NOME: .... **MATRICOLA:** ....

Corso di Laurea in Fisica, A.A. 2010/2011
Calcolo 1, Esame scritto del 14.02.2011

1) Data la funzione

$$f(x) = x\Big(-\ln^2(x) + 2\ln(x)\Big)\,,$$

a) determinare il dominio (massimale) di f ;

b) trovare tutti gli asintoti di f ;

c) trovare tutti i massimi e minimi locali di f ;

d) studiare la convessità di f ;

e) tracciare un grafico qualitativo di f .

2) Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} 13^n \left(1 - \ln\Big(1 + \frac{1}{2n^2}\Big) - \cos\Big(\frac{1}{n}\Big)\right)^n \ .$$

3) Calcolare l'integrale

$$\int_1^2 \frac{\ln(4-x)}{(1+\sqrt{x})^3}\,\frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x\ .$$

4) Sia data la funzione

$$f(x,y) = xye^{x-y}\ .$$

a) Trovare i massimi e minimi locali di f .

b) Data la forma differenziale

$$\omega = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\,dy\ ,$$

calcolare l'integrale curvilineo $\displaystyle\int_\gamma \omega$ dove γ è la curva data dal grafico della funzione $y = \ln(x)$ per $x \in \big[1\,,e\big]$.

Soluzioni:

1) **:** a) $f(x)$ è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$ per quale ha senso $\ln(x)$. Perciò il dominio di f è $\big(0\,,+\infty\big)$.

b) Per trovare gli asintoti verticali calcoliamo il seguente limite :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0+0} f(x) &= \lim_{x\to 0+0} x\Big(-\ln^2(x)+2\ln(x)\Big)\\ &\overset{t=\ln x}{=} \lim_{t\to-\infty} e^t\big(-t^2+2t\big)\\ &\overset{s=-t}{=} \lim_{t\to-\infty} \frac{-s^2-2s}{e^s}\\ &= 0\,.\end{aligned}$$

Risulta che f si estende per continuità su $\big[0\,,+\infty\big)$ e di conseguenza non ha asintoto verticale. L'estensione di f ad una funzione continua su $\big[0\,,+\infty\big)$ sarà indicata con la stessa lettera f, avendo così $f(0)=0$.

La prima condizione per l'esistenza di un asintoto obliquo per $x\to+\infty$ è l'esistenza del limite finito

$$m_+ = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}\,.$$

Ma

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to+\infty}\Big(-\ln^2(x)+2\ln(x)\Big)\\ &\overset{t=\ln x}{=} \lim_{t\to+\infty}\big(-t^2+2t\big)\\ &= -\infty\end{aligned}$$

e di conseguenza f non ha asintoto obliquo (in particolare, orizzontale) per $x\to+\infty$.

c) Per trovare gli intervalli di monotonia e gli extremi locali di f, dobbiamo prima calcolare la sua derivata :

$$f'(x) = -\ln^2(x)+2\ln(x)+x\Big(-2(\ln x)\frac{1}{x}+\frac{2}{x}\Big) = 2-\ln^2(x)\,.$$

Risulta che i zeri di f' sono

$$e^{-\sqrt{2}} = \frac{1}{e^{\sqrt{2}}} \approx 0,2431167...\,, \qquad e^{\sqrt{2}} \approx 4,11325...$$

e

$$\begin{aligned} &f' \text{ è } < 0 \text{ in } \big(-\infty\,, e^{-\sqrt{2}}\big)\,, \\ &f' \text{ è } > 0 \text{ in } \big(e^{-\sqrt{2}}\,, e^{\sqrt{2}}\big)\,, \\ &f' \text{ è } < 0 \text{ in } \big(e^{\sqrt{2}}\,, +\infty\big)\,. \end{aligned}$$

Cosicché f risulta ad essere

$$\begin{aligned} &\text{strettamente decrescente in } \big(-\infty\,, e^{-\sqrt{2}}\big)\,, \\ &\text{strettamente crescente in } \big(e^{-\sqrt{2}}\,, e^{\sqrt{2}}\big)\,, \\ &\text{strettamente decrescente in } \big(e^{\sqrt{2}}\,, +\infty\big)\,. \end{aligned}$$

