NOME: .... **MATRICOLA:** ....

Corso di Laurea in Fisica, A.A. 2007/2008
Calcolo 1, Esame scritto del 14.02.2011

1) Data la funzione

$$f(x) = x\Big(- \ln^2(x) + 2\ln(x)\Big) \, ,$$

a) determinare il dominio (massimale) di f ;

b) trovare tutti gli asintoti di f ;

c) trovare tutti i massimi e minimi locali di f ;

d) studiare la convessità di f ;

e) tracciare un grafico qualitativo di f .

2) Calcolare l'integrale

$$\int_1^2 \frac{\ln(4-x)}{(1+\sqrt{x})^2} \, \frac{1}{\sqrt{x}} \, \mathrm{d}x \, .$$

3) Dire per che valori interi k la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2+\left(\sin\frac{1}{n}\right)^{k}}$$

converge.

4) Discutere, al variare di $s \in \mathbb{R}$, la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{(\sin x)^2}{x^s}\,\mathrm{d}x\ .$$

Soluzioni:

1) **:** a) $f(x)$ è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$ per quale ha senso $\ln(x)$. Perciò il dominio di f è $\big(0\,,+\infty\big)$.

b) Per trovare gli asintoti verticali calcoliamo il seguente limite :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0+0} f(x) &= \lim_{x\to 0+0} x\Big(-\ln^2(x) + 2\ln(x)\Big) \\
&\overset{t=\ln x}{=} \lim_{t\to -\infty} e^t\big(-t^2 + 2t\big) \\
&\overset{s=-t}{=} \lim_{t\to -\infty} \frac{-s^2 - 2s}{e^s} \\
&= 0\,.
\end{aligned}$$

Risulta che f si estende per continuità su $\big[0\,,+\infty\big)$ e di conseguenza non ha asintoto verticale. L'estensione di f ad una funzione continua su $\big[0\,,+\infty\big)$ sarà indicata con la stessa lettera f, avendo così $f(0) = 0$.

La prima condizione per l'esistenza di un asintoto obliquo per $x \to +\infty$ è l'esistenza del limite finito

$$m_+ = \lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x}\,.$$

Ma

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to +\infty} \Big(-\ln^2(x) + 2\ln(x)\Big) \\
&\overset{t=\ln x}{=} \lim_{t\to +\infty} \big(-t^2 + 2t\big) \\
&= -\infty
\end{aligned}$$

e di conseguenza f non ha asintoto obliquo (in particolare, orizzontale) per $x \to +\infty$.

c) Per trovare gli intervalli di monotonia e gli extremi locali di f, dobbiamo prima calcolare la sua derivata :

$$f'(x) = -\ln^2(x) + 2\ln(x) + x\Big(-2(\ln x)\frac{1}{x} + \frac{2}{x}\Big) = 2 - \ln^2(x)\,.$$

Risulta che i zeri di f' sono

$$e^{-\sqrt{2}} = \frac{1}{e^{\sqrt{2}}} \approx 0,2431167... \,, \qquad e^{\sqrt{2}} \approx 4,11325...$$

e

$$\begin{aligned} &f' \text{ è } < 0 \text{ in } \big(-\infty \,, e^{-\sqrt{2}} \big)\,, \\ &f' \text{ è } > 0 \text{ in } \big(e^{-\sqrt{2}} \,, e^{\sqrt{2}} \big)\,, \\ &f' \text{ è } < 0 \text{ in } \big(e^{\sqrt{2}} \,, +\infty \big)\,. \end{aligned}$$

Cosicché f risulta ad essere

$$\begin{aligned} &\text{strettamente decrescente in } \big(-\infty \,, e^{-\sqrt{2}} \big)\,, \\ &\text{strettamente crescente in } \big(e^{-\sqrt{2}} \,, e^{\sqrt{2}} \big)\,, \\ &\text{strettamente decrescente in } \big(e^{\sqrt{2}} \,, +\infty \big)\,. \end{aligned}$$

