NOME: ....   **MATRICOLA:** ....

Corso di Laurea in Matematica, A.A. 2009/2010
Analisi Reale e Complessa, Esame del 13.09.2010

1) Verificare o smentire il passaggio al limite sotto il segno di integrale :

$$\lim_{0<s\to 0} \int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-sx^2}}{x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \left(\lim_{0<s\to 0} \frac{1-e^{-sx^2}}{x^2} \right) \mathrm{d}x \,.$$

2) Si verifichi che la formula

$$F(s) := \int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-sx^2}}{x^2} \cos x \,\mathrm{d}x \,, \qquad s \in \mathbb{R}$$

definisce una funzione continua $F : [0\,,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ che è derivabile in ogni punto $s \in (0\,,+\infty)$.

3) Esiste una funzione olomorfa $f(z)$ definita sul piano complesso tale che, per $z = x + i\,y$,

$$\mathrm{Im} f(z) = 1 + xy \;?$$

Nel caso affermativo si trovino tutte tali funzioni f .

4) Si calcoli l'integrale improprio

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^4}\,\mathrm{d}x = \lim_{r\to+\infty} \int_{-r}^{r} \frac{1}{1+x^4}\,\mathrm{d}x$$

usando il teorema dei residui per una curva chiusa regolare a tratti adatta nel semipiano superiore.

Soluzioni:

1) : **Soluzione di Analisi Reale.**

Perché il passaggio al limite sotto il segno di integrale sia possibile, basta trovare una funzione integrabile $g : (0\,,+\infty) \longrightarrow [0\,,+\infty)$ ed un numero reale $s_o > 0$ tale che valga

$$\left| \frac{1-e^{-s\,x^2}}{x^2} \right| \leq g(x) \ \text{ per ogni } \ x>0 \ \text{ e } \ 0<s<s_o$$

ed applicare il teorema della convergenza dominata.

Per $x \geq 1$ possiamo mettere, con qualsiasi $s_o > 0\,,\ g(x) := \dfrac{1}{x^2}$ perché

$$0 < \frac{1-e^{-s\,x^2}}{x^2} < \frac{1}{x^2}\,, \qquad x>0\,, s>0$$

e

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{x}\bigg|_1^{+\infty} = 1 < +\infty\,.$$

Per $0<x<1$ invece, tenendo per esempio conto che

$$\frac{1-e^{-y}}{y} < 1\,, \qquad y>0 \ \ \text{(da verificare !)}$$

e quindi

$$0 < \frac{1-e^{-s\,x^2}}{x^2} = s\,\frac{1-e^{-s\,x^2}}{s\,x^2} < s < 1\,, \qquad x>0\,, 0<s<1\,,$$

possiamo scegliere, con $s_o = 1\,,\ g(x) := 1\,.$

La verifica di

$$\frac{1-e^{-y}}{y} < 1 \iff 1-e^{-y}-y<0\,, \qquad y>0\ :$$

La funzione $\varphi(y) := 1-e^{-y}-y$ è derivabile su $\mathbb{R}$ con la derivata $\varphi'(y) = e^{-y}-1<0$ per $y>0\,$, perciò è strettamente decrescente in $[0\,,+\infty)\,$. poiché $\varphi(0)=0\,$, risulta che $\varphi(y)<0$ per ogni $y>0\,.$

Soluzione computazionale.

Calcoliamo integrando per parti :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-s\,x^2}}{x^2}\,\mathrm{d}x &= \int_0^{+\infty} \big(1-e^{-s\,x^2}\big)\,\mathrm{d}\Big(-\frac{1}{x}\Big)\\ &= -\,\frac{1-e^{-s\,x^2}}{x}\Bigg|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty}\Big(-\frac{1}{x}\Big)e^{-s\,x^2}2\,sx\,\mathrm{d}x\\ &= 2\,s\int_0^{+\infty} e^{-s\,x^2}\,\mathrm{d}x \overset{t=\sqrt{s}\,x}{=} 2\sqrt{s}\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t\,.\end{aligned}$$

Ricordando l'integrale noto $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ si ottiene

