+\infty \end{array}\right. .$$

Per il criterio del confronto asintotico risulta che la nostra serie converge per i stessi $\alpha>0$ per i quali converge la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{\frac{\alpha}{2}}},$$

cioè esattamente per

$$\frac{\alpha}{2}>1 \Longleftrightarrow \alpha>2\,.$$

Per $\alpha<0$ abbiamo invece

$$\lim_{k\to\infty}\sqrt{k^\alpha+1}=\sqrt{0+1}=1\,,$$

nonché

$$\begin{aligned}\ln\left(e^{k^\alpha}+e^{k^{-\alpha}}\right) &= \ln\left(e^{k^{-\alpha}}\left(e^{k^\alpha-k^{-\alpha}}+1\right)\right)\\ &= \ln e^{k^{-\alpha}}+\ln\left(e^{k^\alpha-k^{-\alpha}}+1\right)\\ &= k^{-\alpha}+\ln\left(e^{k^\alpha-k^{-\alpha}}+1\right)\\ &= k^{-\alpha}\left(1+\frac{\ln\left(e^{k^\alpha-k^{-\alpha}}+1\right)}{k^{-\alpha}}\right)\end{aligned}$$

dove

$$\lim_{k\to\infty} \ln\left(e^{k^\alpha - k^{-\alpha}} + 1\right) = \ln\left(e^{0-\infty} + 1\right) = \ln 1 = 0$$

e quindi

$$\lim_{k\to\infty} \left(1 + \frac{\ln\left(e^{k^\alpha - k^{-\alpha}} + 1\right)}{k^{-\alpha}}\right) = 1 + \frac{0}{+\infty} = 1\,.$$

Di conseguenza

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{k^\alpha + 1}}{\ln\left(e^{k^\alpha} + e^{k^{-\alpha}}\right)} &= \frac{\sqrt{k^\alpha + 1}}{k^{-\alpha}\left(1 + \dfrac{\ln\left(e^{k^\alpha - k^{-\alpha}} + 1\right)}{k^{-\alpha}}\right)} \\ &= \frac{1}{k^{-\alpha}} \cdot \frac{\sqrt{k^\alpha + 1}}{1 + \dfrac{\ln\left(e^{k^\alpha - k^{-\alpha}} + 1\right)}{k^{-\alpha}}}\end{aligned}$$

e perciò

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\dfrac{\sqrt{k^\alpha + 1}}{\ln\left(e^{k^\alpha} + e^{k^{-\alpha}}\right)}}{\dfrac{1}{k^{-\alpha}}} = \lim_{k\to\infty} \frac{\sqrt{k^\alpha + 1}}{1 + \dfrac{\ln\left(e^{k^\alpha - k^{-\alpha}} + 1\right)}{k^{-\alpha}}} = 1 \begin{cases} > 0 \\ < +\infty \end{cases} .$$

Per il criterio del confronto asintotico risulta che la nostra serie converge per i stessi $\alpha < 0$ per i quali converge la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{-\alpha}}\,,$$

cioè esattamente per

$$-\alpha > 1 \Longleftrightarrow \alpha < -1\,.$$

Concludiamo che la serie a termini positivi

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k^\alpha + 1}}{\ln\left(e^{k^\alpha} + e^{k^{-\alpha}}\right)}$$

converge per $\alpha > 2$ e per $\alpha < -1$, mentre diverge per $-1 \leq \alpha \leq 2$.

3) : a) Calcoliamo prima la primitiva

$$\int \left(\operatorname{arctg} x\right)^2 x \,\mathrm{d}x\,.$$

Per trasformare l'arcotangente nell'integranda in una funzione razionale tramite derivazione, usiamo integrazione per parti. Osservando che x è la derivata di $\dfrac{1}{2}\,(1+x^2)$ otteniamo

$$\begin{aligned}
\int \big(\operatorname{arctg} x\big)^2 x\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int \big(\operatorname{arctg} x\big)^2\,\mathrm{d}(1+x^2) \\
&= \frac{(1+x^2)\big(\operatorname{arctg} x\big)^2}{2} - \int (1+x^2)\big(\operatorname{arctg} x\big)\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{(1+x^2)\big(\operatorname{arctg} x\big)^2}{2} - \int \big(\operatorname{arctg} x\big)\mathrm{d}x\,.
\end{aligned}$$