In particolare, $e^{-\sqrt{2}} \approx 0,2431167...$ è un punto di minimo locale e

$$f(e^{-\sqrt{2}}) = -2\,(1+\sqrt{2})\,e^{-\sqrt{2}} \approx -1,17387... \,,$$

mentre $e^{\sqrt{2}} \approx 4,11325...$ è un punto di massimo locale e

$$f(e^{\sqrt{2}}) = 2\,(\sqrt{2}-1)\,e^{\sqrt{2}} \approx 3,4075... \,.$$

Rimarchiamo che (l'estensione per continuità di) f ha la derivata destra in 0

$$\begin{aligned} f_d'(0) = \lim_{0<x\to 0} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{0<x\to 0} \Big(-\ln^2(x) + 2\ln(x) \Big) \\ &\overset{t\,=\ln x}{=} \lim_{t\to +\infty} \big(-t^2 + 2t \big) \\ &= -\infty \,, \end{aligned}$$

perciò il grafico di f ha in 0 la semiretta tangente verticale

$$\big\{ (0\,,y)\,;\, y \leq 0 \big\}\,.$$

d) Per studiare la convessità di f calcoliamo la sua seconda derivata :

$$f''(x) = -2\,\frac{\ln(x)}{x}$$

Risulta che

$$f'' \text{ è } > 0 \text{ in } \big(0\,,1\big) \text{ e quindi } f \text{ è convessa in } \big[0\,,1\big]\,,$$

f'' è < 0 in $\big(1\,,+\infty\big)$ e quindi f è concava in $\big[1\,,+\infty\big]$,

$x = 1$ è un punto di flesso di f.

e) Riportiamo il comportamento di f', f'' e f nella seguente tabella :

x	0		$e^{-\sqrt{2}}$		1		$e^{\sqrt{2}}$		e^2		$+\infty$
f'	$-\infty$	$-$	0	$+$	2	$+$	0	$-$	-2	$-$	
f''			$+$		0		$-$				
f	0	$\searrow$	$-2\,(1+\sqrt{2})\,e^{-\sqrt{2}}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$2\,(\sqrt{2}-1)\,e^{\sqrt{2}}$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Ora abbiamo tutte le informazioni per tracciare il grafico di f :

Il grafico di f scende dal punto $\big(0\,,0\big)$, dove ha tangente verticale, fino al punto di minimo locale $\Big(e^{-\sqrt{2}}, -\,2\,(1+\sqrt{2})\,e^{-\sqrt{2}}\Big)$, nel quale ha tangente orizzontale, poi sale, attraversando l'asse delle ascisse in $\big(1\,,0\big)$, dove la retta tangente è $y = 2\,(x-1)$, fino al punto di massimo locale $\Big(e^{\sqrt{2}}, 2\,(\sqrt{2}-1)\,e^{\sqrt{2}}\Big)$, nel quale ha di nuovo tangente orizzontale.

Successivamente, il grafico di f scende, attraversando l'asse delle ascisse in $\big(e^2\,,0\big)$, dove la retta tangente è $y = 2\,\big(x-e^2\big)$, fino a $-\infty$ in $+\infty$.

Sul tratto $\big[0\,,1\big]$ la funzione è convessa, mentre sul tratto $\big[1\,,+\infty\big]$ è concava.