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-s\,x^2}}{x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi\,s}$$

e quindi

$$\begin{aligned}\lim_{0<s\to 0}\int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-s\,x^2}}{x^2}\,\mathrm{d}x &= \lim_{0<s\to 0}\sqrt{\pi\,s} = 0\\ &= \int_0^{+\infty}\Big(\underbrace{\lim_{0<s\to 0}\frac{1-e^{-s\,x^2}}{x^2}}_{=\,0}\Big)\,\mathrm{d}x\,.\end{aligned}$$

2) : Abbiamo visto nella soluzione di Analisi Reale del compito 1) che, per qualsiasi $s_o > 0$,

$$\left|\frac{1-e^{-s\,x^2}}{x^2}\cos x\right| \leq \frac{1-e^{-s\,x^2}}{x^2} \leq g(x)\,, \qquad x>0\,,\ 0<s<s_o$$

ove la funzione $g : (0\,,+\infty) \longrightarrow [0\,,+\infty)$ definita tramite la formula

$$g(x) := \begin{cases} s_o & \text{per } 0 < x < 1 \\ \dfrac{1}{x^2} & \text{per } x \geq 1 \end{cases}$$

è integrabile. Usando il teorema della convergenza dominata risulta che la funzione F è ben definita e continua.

Verifichiamo ora che possiamo derivare $F(s)$ sotto il segno dell'integrale in ogni $s > 0$. Infatti, esiste la derivata parziale

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1 - e^{-s\,x^2}}{x^2}\cos x\right) = e^{-s\,x^2}\cos x$$

e, per $x > 0$ e $s \geq \varepsilon > 0$, abbiamo la maggiorazione

$$\left|\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1 - e^{-s\,x^2}}{x^2}\cos x\right)\right| \leq e^{-\varepsilon\,x^2}$$

dove la funzione $e^{-\varepsilon\,x^2}$ è integrabile su $(0\,, +\infty)$. Così F risulta essere derivabile in ogni $s > 0$ ed abbiamo

$$\begin{aligned} F'(s) &= \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1 - e^{-s\,x^2}}{x^2}\cos x\right)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-s\,x^2}\cos x\,\mathrm{d}x\ . \end{aligned}$$

Approfondimento.

Calcoliamo esplicitamente la derivata $F'(s)$ per ogni $s > 0$.

Usando la sostituzione

$$t = \sqrt{s}\,x\,, \quad x = \frac{t}{\sqrt{s}}\,, \quad \mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{s}}\,\mathrm{d}t\ ,$$

si ottiene

$$F'(s) = \frac{1}{\sqrt{s}}\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\cos\frac{t}{\sqrt{s}}\,\mathrm{d}t\ ,$$

Ma per ogni $b \in \mathbb{R}$ l'integrale

$$G(b) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(bt)\,\mathrm{d}t \,,$$

può essere calcolato esplicitamente :

Infatti, derivando rispetto a b sotto il segno dell'integrale ed integrando poi per parti risulta

$$\begin{aligned} G'(b) &= -\int\limits_0^{+\infty} e^{-t^2} t \sin(bt)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2} \int\limits_0^{+\infty} \sin(bt)\,\mathrm{d}\big(e^{-t^2}\big) \\ &= \frac{1}{2}\, e^{-t^2} \sin(bt)\Big|_0^{+\infty} - \frac{b}{2} \int\limits_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(bt)\,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{b}{2}\, G(b) \,. \end{aligned}$$

Perciò G è la soluzione dell'equazione differenziale lineare $G'(b) = -\dfrac{b}{2}\, G(b)$ soddisfacente la condizione iniziale

$$G(0) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \qquad \text{(integrale noto !)}$$

e si vede subito che

$$G(b) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(bt)\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\, e^{-b^2/4} \,, \qquad b \in \mathbb{R} \,. \qquad (*)$$

Applicando ora (*) con $b = \dfrac{1}{\sqrt{s}}$ concludiamo che

$$F'(s) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{s}}\, e^{-\frac{1}{4s}} \,, \qquad s > 0 \,,$$

3) **:** La funzione $v(x\,,y)$ definita sul piano complesso tramite la formula

$$v(x\,,y) = 1 + xy$$

può essere la parte immaginaria di una funzione olomorfa se e solo se è armonica. Verifichiamo che è così :

Anzitutto le derivate parziali di v di primo ordine sono:

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x\,,y) = y\,, \qquad \frac{\partial v}{\partial y}(x\,,y) = x\,.$$

Risultano

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x\,,y) = \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(x\,,y) = 0$$

e quindi

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x\,,y) + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(x\,,y) = 0\,.$$

Ora l'armonicità di u implica che la forma differenziale

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial y}(x\,,y)\,\mathrm{d}x - \frac{\partial v}{\partial x}(x\,,y)\,\mathrm{d}y$$

è chiusa e, poiché il piano complesso è convesso, anche esatta. Se $u(x\,,y)$ è una primitiva della forma differenziale ω, cioè una funzione differenziabile $u(x\,,y)$ sul piano complesso tale che

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x\,,y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x\,,y)\,, \qquad \frac{\partial u}{\partial y}(x\,,y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x\,,y)\,,$$

allora per la funzione $f(z) := u(x\,,y) + v(x\,,y)\,i$ valgono le equazioni di Cauchy-Riemann, quindi f sarà una funzione olomorfa avendo la parte immaginaria uguale a v.

Di conseguenza dobbiamo risolvere il sistema di equazioni a derivate parziali

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}(x\,,y) = & \dfrac{\partial v}{\partial y}(x\,,y) = \quad x \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x\,,y) = - & \dfrac{\partial v}{\partial x}(x\,,y) = -y \end{cases}.$$

Dalla prima equazione si ottiene

$$u(x\,,y) = \int x\,\mathrm{d} = \frac{x^2}{2} + C(y)$$

ove $C(y)$ è una funzione di solo y. Troviamo successivamente $C(y)$ tale che anche la seconda equazione sia soddisfatta, cioè tale che

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x\,,y) = C'(y)$$

sia uguale a $-y$. Risulta che

$$C(y) = \int \big(-\,y\big)\,\mathrm{d}y = -\,\frac{y^2}{2} + C$$

con C una costante reale.

Concludiamo che le funzioni $f(z)$ con la parte immaginaria uguale a v sono della forma

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} + C + \big(1 + xy\big)\,i \\ &= \frac{x^2 + 2\,xy\,i - y^2}{2} + C + i \\ &= \frac{(x + y\,i)^2}{2} + C + i \\ &= \frac{z^2}{2} + C + i\,, \end{aligned}$$

ove C è una costante reale.

4) **:** La funzione

$$f(z) := \frac{1}{1 + z^4}$$

è meromorfa sul piano complesso, con poli semplici nelle radici quarte di -1, cioè in

$$z_k = \cos\frac{\pi + 2\,(k-1)\,\pi}{4} + i\,\sin\frac{\pi + 2\,(k-1)\,\pi}{4}\,, \qquad 1 \leq k \leq 4\,.$$

Per facilitare i calcoli rimarchiamo che

$$\begin{aligned}
z_1 &= \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}\,,\\
z_2 &= \cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4} = \frac{-1+i}{\sqrt{2}} = -\overline{z_1}\,,\\
z_3 &= \cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4} = \frac{-1-i}{\sqrt{2}} = \overline{z_2} = -z_1\,,\\
z_4 &= \cos\frac{7\pi}{4} + i\sin 7\frac{\pi}{4} = \frac{1-i}{\sqrt{2}} = \overline{z_1} = -z_3\,.
\end{aligned}$$

Tenendo conto che

$$z^4 + 1 = \big(z - z_1\big)\big(z - z_2\big)\big(z - z_3\big)\big(z - z_4\big)\ ,$$

calcoliamo i residui di f nei poli z_1 e z_2:

$$\begin{aligned}
\operatorname*{Res}_{z_1}(f) &= \lim_{z\to z_1}(z - z_1)\,f(z)\\
&= \lim_{z\to z_1}\frac{1}{\big(z - z_2\big)\big(z - z_3\big)\big(z - z_4\big)}\\
&= \frac{1}{\big(z_1 - z_2\big)\big(z_1 - z_3\big)\big(z_1 - z_4\big)}\\
&= \frac{1}{\big(z_1 + \overline{z_1}\big)\big(2\,z_1\big)\big(z_1 - \overline{z_1}\big)}\\
&= \frac{1}{2\,i}\cdot\frac{1}{(2\operatorname{Re} z_1)\cdot z_1\cdot(2\operatorname{Im} z_1)}\\
&= \frac{1}{2\,i}\cdot\frac{\overline{z_1}}{(\sqrt{2})\cdot(\sqrt{2})}\\
&= \frac{1}{i}\cdot\frac{1-i}{4\sqrt{2}}\ ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname*{Res}_{z_2}(f) &= \lim_{z\to z_2}(z - z_2)\,f(z)\\
&= \lim_{z\to z_2}\frac{1}{\big(z - z_1\big)\big(z - z_3\big)\big(z - z_4\big)}\\
&= \frac{1}{\big(z_2 - z_1\big)\big(z_2 - z_3\big)\big(z_2 - z_4\big)}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\big(-\overline{z_1}-z_1\big)\big(-\overline{z_1}+z_1\big)\big(-2\,\overline{z_1}\big)}\\
&= \frac{1}{\big(z_1+\overline{z_1}\big)\big(z_1-\overline{z_1}\big)\big(2\,\overline{z_1}\big)}\\
&= \frac{1}{2i}\cdot\frac{z_1}{(\sqrt{2}\,)\cdot(\sqrt{2}\,)}\\
&= \frac{1}{i}\cdot\frac{1+i}{4\sqrt{2}}\,.
\end{aligned}
$$

Indichiamo, per $w \in \mathbb{C}$ e $r > 0$, con $\partial^+ U_r^+(w)$ e $\partial^- U_r^+(w)$ le curve con lo stesso sostegno uguale al semicerchio superiore

$$\big\{ z \in \mathbb{C}\,;\, |z-w| = r\,, \mathrm{Im} z \geq 0 \big\}\ ,$$

la prima orientata in senso antiorario (positivo), mentre la seconda in senso orario (negativo) :

$$\partial^+ U_r^+(w) \text{ è la curva } [0\,,\pi] \ni t \longmapsto w + r\,e^{it} \in \mathbb{C}\,,$$

$$\partial^- U_r^+(w) \text{ è la curva } [0\,,\pi] \ni t \longmapsto w + r\,e^{i(\pi-t)} = w - r\,e^{-it} \in \mathbb{C}\,.$$

Sia adesso $r > 1$ e consideriamo la curva chiusa regolare a tratti γ_r nel semipiano superiore chiuso che si ottiene componendo

il segmento $[-r\,, r]$ con
il semicerchio $\partial^+ U_r^+(0)$.

Poiché γ_r aggira i soli poli z_1 e z_3, applicando il teorema dei residui otteniamo

$$
\begin{aligned}
\int_{-r}^{r} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\partial^+ U_r^+(0)} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_r} f(z)\,\mathrm{d}z&\\
= 2\pi\,i\Big(\operatorname*{Res}_{z_1}(f) + \operatorname*{Res}_{z_2}(f)\Big)&\\
= 2\pi\,i\left(\frac{1}{i}\cdot\frac{1-i}{4\sqrt{2}} + \frac{1}{i}\cdot\frac{1+i}{4\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}\ ,&
\end{aligned}
$$

quindi

$$\int_{-r}^{r} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{\sqrt{2}} - \int_{\partial^+ U_r^+(0)} f(z)\,\mathrm{d}z\ .$$

Ora vale

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\partial^+ U_r^+(0)} f(z)\,\mathrm{d}z \right| &= \left| \int_{\partial^+ U_r^+(0)} \frac{1}{1+z^4}\,\mathrm{d}z \right| \\
&\leq \int_{\partial^+ U_r^+(0)} \left| \frac{1}{1+z^4} \right| \mathrm{d}|z| \\
&\leq \int_{\partial^+ U_r^+(0)} \frac{1}{|z|^4 - 1}\,\mathrm{d}|z| \\
&= \frac{r\,\pi}{r^4-1} \longrightarrow 0 \ \text{ per } \ r \longrightarrow +\infty
\end{aligned}$$

e risulta

$$\int_{-r\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^4}\,\mathrm{d}x = \lim_{r\to+\infty} \int_{-r}^{r} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{\sqrt{2}}\ .$$

Rimarco: Poiché f è pari, risulta anche

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{1+x^4}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\ .$$