Usando di nuovo integrazione per parti risulta

$$\begin{aligned}
\int \big(\operatorname{arctg} x\big)\mathrm{d}x &= x\,\big(\operatorname{arctg} x\big) - \int x\,\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\
&= x\,\big(\operatorname{arctg} x\big) - \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}(1+x^2) \\
&= x\,\big(\operatorname{arctg} x\big) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + \text{costante}
\end{aligned}$$

e concludiamo che

$$\begin{aligned}
&\int \big(\operatorname{arctg} x\big)^2 x\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{(1+x^2)\big(\operatorname{arctg} x\big)^2}{2} - x\,\big(\operatorname{arctg} x\big) + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + \text{costante}\,.
\end{aligned}$$

Cosicché

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \big(\operatorname{arctg} x\big)^2 x\,\mathrm{d}x \\
&= \left(\frac{(1+x^2)\big(\operatorname{arctg} x\big)^2}{2} - x\,\big(\operatorname{arctg} x\big) + \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right)\Bigg|_{x=0}^{x=1} \\
&= \frac{2\big(\operatorname{arctg} 1\big)^2}{2} - \big(\operatorname{arctg} 1\big) + \frac{1}{2}\ln 2 = \frac{\pi^2}{16} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln 2\,.
\end{aligned}$$

b) Siccome

$$\lim_{0<x\to 0} \big(\operatorname{arctg} x\big)^2 \frac{1}{x} \overset{t=\operatorname{arctg} x}{=} \lim_{0<t\to 0} \frac{t^2}{\operatorname{tg} t} = \lim_{0<t\to 0} \big(t \cos t\big) \frac{t}{\sin t} = 0\,,$$

l'integranda $\big(\operatorname{arctg} x\big)^2 \dfrac{1}{x}$ si estende ad una funzione continua su tutta la semiretta $[0\,, +\infty)$ e perciò l'integrale

$$\int_0^{+\infty} \big(\operatorname{arctg} x\big)^2 \frac{1}{x}\, \mathrm{d}x$$

non è improprio in 0 . Di consequenza la sua convergenza è equivalente alla convergenza di

$$\int_1^{+\infty} \big(\operatorname{arctg} x\big)^2 \frac{1}{x}\, \mathrm{d}x$$

Ma la funzione arcotangente essendo crescente, $\operatorname{arctg} x \geq \operatorname{arctg} 1 = \dfrac{\pi}{4}$ per ogni $x \geq 1$ e di conseguenza

$$\int_1^{+\infty} \big(\operatorname{arctg} x\big)^2 \frac{1}{x}\, \mathrm{d}x \geq \frac{\pi^2}{16} \int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\, \mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{16} \ln x \Big|_{x=1}^{x=+\infty} = +\infty\,.$$

Cosicché l'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \big(\operatorname{arctg} x\big)^2 \frac{1}{x}\, \mathrm{d}x$$

diverge.

Commento.

Studiamo la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \big(\operatorname{arctg} x\big)^2 x^\alpha \mathrm{d}x = \lim_{\substack{0<\varepsilon\to 0\\ b\to+\infty}} \int_\varepsilon^b \big(\operatorname{arctg} x\big)^2 x^\alpha \mathrm{d}x \tag{6}$$

dove α è un parametro reale. L'integranda essendo positiva, possiamo ricorrere al criterio di confronto asintotico.