2) : **Soluzione diretta.**

La presenza del fattore

$$\frac{1}{\sqrt{x}}$$

nell'integrando, che è il doppio della derivata di $\sqrt{x}$, ci suggerisce di usare la sostituzione

$$t = \sqrt{x}\,, \qquad \mathrm{d}t = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$$

ottenendo

$$\int_1^2 \frac{\ln(4-x)}{(1+\sqrt{x})^2}\,\frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 2\int_1^{\sqrt{2}} \frac{\ln\big(4-t^2\big)}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t\,.$$

Ora usiamo integrazione per parti per ridurre il calcolo all'integrazione di una funzione razionale :

$$\begin{aligned}
&2\int_1^{\sqrt{2}} \frac{\ln\bigl(4-t^2\bigr)}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t \\
&= 2\int_1^{\sqrt{2}} \ln\bigl(4-t^2\bigr)\,\mathrm{d}\Bigl(-\frac{1}{1+t}\Bigr) \\
&= -\frac{2\ln\bigl(4-t^2\bigr)}{1+t}\Bigg|_{t=1}^{t=\sqrt{2}} - \int_1^{\sqrt{2}} \frac{4t}{\bigl(1+t\bigr)\bigl(4-t^2\bigr)}\,\mathrm{d}t \\
&= -\frac{2\ln 2}{1+\sqrt{2}} + \ln 3 + \int_1^{\sqrt{2}} \frac{4t}{\bigl(1+t\bigr)\bigl(t^2-4\bigr)}\,\mathrm{d}t \\
&= -2\bigl(\sqrt{2}-1\bigr)\ln 2 + \ln 3 + \int_1^{\sqrt{2}} \frac{4t}{\bigl(1+t\bigr)\bigl(t^2-4\bigr)}\,\mathrm{d}t\ .
\end{aligned}$$

Lo sviluppo di $\dfrac{4t}{\bigl(1+t\bigr)\bigl(t^2-4\bigr)}$ in fratti semplici è dalla forma

$$\frac{4t}{\bigl(1+t\bigr)\bigl(t^2-4\bigr)} = \frac{a}{t+1} + \frac{b}{t-2} + \frac{c}{t+2}$$

ed allora

$$4t = a(t^2-4) + b(t+1)(t+2) + c(t+1)(t-2)\ .$$

Risultano

$$a = \frac{4}{3}\,,\quad b = \frac{2}{3}\,,\quad c = -2$$

e di consequenza $\Bigl($tenendo conto nei calcoli che $\sqrt{2}-1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}+1}\Bigr)$

$$\int_1^{\sqrt{2}} \frac{4t}{\bigl(1+t\bigr)\bigl(t^2-4\bigr)}\,\mathrm{d}t$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_1^{\sqrt{2}} \left(\frac{4}{3\,(t+1)} + \frac{2}{3\,(t-2)} - \frac{2}{t+2} \right) \mathrm{d}t \\
&= \left(\frac{4}{3}\,\ln(t+1) + \frac{2}{3}\,\ln(2-t) - 2\,\ln(t+2) \right) \Bigg|_{t=1}^{t=\sqrt{2}} \\
&= \frac{4}{3}\,\ln\bigl(1+\sqrt{2}\bigr) - \frac{4}{3}\,\ln 2 + \frac{2}{3}\,\ln\bigl(2-\sqrt{2}\bigr) - 2\,\ln\bigl(2+\sqrt{2}\bigr) + 2\,\ln 3 \\
&= \frac{4}{3}\,\ln\bigl(1+\sqrt{2}\bigr) - \frac{4}{3}\,\ln 2 + \frac{2}{3}\,\ln\Bigl(\sqrt{2}\,\bigl(\sqrt{2}-1\bigr)\Bigr) \\
&\qquad\qquad - 2\,\ln\Bigl(\sqrt{2}\,\bigl(\sqrt{2}+1\bigr)\Bigr) + 2\,\ln 3 \\
&= \frac{4}{3}\,\ln\bigl(1+\sqrt{2}\bigr) - \frac{4}{3}\,\ln 2 + \frac{1}{3}\,\ln 2 + \frac{2}{3}\,\ln\frac{1}{\sqrt{2}+1} \\
&\qquad\qquad - \ln 2 - 2\,\ln\bigl(1+\sqrt{2}\bigr) + 2\,\ln 3 \\
&= -\frac{4}{3}\,\ln\bigl(1+\sqrt{2}\bigr) - 2\,\ln 2 + 2\,\ln 3\,.
\end{aligned}
$$