In particolare, $e^{-\sqrt{2}} \approx 0,2431167...$ è un punto di minimo locale e

$$f(e^{-\sqrt{2}}) = -2\,(1+\sqrt{2})\,e^{-\sqrt{2}} \approx -1,17387...\,,$$

mentre $e^{\sqrt{2}} \approx 4,11325...$ è un punto di massimo locale e

$$f(e^{\sqrt{2}}) = 2\,(\sqrt{2}-1)\,e^{\sqrt{2}} \approx 3,4075...\,.$$

Rimarchiamo che (l'estensione per continuità di) f ha la derivata destra in 0

$$\begin{aligned} f_d'(0) = \lim_{0<x\to 0} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{0<x\to 0} \Big(-\ln^2(x) + 2\ln(x)\Big) \\ &\overset{t=\ln x}{=} \lim_{t\to+\infty} \big(-t^2 + 2t\big) \\ &= -\infty\,, \end{aligned}$$

perciò il grafico di f ha in 0 la semiretta tangente verticale

$$\big\{(0\,,y)\,;\, y \leq 0\big\}\,.$$

d) Per studiare la convessità di f calcoliamo la sua seconda derivata :

$$f''(x) = -2\,\frac{\ln(x)}{x}$$

Risulta che

$$f'' \text{ è } > 0 \text{ in } \big(0\,,1\big) \text{ e quindi } f \text{ è convessa in } \big[0\,,1\big]\,,$$

f'' è < 0 in $\big(1\,,+\infty\big)$ e quindi f è concava in $\big[1\,,+\infty\big]$,

$x = 1$ è un punto di flesso di f.

e) Riportiamo il comportamento di f', f'' e f nella seguente tabella :

x	0		$e^{-\sqrt{2}}$		1		$e^{\sqrt{2}}$		e^2		$+\infty$
f'	$-\infty$	$-$	0	$+$	2	$+$	0	$-$	-2	$-$	
f''			$+$		0			$-$			
f	0	$\searrow$	$-2\,(1+\sqrt{2})\,e^{-\sqrt{2}}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$2\,(\sqrt{2}-1)\,e^{\sqrt{2}}$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Ora abbiamo tutte le informazioni per tracciare il grafico di f :

Il grafico di f scende dal punto $\big(0\,,0\big)$, dove ha tangente verticale, fino al punto di minimo locale $\Big(e^{-\sqrt{2}}, -\,2\,(1+\sqrt{2})\,e^{-\sqrt{2}}\Big)$, nel quale ha tangente orizzontale, poi sale, attraversando l'asse delle ascisse in $\big(1\,,0\big)$, dove la retta tangente è $y = 2\,(x-1)$, fino al punto di massimo locale $\Big(e^{\sqrt{2}}, 2\,(\sqrt{2}-1)\,e^{\sqrt{2}}\Big)$, nel quale ha di nuovo tangente orizzontale.

Successivamente, il grafico di f scende, attraversando l'asse delle ascisse in $\big(e^2\,,0\big)$, dove la retta tangente è $y = 2\,\big(x-e^2\big)$, fino a $-\infty$ in $+\infty$.

Sul tratto $\big[0\,,1\big]$ la funzione è convessa, mentre sul tratto $\big[1\,,+\infty\big]$ è concava.

2) : Esaminiamo la convergenza assoluta, cioè la convergenza della serie

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{\infty}\left|13^n\left(1-\ln\!\Big(1+\frac{1}{2n^2}\Big)-\cos\Big(\frac{1}{n}\Big)\right)^{n}\right|\\ &=\sum_{n=1}^{\infty}13^n\left|1-\ln\!\Big(1+\frac{1}{2n^2}\Big)-\cos\Big(\frac{1}{n}\Big)\right|^{n}\end{aligned} \tag{*}$$

usando il criterio della radice : poiché

$$\begin{aligned}&\left(13^n\left|1-\ln\!\Big(1+\frac{1}{2n^2}\Big)-\cos\Big(\frac{1}{n}\Big)\right|^{n}\right)^{1/n}\\ &=13\left|1-\ln\!\Big(1+\frac{1}{2n^2}\Big)-\cos\Big(\frac{1}{n}\Big)\right|\xrightarrow{n\to\infty}13\cdot(1-0-1)=0<1\,,\end{aligned}$$

la serie (*) converge, ossia la serie originale converge assolutamente.