Per la convergenza in 0 , cioè dell'integrale

$$\int_0^1 \left(\operatorname{arctg} x\right)^2 x^\alpha \mathrm{d}x = \lim_{0<\varepsilon\to 0} \int_\varepsilon^1 \left(\operatorname{arctg} x\right)^2 x^\alpha \mathrm{d}x \,, \tag{7}$$

usiamo confronto con

$$\int_0^1 x^{2+\alpha} \mathrm{d}x \ : \tag{8}$$

Siccome

$$\lim_{0<x\to 0} \frac{\left(\operatorname{arctg} x\right)^2 x^\alpha}{x^{2+\alpha}} \overset{t=\operatorname{arctg} x}{=} \lim_{0<t\to 0} \frac{t^2}{(\operatorname{tg} t)^2} = \lim_{0<t\to 0} \left(\frac{t}{\sin t}\right)^2 \cos^2 t$$
$$= \ 1 \begin{cases} > 0 \\ < +\infty \end{cases} ,$$

gli integrali (7) e (8) convergono per i stessi α . Ma è noto che l'integrale (8) converge se e soltanto se

$$2+\alpha > -1 \Longleftrightarrow \alpha > -3 \,.$$

D'altro canto, per la convergenza a $+\infty$, cioè dell'integrale

$$\int_1^{+\infty} \left(\operatorname{arctg} x\right)^2 x^\alpha \mathrm{d}x = \lim_{b\to +\infty} \int_1^b \left(\operatorname{arctg} x\right)^2 x^\alpha \mathrm{d}x \,, \tag{9}$$

usiamo confronto con

$$\int_0^1 x^\alpha \mathrm{d}x \ : \tag{10}$$

Siccome

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\left(\operatorname{arctg} x\right)^2 x^\alpha}{x^\alpha} = \lim_{x\to +\infty} \left(\operatorname{arctg} x\right)^2 = \frac{\pi^2}{4} \begin{cases} > 0 \\ < +\infty \end{cases} ,$$

gli integrali (9) e (10) convergono per i stessi α . Ma, come è ben noto, l'integrale (10) converge se e soltanto se

$$\alpha < -1 \,.$$

Concludiamo che l'integrale (6) converge se e soltanto se $-3 < \alpha < -1$ (nell'esercizio 3) b) abbiamo avuto $\alpha = -1$ e risultava divergenza).

4) **:** a) I massimi e minimi locali di f sono *punti stazionari*, cioè annullano le derivate parziali di

$$f(x\,,y) = \frac{x\,y}{27} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}\,, \qquad (x\,,y) \in (0\,,+\infty) \times (0\,,+\infty)\,.$$

Per trovarli, calcoliamo le derivate parziali di f :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y}{27} - \frac{1}{x^2}\,, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{27} - \frac{1}{y^2}\,.$$

Risulta che i punti stazionari di f sono le soluzioni del sistema di equazioni

$$\begin{cases} \dfrac{y}{27} - \dfrac{1}{x^2} = 0 \\ \dfrac{x}{27} - \dfrac{1}{y^2} = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{27}{x^2} \\ x = \dfrac{27}{y^2} \end{cases}. \tag{11}$$

Sostituendo $y = \dfrac{27}{x^2}$ in la seconda equazione si ottiene

$$x = 27\,\frac{x^4}{27^2} \Longleftrightarrow x^3 = 27 \Longleftrightarrow x = 3\,,$$

e poi, dalla prima equazione,

$$y = \frac{27}{3^2} = 3\,.$$

Cosicché il solo punto stazionario di f è $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Per stabilire se questo punto è un punto di massimo o minimo locale di f, calcoliamo le derivate parziali di secondo ordine :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{2}{x^3}\,, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{1}{27}\,, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{2}{y^3}\,.$$

Perciò nel punto $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ le derivate parziali di secondo ordine sono

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(3,3) = \frac{2}{27}\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(3,3) = \frac{1}{27}\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(3,3) = \frac{2}{27}$$

e quindi la matrice hessiana è

$$H_f(3,3) = \begin{pmatrix} 2/27 & 1/27 \\ 1/27 & 2/27 \end{pmatrix}\,.$$

Siccome

$$\det H_f(3,3) = \frac{4}{27^2} - \frac{1}{27^2} = \frac{3}{27^2} = \frac{4}{243} > 0\,,$$

la matrice $H_f(3,3)$ ha due autovalori non zeri dello stesso segno. Ma, siccome la traccia della hessiana è > 0, gli autovalori sono strettamente positivi e risulta che $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ è un punto di minimo locale.