Concludiamo così che

$$
\begin{aligned}
&\int_1^2 \frac{\ln(4-x)}{(1+\sqrt{x})^2}\,\frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \\
&= \;-\,2\bigl(\sqrt{2}-1\bigr)\ln 2 + \ln 3 - \frac{4}{3}\,\ln\bigl(1+\sqrt{2}\bigr) - 2\,\ln 2 + 2\,\ln 3 \\
&= 3\,\ln 3 - 2\sqrt{2}\,\ln 2 - \frac{4}{3}\,\ln\bigl(1+\sqrt{2}\bigr)\,.
\end{aligned}
$$

Soluzione trovando prima una primitiva.

Sostanzialmente svolgeremo i stessi calcoli, la sola differenza consiste nel fatto che adesso applicheremo il teorema fondamentale del calcolo integrale solo una volta, alla fine.

Per trovare le primitive della funzione

$$
\frac{\ln(4-x)}{(1+\sqrt{x})^2}\,\frac{1}{\sqrt{x}}\,,
$$

definita in $\big(0\,,4\big)$ $\left(\text{dove } \dfrac{1}{\sqrt{x}} \text{ e } \ln(4-x) \text{ hanno senso}\right)$, usiamo prima la sostituzione

$$t=\sqrt{x}\in\big(0\,,2\big)\,,\qquad \mathrm{d}t=\frac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$$

e poi integrazione per parti, ottenendo

$$\begin{aligned}\int\frac{\ln(4-x)}{(1+\sqrt{x})^2}\,\frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x &= 2\int\frac{\ln\big(4-t^2\big)}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t\\ &= 2\int\ln\big(4-t^2\big)\,\mathrm{d}\left(-\,\frac{1}{1+t}\right)\\ &= -\,\frac{2\,\ln\big(4-t^2\big)}{1+t}-\int\frac{4t}{\big(1+t\big)\big(4-t^2\big)}\,\mathrm{d}t\,.\end{aligned}$$

Lo sviluppo di $\dfrac{4t}{\big(1+t\big)\big(4-t^2\big)}$ in fratti semplici (come abbiamo già visto qui sopra) è

$$\frac{4t}{\big(1+t\big)\big(4-t^2\big)}=-\,\frac{4}{3\,(1+t)}+\frac{2}{3\,(2-t)}+\frac{2}{2+t}$$

e risulta $\left(\text{tenendo conto nei calcoli che } 2-\sqrt{x}=\dfrac{4-x}{2+\sqrt{x}}\right)$

$$\begin{aligned}&\int\frac{\ln(4-x)}{(1+\sqrt{x})^2}\,\frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x\\ &= -\,\frac{2\,\ln\big(4-t^2\big)}{1+t}+\frac{4}{3}\ln(1+t)+\frac{2}{3}\ln(2-t)-2\,\ln(2+t)+C\\ &= -\,\frac{2\,\ln(4-x)}{1+\sqrt{x}}+\frac{4}{3}\ln\big(1+\sqrt{x}\big)+\frac{2}{3}\ln\big(2-\sqrt{x}\big)\\ &\qquad -2\,\ln\big(2+\sqrt{x}\big)+C\\ &= \frac{2}{3}\ln(4-x)-\frac{2\,\ln(4-x)}{1+\sqrt{x}}+\frac{4}{3}\ln\big(1+\sqrt{x}\big)-\frac{8}{3}\ln\big(2+\sqrt{x}\big)+C\,.\end{aligned}$$