Rimarco 1.

Un compito meno banale è la richiesta di studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} 13^n\, n^{4n} \bigg(1 - \ln\Big(1 + \frac{1}{2n^2}\Big) - \cos\Big(\frac{1}{n}\Big)\bigg)^{n}$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \Bigg(13\, n^4 \bigg(1 - \ln\Big(1 + \frac{1}{2n^2}\Big) - \cos\Big(\frac{1}{n}\Big)\bigg)\Bigg)^{n}$$

Se

$$d_n := 13\, n^4 \bigg(1 - \ln\Big(1 + \frac{1}{2n^2}\Big) - \cos\Big(\frac{1}{n}\Big)\bigg)$$

fosse positivo almeno definitivamente, potremmo tentare di applicare il criterio della radice. Perciò esaminiamo d_n per prima.

Abbiamo

$$d_n = 13\, \frac{1}{t^4} \bigg(1 - \ln\Big(1 + \frac{t^2}{2}\Big) - \cos t\bigg) \ \text{ ove } \ t = \frac{1}{n}\,.$$

Ma la formula di Taylor con il resto di Peano ci fornisce da una parte

$$\ln(1+s) = s - \frac{s^2}{2} + o\big(s^2\big) \ \text{ per } s \to 0\,,$$

quindi

$$\ln\Big(1 + \frac{t^2}{2}\Big) = \frac{t^2}{2} - \frac{t^4}{8} + o\big(t^4\big) \ \text{ per } t \to 0\,,$$

e dall'altra parte

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + o\big(t^5\big) = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} + o\big(t^5\big) \ \text{ per } t \to 0\,.$$

Deduciamo che

$$1 - \ln\Big(1 + \frac{t^2}{2}\Big) - \cos t = \frac{t^4}{12} + o\big(t^4\big) \ \text{ per } t \to 0\,,$$

e di conseguenza

$$\frac{1}{t^4}\bigg(1 - \ln\Big(1 + \frac{t^2}{2}\Big) - \cos t\bigg) = \frac{1}{12} + \frac{o\big(t^4\big)}{t^4} \ \text{ per } t \to 0\,,$$

$$n^4\left(1-\ln\!\left(1+\frac{1}{2n^2}\right)-\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)=\frac{1}{12}+n^4\,o\!\left(\frac{1}{n^4}\right)\ \text{per } n\to\infty\,,$$
$$d_n=\frac{13}{12}+n^4\,o\!\left(\frac{1}{n^4}\right)\ \text{per } n\to\infty\,.$$

Poiché

$$\lim_{n\to\infty} n^4\,o\!\left(\frac{1}{n^4}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{o\!\left(\frac{1}{n^4}\right)}{\frac{1}{n^4}}=0\,,$$

risulta

$$\lim_{n\to\infty} d_n=\frac{13}{12}\,. \tag{**}$$

Cosicché il termine generale $\big(d_n\big)^n$ della nostra serie è definitivamente positivo.

Ora possiamo applicare il criterio della radice : per (**) abbiamo

$$\lim_{n\to\infty}\Big(\big(d_n\big)^n\Big)^{1/n}=\lim_{n\to\infty} d_n=\frac{13}{12}>1$$

e concludiamo che la nostra serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\big(d_n\big)^n$$

è divergente.

Rimarco 2.