Concludiamo che f non ha nessun punto di massimo locale, mentre $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ è il suo unico punto di minimo locale, nel quale prende il valore

$$f(3\,,3) = \frac{9}{27} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1\,.$$

b) Ogni punto di massimo globale di f sarebbe un punto di massimo locale e siccome f non ha punti di massimo locale, tanto più non può avere punti di massimo globale.

Diversamente, la funzione f non ha punti di massimo globale perché non è limitata superiormente. Infatti, per esempio,

$$f(k\,,1) = \frac{k}{27} + \frac{1}{k} + 1 \geq \frac{k}{27} \longrightarrow +\infty\,,$$

oppure

$$f\Big(1\,,\frac{1}{k}\Big) = \frac{1}{27}\cdot\frac{1}{k} + 1 + k \geq k \longrightarrow +\infty\,.$$

D'altro canto, siccome f ha il solo punto di minimo locale $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$, il solo punto di minimo globale possibile è questo punto. Quindi se mostriamo che f ha almeno un punto di minimo globale, risulterà che l'unico punto di minimo globale di f è $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$.

A questo fine osserviamo che

$$\begin{aligned} & f(3\,,3) = 1\,,\\ 0 < x < 1\,, y > 0 \Longrightarrow & f(x\,,y) > \frac{1}{x} > 1\,,\\ 0 < y < 1\,, x > 0 \Longrightarrow & f(x\,,y) > \frac{1}{y} > 1\,,\\ x > 0\,, y > 0\,, xy > 27 \Longrightarrow & f(x\,,y) > \frac{xy}{27} > 1\,. \end{aligned}$$

Risulta che per ogni vettore $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ nel primo quadrante aperto di $\mathbb{R}^2$ e fuori dell'insieme

$$K := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} ; \, x \geq 1 \, , y \geq 1 \, , x \, y \leq 27 \right\}$$

abbiamo $f(x\,,y) > 1 = f(3,3)$. Ma K è chiuso e limitato :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in K \Longrightarrow 1 \leq x = x \cdot 1 \leq x \cdot y \leq 27 \text{ cioè } 1 \leq x \leq 27$$

e, similmente,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in K \Longrightarrow 1 \leq y = 1 \cdot y \leq x \cdot y \leq 27 \text{ cioè } 1 \leq y \leq 27.$$

Perciò la restrizione su K della funzione continua f ha almeno un punto di minimo $\begin{pmatrix} x_K \\ y_K \end{pmatrix}$. Siccome $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \in K$, abbiamo

$$f(x_K\,,y_K) \leq f(3\,,3) = 1 < f(x\,,y)$$

per ogni $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \notin K$ nel primo quadrante aperto di $\mathbb{R}^2$. Ma per la scelta di $\begin{pmatrix} x_K \\ y_K \end{pmatrix}$ vale ovviamente

$$f(x_K\,,y_K) \leq f(x\,,y)\,, \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in K\,,$$

perciò

$$f(x_K\,,y_K) \leq f(x\,,y) \text{ per ogni } (x\,,y) \in (0\,,+\infty) \times (0\,,+\infty)\,.$$

In altre parole $\begin{pmatrix} x_K \\ y_K \end{pmatrix}$ è punto di minimo globale per f.

Soluzione algebrica breve.

È noto che per tre (o più) numeri reali ≥ 0 che non sono tutti uguali, la loro media aritmetica è strettamente maggiore della media geometrica. Esplicitamente, per $a_1\,,a_2\,,a_3 \geq 0$ non tutti uguali abbiamo

$$\frac{1}{3}\big(a_1 + a_2 + a_3\big) > \sqrt[3]{a_1 a_2 a_3}\,.$$

Se invece $a_1 = a_2 = a_3$ allora ovviamente

$$\frac{1}{3}\big(a_1 + a_2 + a_3\big) = \sqrt[3]{a_1 a_2 a_3}\,.$$

In particolare, per ogni $x\,,y > 0\,$, ponendo

$$a_1 := \frac{x\,y}{27}\,, \quad a_2 := \frac{1}{x}\,, \quad a_3 := \frac{1}{y}$$