Per finire, applichiamo il teorema fondamentale del calcolo integrale con la primitiva di cui sopra :

$$
\begin{aligned}
&\int_1^2 \frac{\ln(4-x)}{(1+\sqrt{x})^2}\,\frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{3}\ln 2 - \frac{2}{3}\ln 3 - \frac{2\ln 2}{1+\sqrt{2}} + \ln 3 + \frac{4}{3}\ln\bigl(1+\sqrt{2}\bigr) - \frac{4}{3}\ln 2 \\
&\qquad\qquad - \frac{8}{3}\ln\bigl(2+\sqrt{2}\bigr) + \frac{8}{3}\ln 3 \\
&= -\frac{2}{3}\ln 2 + 3\ln 3 - 2\bigl(\sqrt{2}-1\bigr)\ln 2 + \frac{4}{3}\ln\bigl(1+\sqrt{2}\bigr) \\
&\qquad\qquad - \frac{8}{3}\ln\Bigl(\sqrt{2}\bigl(\sqrt{2}+1\bigr)\Bigr) \\
&= -\frac{2}{3}\ln 2 + 3\ln 3 + \bigl(2-2\sqrt{2}\bigr)\ln 2 + \frac{4}{3}\ln\bigl(1+\sqrt{2}\bigr) \\
&\qquad\qquad - \frac{4}{3}\ln 2 - \frac{8}{3}\ln\bigl(1+\sqrt{2}\bigr) \\
&= 3\ln 3 - 2\sqrt{2}\ln 2 - \frac{4}{3}\ln\bigl(1+\sqrt{2}\bigr)\ .
\end{aligned}
$$

3) : Poiché

$$\lim_{n\to\infty} \sin\frac{1}{n} = 0\,,$$

per $k > 0$ il termine generale della serie ha un limite nonzero :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2+\left(\sin\dfrac{1}{n}\right)^k} = \frac{1}{2}\,.$$

Anche per $k = 0$ abbiamo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2+\left(\sin\dfrac{1}{n}\right)^k} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2+\left(\sin\dfrac{1}{n}\right)^0} = \frac{1}{3} \neq 0\,.$$

Cosicché per $k \geq 0$ la serie diverge.

Supponiamo adesso che $k < 0$, cioè $k = -p$ con $p > 0$, e confrontiamo la nostra serie con

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}\ \ :$$

Siccome

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{1}{2+\left(\sin\dfrac{1}{n}\right)^k}}{\dfrac{1}{n^p}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^p}{2+\left(\sin\dfrac{1}{n}\right)^k}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\dfrac{2}{n^p}+\left(n\,\sin\dfrac{1}{n}\right)^k}$$

e

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{n^p} = 0 \;\text{ e }\; \lim_{n\to\infty} n\,\sin\frac{1}{n} \overset{t=\frac{1}{n}}{=} \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1\,,$$

abbiamo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{1}{2+\left(\sin\dfrac{1}{n}\right)^k}}{\dfrac{1}{n^p}} = 1$$

ed il criterio del confronto asintotico implica che la nostra serie converge se e soltanto se converge la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}\,,$$

cioè esattamente per $p>1 \iff k<-1$.

Possiamo quindi concludere che la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2+\left(\sin\dfrac{1}{n}\right)^k}$$

converge se e solo se l'intero k è strettamente minore di -1, cioè per $k=-2\,,-3\,,-4\,,\dots$.

4) : L'integrale

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{(\sin x)^2}{x^s}\,\mathrm{d}x := \lim_{\substack{0<a\to 0\\ b\to+\infty}} \int\limits_a^b \frac{(\sin x)^2}{x^s}\,\mathrm{d}x$$

è improprio sia a 0 che all'infinito e la sua convergenza significa la convergenza simultanea di

$$\int_0^1 \frac{(\sin x)^2}{x^s}\,\mathrm{d}x := \lim_{0<a\to 0} \int_a^1 \frac{(\sin x)^2}{x^s}\,\mathrm{d}x$$

e di

$$\int_1^{+\infty} \frac{(\sin x)^2}{x^s}\,\mathrm{d}x := \lim_{b\to +\infty} \int_1^b \frac{(\sin x)^2}{x^s}\,\mathrm{d}x\,.$$