Nel Rimarco 1 abbiamo visto che

$$\frac{1}{t^4}\left(1-\ln\!\left(1+\frac{t^2}{2}\right)-\cos t\right)=\frac{1}{12}+\frac{o\big(t^4\big)}{t^4}\ \text{per } t\to 0\,,$$

quindi che

$$1-\ln\!\left(1+\frac{t^2}{2}\right)-\cos t>0 \tag{***}$$

se t è abbastanza vicino a 0. D'altro canto, poiché

$$\lim_{t\to+\infty}\left(1-\ln\!\left(1+\frac{t^2}{2}\right)-\cos t\right)=-\infty\,,$$

(***) non può essere vera per ogni $t > 0$. Mostreremo però che (***) vale per ogni $0 < t \leq 2$, in particolare

$$1 - \ln\Big(1 + \frac{1}{2n^2}\Big) - \cos\Big(\frac{1}{n}\Big) > 0 \text{ per ogni intero } n \geq 1\,.$$

Per prima mostriamo che

$$\cos t < 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24}\,, \qquad 0 < t \leq 7\,.$$

Infatti, per ogni $0 < t \leq 7$ abbiamo

$$\begin{aligned}
\cos t &= 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \frac{t^8}{8!} - \frac{t^{10}}{10!} + \frac{t^{12}}{12!} - \dots \\
&= 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!}\Big(\underbrace{1 - \frac{t^2}{7\cdot 8}}_{>0}\Big) - \frac{t^{10}}{10!}\Big(\underbrace{1 - \frac{t^2}{10\cdot 12}}_{>0}\Big) - \dots \\
&< 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!}\,.
\end{aligned}$$

Di conseguenza

$$\begin{aligned}
1 - \ln\Big(1 + \frac{t^2}{2}\Big) - \cos t &> 1 - \ln\Big(1 + \frac{t^2}{2}\Big) - \Big(1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24}\Big) \\
&= \frac{t^2}{2} - \frac{t^4}{24} - \ln\Big(1 + \frac{t^2}{2}\Big)\,, \qquad 0 < t \leq 7\,.
\end{aligned} \tag{1}$$

Come secondo passo verifichiamo che la funzione

$$g(t) := \frac{t^2}{2} - \frac{t^4}{24} - \ln\Big(1 + \frac{t^2}{2}\Big) \text{ è strettamente crescente in } [0\,,2]\,.$$

Infatti,

$$g'(t) = t - \frac{t^3}{6} - \frac{t}{1 + \frac{t^2}{2}} = \frac{t^3\big(4 - t^2\big)}{6\big(2 + t^2\big)} > 0\,, \qquad 0 < t < 2\,.$$

Poiché $g(0) = 0$, deduciamo

$$\frac{t^2}{2} - \frac{t^4}{24} - \ln\Big(1 + \frac{t^2}{2}\Big) = g(t) > g(0) = 0\,, \qquad 0 < t < 2\,. \tag{2}$$

Ora (1) e (2) implicano (***) per ogni $0 < t \leq 2$.

3) : **Soluzione diretta.**

La presenza del fattore

$$\frac{1}{\sqrt{x}}$$

nell'integrando, che è il doppio della derivata di $\sqrt{x}$, ci suggerisce di usare la sostituzione

$$t = \sqrt{x}\,, \qquad \mathrm{d}t = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$$

ottenendo

$$\int_1^2 \frac{\ln(4-x)}{(1+\sqrt{x})^3}\,\frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 2\int_1^{\sqrt{2}} \frac{\ln\big(4-t^2\big)}{(1+t)^3}\,\mathrm{d}t\,.$$

Ora usiamo integrazione per parti per ridurre il calcolo all'integrazione di una funzione razionale :

$$\begin{aligned}
&2\int_1^{\sqrt{2}} \frac{\ln\big(4-t^2\big)}{(1+t)^3}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_1^{\sqrt{2}} \ln\big(4-t^2\big)\,\mathrm{d}\Big(-\frac{1}{(1+t)^2}\Big) \\
&= -\,\frac{\ln\big(4-t^2\big)}{(1+t)^2}\bigg|_{t=1}^{t=\sqrt{2}} - \int_1^{\sqrt{2}} \frac{2\,t}{\big(1+t\big)^2\big(4-t^2\big)}\,\mathrm{d}t \\
&= -\,\frac{\ln 2}{\big(1+\sqrt{2}\big)^2} + \frac{\ln 3}{4} + \int_1^{\sqrt{2}} \frac{2\,t}{\big(1+t\big)^2\big(t^2-4\big)}\,\mathrm{d}t \\
&= -\,\big(\sqrt{2}-1\big)^2\ln 2 + \frac{\ln 3}{4} + \int_1^{\sqrt{2}} \frac{2\,t}{\big(1+t\big)^2\big(t^2-4\big)}\,\mathrm{d}t\,.
\end{aligned}$$