risulta

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}\,f(x\,,y) &= \frac{1}{3}\left(\frac{x\,y}{27} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \geq \sqrt[3]{\frac{x\,y}{27}\,\frac{1}{x}\,\frac{1}{y}} = \frac{1}{3}\,,\\ f(x\,,y) &\geq 1\,,\end{aligned}$$

dove l'uguaglianza accade se e solo se

$$\underbrace{\frac{x\,y}{27}}_{=\,a_1} = \underbrace{\frac{1}{x}}_{=\,a_2} = \underbrace{\frac{1}{y}}_{=\,a_3}\,,$$

cioè se è soddisfatto il sistema di equazioni (11). Ma, come abbiamo già visto, l'unica soluzione del sistema (11) è $x = y = 3$ e di conseguenza $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ è l'unico punto di minimo globale di f.

5) : a) La distanza del punto

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} 2\cos t - \cos(2t) \\ 2\sin t - \sin(2t) \end{pmatrix}$$

su C dall'origine è

$$\begin{aligned}\big\|\gamma(t)\big\| &= \sqrt{\big(2\cos t - \cos(2t)\big)^2 + \big(2\sin t - \sin(2t)\big)^2}\\ &= \sqrt{5 - 4\big(\cos(2t)\cos t + \sin(2t)\sin t\big)}\\ &= \sqrt{5 - 4\cos(2t - t)} = \sqrt{5 - 4\cos t}\end{aligned}$$

e quindi è minimale quando $\cos t = 1\,$, cioè per $t = 0\,$, ed è massimale quando $\cos t = -1\,$, cioè per $t = \pi\,$. Perciò l'unico punto sulla curva C a distanza minima $\sqrt{5-4} = 1$ dall'origine è

$$\gamma(0) = \begin{pmatrix} 2\cos(0) - \cos(0) \\ 2\sin(0) - \sin(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\,,$$

mentre l'unico punto su C a distanza massima $\sqrt{5+4}=3$ dall'origine è

$$\gamma(\pi)=\begin{pmatrix} 2\cos\pi-\cos(2\pi) \\ 2\sin\pi-\sin(2\pi)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 \\ 0\end{pmatrix}.$$

b) Per calcolare la lunghezza di C abbiamo bisogno dell'elemento di lunghezza. Siccome

$$\gamma'(t)=\begin{pmatrix} -2\sin t+2\sin(2t) \\ 2\cos t-2\cos(2t)\end{pmatrix}$$

e quindi

$$\begin{aligned}\|\gamma'(t)\| &= \sqrt{\big(-2\sin t+2\sin(2t)\big)^2+\big(2\cos t-2\cos(2t)\big)^2} \\ &= \sqrt{8-8\big(\cos(2t)\cos t+\sin(2t)\sin t\big)} \\ &= \sqrt{8-8\cos(2t-t)}=\sqrt{8\,(1-\cos t)}=\sqrt{16\sin^2\frac{t}{2}} \\ &= 4\left|\sin\frac{t}{2}\right|,\end{aligned}$$

l'elemento di lunghezza di C è

$$\mathrm{d}s=4\left|\sin\frac{t}{2}\right|\mathrm{d}t.$$

Risulta che la lunghezza di C è

$$\begin{aligned}\int\limits_C \mathrm{d}s &= \int\limits_0^{2\pi} 4\left|\sin\frac{t}{2}\right|\mathrm{d}t = 8\int\limits_0^{\pi}\sin\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t \overset{t'=\frac{t}{2}}{=} 16\int\limits_0^{\pi/2}\sin t'\,\mathrm{d}t' \\ &= 16\big(-\cos t'\big)\Big|_{t'=0}^{t'=\pi/2}=16\,.\end{aligned}$$

Generalizzazione.