Poiché

$$\frac{(\sin x)^2}{x^s} = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \frac{1}{x^{s-2}} \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1\,,$$

abbiamo

$$\lim_{0<x\to 0} \frac{\dfrac{\sin x}{x}}{\dfrac{1}{x^{s-2}}} = 1$$

ed il criterio del confronto asintotico per integrali impropri implica

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{(\sin x)^2}{x^s}\,\mathrm{d}x \text{ converge} &\Longleftrightarrow \int_0^1 \frac{1}{x^{s-2}}\,\mathrm{d}x \text{ converge} \\ &\Longleftrightarrow s-2<1 \text{ cioè } s<3\,. \end{aligned} \tag{*}$$

D'altro canto, poiché

$$\left|\frac{(\sin x)^2}{x^s}\right| \leq \frac{1}{x^s}\,, \qquad x>0\,,$$

per il criterio del confronto per integrali impropri

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^s}\,\mathrm{d}x \text{ converge} \iff s>1$$

implica la convergenza di

$$\int_1^{+\infty} \frac{(\sin x)^2}{x^s}\,\mathrm{d}x\,.$$

Viceversa, se $s \le 1$ allora

$$\int_1^{+\infty} \frac{(\sin x)^2}{x^s}\,\mathrm{d}x \ge \int_1^{+\infty} \frac{(\sin x)^2}{x}\,\mathrm{d}x \ge \sum_{n=1}^{\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{(\sin x)^2}{x}\,\mathrm{d}x$$

$$\ge \sum_{n=1}^{\infty} \int_{n\pi+\frac{\pi}{4}}^{(n+1)\pi-\frac{\pi}{4}} \frac{(\sin x)^2}{x}\,\mathrm{d}x$$

$$\ge \sum_{n=1}^{\infty} \int_{n\pi+\frac{\pi}{4}}^{(n+1)\pi-\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}\,\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \ln \frac{(n+1)\pi - \dfrac{\pi}{4}}{n\pi + \dfrac{\pi}{4}} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n+1-\dfrac{1}{4}}{n+\dfrac{1}{4}}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{4n+3}{4n+1} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{2}{4n+1}\right)$$

$$\textit{vedi qui sotto } \to > \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{7}\,\frac{2}{4n+1} = \frac{5}{7} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n+1}$$

$$> \frac{5}{21} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$$

e quindi

$$\int_1^{+\infty} \frac{(\sin x)^2}{x^s}\,\mathrm{d}x \ \text{ diverge.}$$

Perciò

$$\int_1^{+\infty} \frac{(\sin x)^2}{x^s}\,\mathrm{d}x \text{ converge} \iff s > 1\,. \tag{**}$$

Notiamo che al punto marcato abbiamo usato che, per qualsiasi $\delta > 0$, vale la disuguaglianza

$$\ln(1+t) > \frac{1}{1+\delta}\,t\,, \qquad 0 < t \le \delta\ :$$

Infatti, la funzione $\varphi(t) := \ln(1+t) - \dfrac{1}{1+\delta}\, t$ si annulla in $t=0$ ed è strettamente crescente in $\big(0\,,\delta\big)$:

$$\varphi'(t) = \frac{1}{1+t} - \frac{1}{1+\delta} > 0 \text{ per } 0 < t < \delta\,.$$

Nel nostro caso δ era preso uguale a $\dfrac{2}{5}$ e per la disuguaglianza di cui sopra abbiamo avuto

$$\ln\!\left(1 + \frac{2}{4n+1}\right) > \frac{1}{1+\dfrac{2}{5}}\,\frac{2}{4n+1} = \frac{5}{7}\,\frac{2}{4n+1}$$

per ogni intero n soddisfacente

$$n \geq 1 \iff \frac{2}{4n+1} \leq \frac{2}{5}\,.$$

Sula base di (*) e (**) concludiamo che

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{(\sin x)^2}{x^s}\,\mathrm{d}x \text{ converge } \iff 1 < s < 3\,.$$