Lo sviluppo di $\dfrac{2\,t}{\big(1+t\big)^2\big(t^2-4\big)}$ in fratti semplici è dalla forma

$$\frac{2t}{\bigl(1+t\bigr)^2\bigl(t^2-4\bigr)} = \frac{a}{t+1} + \frac{b}{(t+1)^2} + \frac{c}{t-2} + \frac{d}{t+2}$$

ed allora

$$2t = a(t+1)(t^2-4) + b(t^2-4) + c(t+1)^2(t+2) + d(t+1)^2(t-2)\,.$$

Risultano

$$a = -\frac{10}{9}\,, \quad b = \frac{2}{3}\,, \quad c = \frac{1}{9}\,, \quad d = 1$$

e di consequenza $\left(\text{tenendo conto nei calcoli che } \sqrt{2}-1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}+1}\right)$

$$\begin{aligned}
&\int_1^{\sqrt{2}} \frac{2t}{\bigl(1+t\bigr)^2\bigl(t^2-4\bigr)}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_1^{\sqrt{2}} \left(-\frac{10}{9\,(t+1)} + \frac{2}{3\,(t+1)^2} + \frac{1}{9\,(t-2)} + \frac{1}{t+2} \right) \mathrm{d}t \\
&= \left(-\frac{10}{9}\ln(t+1) - \frac{2}{3\,(t+1)} + \frac{1}{9}\ln(2-t) + \ln(t+2) \right)\Bigg|_{t=1}^{t=\sqrt{2}} \\
&= -\frac{10}{9}\ln\bigl(1+\sqrt{2}\bigr) + \frac{10}{9}\ln 2 - \frac{2}{3\bigl(1+\sqrt{2}\bigr)} + \frac{1}{3} \\
&\qquad\qquad + \frac{1}{9}\ln\bigl(2-\sqrt{2}\bigr) + \ln\bigl(2+\sqrt{2}\bigr) - \ln 3 \\
&= -\frac{10}{9}\ln\bigl(1+\sqrt{2}\bigr) + \frac{10}{9}\ln 2 - \frac{2\bigl(\sqrt{2}-1\bigr)}{3} + \frac{1}{3} \\
&\qquad\qquad + \frac{1}{9}\ln\Bigl(\sqrt{2}\bigl(\sqrt{2}-1\bigr)\Bigr) + \ln\Bigl(\sqrt{2}\bigl(\sqrt{2}+1\bigr)\Bigr) - \ln 3 \\
&= -\frac{10}{9}\ln\bigl(1+\sqrt{2}\bigr) + \frac{10}{9}\ln 2 - \frac{2\sqrt{2}}{3} + 1 \\
&\qquad\qquad + \frac{1}{18}\ln 2 + \frac{1}{9}\ln\frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{2}\ln 2 + \ln\bigl(\sqrt{2}+1\bigr) - \ln 3 \\
&= -\frac{10}{9}\ln\bigl(1+\sqrt{2}\bigr) + \frac{5}{3}\ln 2 - \frac{2\sqrt{2}}{3} + 1
\end{aligned}$$

$$-\frac{1}{9}\ln\left(\sqrt{2}+1\right)+\ln\left(\sqrt{2}+1\right)-\ln 3$$

$$= 1-\frac{2\sqrt{2}}{3}+\frac{5}{3}\ln 2-\ln 3-\frac{2}{9}\ln\!\left(1+\sqrt{2}\right).$$

Concludiamo così che

$$\int_1^2 \frac{\ln(4-x)}{(1+\sqrt{x})^3}\,\frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$$

$$= -\left(\sqrt{2}-1\right)^2\ln 2+\frac{\ln 3}{4}$$

$$+1-\frac{2\sqrt{2}}{3}+\frac{5}{3}\ln 2-\ln 3-\frac{2}{9}\ln\!\left(1+\sqrt{2}\right)$$

$$= 1-\frac{2\sqrt{2}}{3}+\left(2\sqrt{2}-\frac{4}{3}\right)\ln 2-\frac{3}{4}\ln 3-\frac{2}{9}\ln\!\left(1+\sqrt{2}\right).$$

Soluzione trovando prima una primitiva.