Risolviamo l'esercizio per la curva C_k definita tramite la parametrizzazione

$$\begin{cases} x(t)=k\cos t-\cos(kt) \\ y(t)=k\sin t-\sin(kt)\end{cases},\qquad 0\le t\le 2\pi\,,$$

dove $k\ge 2$ è un intero.

a) La distanza del punto

$$\gamma_k(t) = \begin{pmatrix} k\cos t - \cos(kt) \\ k\sin t - \sin(kt) \end{pmatrix}$$

su C_k dall'origine è

$$\begin{aligned}
\big\|\gamma_k(t)\big\| &= \sqrt{\big(k\cos t - \cos(kt)\big)^2 + \big(k\sin t - \sin(kt)\big)^2} \\
&= \sqrt{k^2 + 1 - 2\,k\Big(\cos(kt)\cos t + \sin(kt)\sin t\Big)} \\
&= \sqrt{k^2 + 1 - 2\,k\cos\Big((k-1)\,t\Big)}
\end{aligned}$$

e quindi è minimale quando $\cos\Big((k-1)\,t\Big) = 1$ ed è massimale quando $\cos\Big((k-1)\,t\Big) = -1$.

Perciò esistono $k-1$ punti sulla curva C_k a distanza minima

$$\sqrt{k^2 + 1 - 2\,k} = k - 1$$

dall'origine, corrispondenti ai valori del parametro t uguali a

$$\frac{\pi}{k-1}\,,\,3\,\frac{\pi}{k-1}\,,\,5\,\frac{\pi}{k-1}\;,\;\ldots\,,\,(2k-3)\,\frac{\pi}{k-1}\;.$$

Similmente, esistono $k-1$ punti sulla curva C_k a distanza massima

$$\sqrt{k^2 + 1 + 2\,k} = k + 1$$

dall'origine, corrispondenti ai valori del parametro t uguali a

$$0\,,\,2\,\frac{\pi}{k-1}\,,\,4\,\frac{\pi}{k-1}\;,\;\ldots\,,\,(2k-2)\,\frac{\pi}{k-1}\;.$$

b) Per calcolare la lunghezza di C_k abbiamo bisogno dell'elemento di lunghezza. Siccome

$$\gamma_k'(t) = \begin{pmatrix} -\,k\sin t + k\sin(kt) \\ k\cos t - k\cos(kt) \end{pmatrix}$$

e quindi

$$\big\|\gamma_k'(t)\big\| = \sqrt{\big(-\,k\sin t + k\sin(kt)\big)^2 + \big(k\cos t - k\cos(kt)\big)^2}$$

$$= \sqrt{2\,k^2 - 2\,k^2\big(\cos(kt)\cos t + \sin(kt)\sin t\big)}$$
$$= \sqrt{2\,k^2\Big(1 - \cos\big((k-1)t\big)\Big)} = \sqrt{4\,k^2 \sin^2 \frac{(k-1)\,t}{2}}$$
$$= 2k\left|\,\sin\frac{(k-1)\,t}{2}\right|,$$

l'elemento di lunghezza di C_k è

$$\mathrm{d}s = 2k\left|\,\sin\frac{(k-1)\,t}{2}\right|\mathrm{d}t\,.$$

Risulta che la lunghezza di C_k è

$$\int\limits_{C_k}\mathrm{d}s = \int\limits_0^{2\pi} 2k\left|\,\sin\frac{(k-1)\,t}{2}\right|\mathrm{d}t \overset{t' = \frac{(k-1)t}{2}}{=} 2k\int\limits_0^{(k-1)\pi} |\sin t'|\,\frac{2}{k-1}\,\mathrm{d}t'$$
$$= 4k\int\limits_0^{\pi}\sin t'\,\mathrm{d}t' = 4k\big(-\cos t'\big)\Big|_{t'=0}^{t'=\pi} = 8k\,.$$

c) Mostriamo che la parametrizzazione

$$\begin{cases} x(t) = k\cos t - \cos(kt) \\ y(t) = k\sin t - \sin(kt) \end{cases}, \qquad 0 \le t < 2\pi$$

di $C_k\,, k \ge 2\,,$ è iniettiva.

Useremo la scrittura complessa: guardiamo il punto

$$\gamma_k(t) = \begin{pmatrix} k\cos t - \cos(kt) \\ k\sin t - \sin(kt) \end{pmatrix}$$

di C_k come il numero complesso

$$\gamma_k(t) = k\cos t - \cos(kt) + i\big(k\sin t - \sin(kt)\big) = k\,e^{it} - e^{ikt}.$$

Dobbiamo quindi mostrare che

$$k\,e^{it} - e^{ikt} = k\,e^{it'} - e^{ikt'}\,, \qquad 0 \le t\,, t' < 2\pi$$

implica $t = t'$.