Sostanzialmente svolgeremo i stessi calcoli, la sola differenza consiste nel fatto che adesso applicheremo il teorema fondamentale del calcolo integrale solo una volta, alla fine.

Per trovare le primitive della funzione

$$\frac{\ln(4-x)}{(1+\sqrt{x})^3}\,\frac{1}{\sqrt{x}}\,,$$

definita in $\left(0\,,4\right)$ $\left(\text{dove } \dfrac{1}{\sqrt{x}} \text{ e } \ln(4-x) \text{ hanno senso}\right)$, usiamo prima la sostituzione

$$t=\sqrt{x}\in\left(0\,,2\right), \qquad \mathrm{d}t=\frac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$$

e poi integrazione per parti, ottenendo

$$\int \frac{\ln(4-x)}{(1+\sqrt{x})^3}\,\frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 2\int \frac{\ln\left(4-t^2\right)}{(1+t)^3}\,\mathrm{d}t$$

$$= \int \ln\left(4-t^2\right)\mathrm{d}\!\left(-\frac{1}{(1+t)^2}\right)$$

$$= -\frac{\ln\left(4-t^2\right)}{(1+t)^2}-\int \frac{2t}{\left(1+t\right)^2\left(4-t^2\right)}\,\mathrm{d}t\,.$$

Lo sviluppo di $\dfrac{2t}{\left(1+t\right)^2\left(4-t^2\right)}$ in fratti semplici (come abbiamo già visto qui sopra) è

$$\frac{2t}{\left(1+t\right)^2\left(4-t^2\right)} = \frac{10}{9\,(1+t)} - \frac{2}{3\,(1+t)^2} + \frac{1}{9\,(2-t)} - \frac{1}{2+t}$$

e risulta $\left(\text{tenendo conto nei calcoli che } 2-\sqrt{x} = \dfrac{4-x}{2+\sqrt{x}}\right)$

$$\begin{aligned}
&\int \frac{\ln(4-x)}{(1+\sqrt{x})^3}\,\frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \\
&= -\,\frac{\ln\left(4-t^2\right)}{(1+t)^2} - \frac{10}{9}\ln(1+t) - \frac{2}{3\,(1+t)} \\
&\qquad\qquad + \frac{1}{9}\ln(2-t) + \ln(2+t) + C \\
&= -\,\frac{\ln(4-x)}{\left(1+\sqrt{x}\right)^2} - \frac{10}{9}\ln\left(1+\sqrt{x}\right) - \frac{2}{3\left(1+\sqrt{x}\right)} \\
&\qquad\qquad + \frac{1}{9}\ln\left(2-\sqrt{x}\right) + \ln\left(2+\sqrt{x}\right) + C \\
&= \frac{1}{9}\ln(4-x) - \frac{\ln(4-x)}{\left(1+\sqrt{x}\right)^2} - \frac{10}{9}\ln\left(1+\sqrt{x}\right) + \frac{8}{9}\ln\left(2+\sqrt{x}\right) \\
&\qquad\qquad - \frac{2}{3\left(1+\sqrt{x}\right)} + C\,.
\end{aligned}$$

Per finire, applichiamo il teorema fondamentale del calcolo integrale con la primitiva di cui sopra :

$$\begin{aligned}
&\int_1^2 \frac{\ln(4-x)}{(1+\sqrt{x})^3}\,\frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{9}\ln 2 - \frac{1}{9}\ln 3 - \frac{\ln 2}{\left(1+\sqrt{2}\right)^2} + \frac{\ln 3}{4} - \frac{10}{9}\ln\left(1+\sqrt{2}\right) + \frac{10}{9}\ln 2 \\
&\qquad\qquad + \frac{8}{9}\ln\left(2+\sqrt{2}\right) - \frac{8}{9}\ln 3 - \frac{2}{3\left(1+\sqrt{2}\right)} + \frac{1}{3} \\
&= \frac{11}{9}\ln 2 - \frac{3}{4}\ln 3 - \left(\sqrt{2}-1\right)^2\ln 2 - \frac{10}{9}\ln\left(1+\sqrt{2}\right)
\end{aligned}$$

$$+\frac{4}{9}\ln 2+\frac{8}{9}\ln\big(\sqrt{2}+1\big)-\frac{2}{3}\big(\sqrt{2}-1\big)+\frac{1}{3}$$

$$=1-\frac{2\sqrt{2}}{3}+\Big(2\sqrt{2}-\frac{4}{3}\Big)\ln 2-\frac{3}{4}\ln 3-\frac{2}{9}\ln\big(1+\sqrt{2}\big)\ .$$

4) : a) I massimi e minimi relativi di f sono *punti stazionari*, cioè annullano le derivate parziali di

$$f(x,y)=xye^{x-y}\ .$$

Per trovarli, calcoliamo le derivate parziali di f :

$$\frac{\partial f}{\partial x}=ye^{x-y}+xye^{x-y}=(1+x)\,y\,e^{x-y}\,,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}=xe^{x-y}-xye^{x-y}=x\,(1-y)\,e^{x-y}\,.$$

Risulta che i punti stazionari di f sono le soluzioni del sistema di equazioni

$$\begin{cases}(1+x)\,y=0\\ x\,(1-y)=0\end{cases}\ ,$$

cioè i punti

$$(0\,,0)\ \text{ e }\ (-1\,,1)\,.$$

Per poter dire se un punto stazionario è massimo o minimo relativo, calcoliamo anche le derivate parziali di secondo ordine :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=(2+x)\,y\,e^{x-y}\,,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=(1+x)\,(1-y)\,e^{x-y}\,,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=x\,(y-2)\,e^{x-y}\ .$$

Perciò la matrice hessiana di f in $(x\,,y)$ è

$$H_f(x\,,y)=\begin{pmatrix}(2+x)\,y\,e^{x-y} & (1+x)\,(1-y)\,e^{x-y}\\ (1+x)\,(1-y)\,e^{x-y} & x\,(y-2)\,e^{x-y}\end{pmatrix}$$

con determinante

$$\det H_f(x\,,y)=-x^2-y^2-2\,x+2\,y-1\ .$$

In particolare

$$H_f(0\,,0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\,, \quad \det H_f(0\,,0) = -1 < 0$$

e risulta che $(0\,,0)$ è un punto sella.

D'altro canto abbiamo

$$H_f(-1\,,1) = \begin{pmatrix} e^{-2} & 0 \\ 0 & e^{-2} \end{pmatrix}\,, \quad \det H_f(-1\,,1) = e^{-4} > 0$$

e, poiché il determinante della matrice hessiana $H_f(-\,1\,,1)$ è >0 e l'elemento nell'angolo sinistro superiore è $e^{-2} > 0\,,$ concludiamo che $(-\,1\,,1)$ è un punto di minimo locale.

b) Poiché

$$\omega = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) dy$$

è una forma differenziale esatta su $\mathbb{R}^2$ e

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (1+x)\,y\,e^{x-y}$$

è una sua primitiva, per ogni curva regolare a tratti in $\mathbb{R}^2$

$$[a\,,b] \ni t \longmapsto \gamma(t) \in \mathbb{R}^2$$

abbiamo

$$\int\limits_\gamma \omega = \frac{\partial f}{\partial x}\Big(\gamma(b)\Big) - \frac{\partial f}{\partial x}\Big(\gamma(a)\Big)\,.$$

In particolare, se γ è il grafico della funzione $y = \ln(x)$ per $x \in \big[1\,,e\big]\,,$ allora

$$\int\limits_\gamma \omega = \frac{\partial f}{\partial x}\big(e\,,1\big) - \frac{\partial f}{\partial x}\big(1\,,0\big) = (1+e)\,e^{e-1}\,.$$