Ma $k\,e^{it} - e^{ikt} = k\,e^{it'} - e^{ikt'}$ è equivalente a

$$k\,(e^{it} - e^{it'}) = e^{ikt} - e^{ikt'} = (e^{it})^k - (e^{it'})^k$$
$$= (e^{it} - e^{it'})\Big(\underbrace{(e^{it})^{k-1} + (e^{it})^{k-2}(e^{it'}) + \,...\, + (e^{it'})^{k-1}}_{k \text{ addendi}}\Big)$$

e quindi è possibile solo se $e^{it} - e^{it'} = 0 \Longleftrightarrow t = t'$ oppure

$$\sum_{j=0}^{k-1} (e^{it})^{k-1-j}(e^{it'})^j = (e^{it})^{k-1} + (e^{it})^{k-2}(e^{it'}) + \dots + (e^{it'})^{k-1} = k\,. \quad (12)$$

Mostriamo che anche (12) implica l'uguaglianza $t = t'$.

Infatti, siccome $\mathrm{Re}\Big((e^{it})^{k-1-j}(e^{it'})^j\Big) \leq 1$ per ogni $0 \leq j \leq k-1$ e

$$\sum_{j=0}^{k-1} \mathrm{Re}\Big((e^{it})^{k-1-j}(e^{it'})^j\Big) = \mathrm{Re}(k) = k\,,$$

dobbiamo avere $\mathrm{Re}\Big((e^{it})^{k-1-j}(e^{it'})^j\Big) = 1$ per ogni $0 \leq j \leq k-1$. Ma, siccome $\big|(e^{it})^{k-1-j}(e^{it'})^j\big| = 1$, abbiamo allora anche

$$\Big|\mathrm{Im}\Big((e^{it})^{k-1-j}(e^{it'})^j\Big)\Big|$$
$$= \sqrt{\big|(e^{it})^{k-1-j}(e^{it'})^j\big|^2 - \Big(\mathrm{Re}\Big((e^{it})^{k-1-j}(e^{it'})^j\Big)\Big)^2} = \sqrt{1^2 - 1^2} = 0$$

e quindi

$$e^{i\big((k-1-j)t+jt'\big)} = (e^{it})^{k-1-j}(e^{it'})^j = 1\,, \qquad 0 \leq j \leq k-1\,.$$

In altre parole

$$(k-1-j)t + jt' \in 2\pi\mathbb{Z} := \{2n\pi\,;\, n \in \mathbb{Z}\}\,, \qquad 0 \leq j \leq k-1\,.$$

In particolare $(k-1)t = (k-1-0)t + 0\,t' \in 2\pi\mathbb{Z}$ e risulta

$$j(t'-t) \in 2\pi\mathbb{Z} := \{2n\pi\,;\, n \in \mathbb{Z}\}\,, \qquad 1 \leq j \leq k-1\,.$$

Per $j = 1$ otteniamo $t' - t \in 2\pi\mathbb{Z}$ e, siccome $-2\pi < t' - t < 2\pi$, $t' - t$ può essere solo 0.

d) Studiamo finalmente le simmetrie lineari della curva $C_k\,, k \geq 2$.

Diciamo che la trasformazione lineare di $\mathbb{R}^2$ definita da una matrice reale invertibile

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

è una simmetria della curva C_k se applica il sostegno di C_k su se stesso. Per c) di cui sopra questo significa l'esistenza di una funzione bigettiva

$f_U : [\,0\,,2\pi) \longrightarrow [\,0\,,2\pi)$ (oppure $f_U : [\,0\,,2\pi) \longrightarrow (0\,,2\pi])$ tale che sia verificata

$$\begin{pmatrix} k\cos f_U(t) - \cos\big(k f_U(t)\big) \\ k\sin f_U(t) - \sin\big(k f_U(t)\big) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k\cos t - \cos(kt) \\ k\sin t - \sin(kt) \end{pmatrix}$$

per ogni $t \in [\,0\,,2\pi)$.

I casi più semplici che considereremo qui sono: la simmetria rispetto all'asse delle ascisse

$$U_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

e la simmetria rispetto all'asse delle ordinate

$$U_o = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nella scrittura complessa la simmetria rispetto all'asse delle ascisse significa il passaggio al coniugato complesso $z \longmapsto \overline{z}$ e la simmetria rispetto all'asse delle ordinate significa la trasformazione $z \longmapsto -\overline{z}$. Così la curva C_k è simmetrica rispetto all'asse delle ascisse se per ogni $t \in [\,0\,,2\pi)$ esiste un (necessariamente unico) $t' = f_{U_a}(t) \in [\,0\,,2\pi)$ tale che

$$k\,e^{it'} - e^{ikt'} = \overline{k\,e^{it} - e^{ikt}} = k\,e^{-it} - e^{-ikt} \tag{13}$$

ed è simmetrica rispetto all'asse delle ordinate se per ogni $t \in [\,0\,,2\pi)$ esiste un $t' = f_{U_o}(t) \in [\,0\,,2\pi)$ tale che

$$k\,e^{it'} - e^{ikt'} = -\big(\overline{k\,e^{it} - e^{ikt}}\big) = e^{-ikt} - k\,e^{-it}. \tag{14}$$

Si vede subito che la curva C_k è simmetrica rispetto all'asse delle ascisse per ogni $k \geq 2$. Infatti, (13) è verificata per $t' = 2\pi - t$.

L'analisi della simmetria rispetto all'asse delle ordinate è un pò più complicata. Se k è dispari e quindi $e^{ik\pi} = -1$, allora (14) è verificata con $t' = \pi - t$:

$$k\,e^{i(\pi - t)} - e^{ik(\pi - t)} = e^{i\pi}e^{-ikt} - e^{ik\pi}e^{-ikt} = e^{-ikt} - k\,e^{-it}.$$

(è vero che $\pi - t \in [\,0\,,2\pi)$ solo se $0 \leq t \leq \pi$, ma per $\pi < t < 2\pi$ possiamo prendere $t' = 2\pi + (\pi - t) = 3\pi - t \in (\pi\,,2\pi)$). Resta da vedere, che accade per k pari.

Verifichiamo che per k pari C_k non è simmetrica rispetto all'asse delle ordinate, mostrando che già per $t = 0$ non esiste $t' \in \mathbb{R}$ che soddisfi (14), cioè

$$k\, e^{it'} - e^{ikt'} = 1 - k \Longleftrightarrow e^{ikt'} = k - 1 + k\, e^{it'} . \tag{15}$$

Infatti, (15) implica

$$\begin{aligned} 1 = |e^{ikt'}| &= |k - 1 + k\, e^{it'}|^2 \\ &= (\overline{k - 1 + k\, e^{it'}})(k - 1 + k\, e^{it'}) \\ &= (k - 1 + k\, e^{-it'})(k - 1 + k\, e^{it'}) \\ &= (k-1)^2 + k^2 + (k-1)\, k\, e^{it'} + (k-1)\, k\, e^{-it'} \\ &= 2\, k^2 - 2\, k + 1 + 2\, (k-1)\, k \cos t' \\ &= 1 + 2\, (k-1)\, k\, (1 + \cos t') , \end{aligned}$$

cioè

$$1 + \cos t' = 0 \Longleftrightarrow t' = n\pi \text{ per } n \in \mathbb{Z} \text{ dispari.}$$

Ma allora, siccome k è pari, abbiamo $e^{ikt'} = e^{i(kn)\pi} = 1$ e quindi (15) non è soddisfatta : per $t' = n\pi$ con $n \in \mathbb{Z}$ dispari

$$e^{ikt'} = 1 \neq -1 = k - 1 - k = k - 1 + k\, e^{it'} .$$

Conclusione:

C_k è sempre simmetrica rispetto all'asse delle ascisse, ma è simmetrica rispetto all'asse delle ordinate se e soltanto se k è dispari.