NOME: . . . . **MATRICOLA:** . . . .

Corso di Laurea in Fisica, A.A. 2010/2011
Calcolo 1, Esame scritto del 14.06.2011

1) Data la funzione

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}} \, \frac{x^2}{x-1} \, ,$$

a) determinare il dominio (massimale) di f ;

b) trovare tutti gli asintoti di f ;

c) trovare tutti i massimi e minimi locali di f ;

d) studiare la convessità di f ;

e) tracciare un grafico qualitativo di f .

2) Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\sin\left(\frac{1}{n}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{n}\right) \right]^n (5\,n^3)^n \, .$$

3) Calcolare una primitiva della funzione

$$f(x) = \frac{\operatorname{arctg}(\sqrt[3]{x})}{(\sqrt[3]{x}-1)^2}\,\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \;.$$

4) Sia data la funzione

$$f(x,y) = x^2 y + (y-1)^2 \;.$$

a) Trovare i massimi e minimi locali di f .

b) Data la forma differenziale

$$\omega = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\,\mathrm{d}y \;,$$

calcolare l'integrale curvilineo $\displaystyle\int_\gamma \omega$ dove γ è la curva data dal grafico della funzione $y = x\ln(x)$ per $x \in \big[1\,,e\big]$.

Soluzioni:

1) **:** a) $f(x)$ è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$ per quale si può dividere con x e $x-1$. Perciò il dominio di f è $\mathbb{R}\setminus\{0\,,1\} = \big(-\infty\,,0\big)\cup\big(0\,,1\big)\cup\big(0\,,+\infty\big)$.

b) Per trovare gli asintoti verticali calcoliamo i seguenti limiti :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0-0} f(x) &= \lim_{x\to 0-0} e^{\frac{1}{x}}\,\frac{x^2}{x-1} \\
&\overset{t=\frac{1}{x}}{=} \lim_{t\to -\infty} e^t\,\frac{1}{t(1-t)} \\
&= 0\,, \\
\lim_{x\to 0+0} f(x) &= \lim_{x\to 0+0} e^{\frac{1}{x}}\,\frac{x^2}{x-1} \\
&\overset{t=\frac{1}{x}}{=} \lim_{t\to +\infty} e^t\,\frac{1}{t(1-t)} \\
&= -\infty\,, \\
\lim_{x\to 1-0} f(x) &= \lim_{x\to 1-0} e^{\frac{1}{x}}\,\frac{x^2}{x-1} \\
&\overset{t=\frac{1}{x}}{=} \lim_{t\to 1+0} e^t\,\frac{1}{t(1-t)} \\
&= -\infty\,, \\
\lim_{x\to 1+0} f(x) &= \lim_{x\to 1+0} e^{\frac{1}{x}}\,\frac{x^2}{x-1} \\
&\overset{t=\frac{1}{x}}{=} \lim_{t\to 1-0} e^t\,\frac{1}{t(1-t)} \\
&= +\infty\,.
\end{aligned}$$

Risulta che f ha limite sinistro uguale a 0 in $x=0$, ma $x=0$ è asintoto verticale a destra. D'altro canto $x=1$ è asintoto verticale sia a sinistra che a destra.

La prima condizione per l'esistenza di un asintoto obliquo per $x\to\pm\infty$ è l'esistenza del limite finito

$$m_{\pm} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}$$

e si ottiene

$$m_\pm = \lim_{x\to\pm\infty} e^{\frac{1}{x}}\, \frac{x}{x-1} = e^0\, 1 = 1\ .$$

La seconda condizione perché esisti un asintoto obliquo per $x \to \pm\infty$, necessariamente di forma

$$y = m_\pm x + n_\pm = x + n_\pm\ ,$$

è l'esistenza del limite finito

$$n_\pm = \lim_{x\to\pm\infty} \big(f(x) - m_+ x\big) = \lim_{x\to\pm\infty} \big(f(x) - x\big)\ .$$

Verifichiamo che anche questo limite esiste :

$$\begin{aligned} n_\pm &= \lim_{x\to\pm\infty} \left(e^{\frac{1}{x}}\, \frac{x^2}{x-1} - x \right) \\ &\overset{t=\frac{1}{x}}{=} \lim_{t\to 0\pm 0} \left(e^t \frac{1}{t(1-t)} - \frac{1}{t} \right) = \lim_{t\to 0\pm 0} \frac{e^t - 1 + t}{t(1-t)} \\ &= \lim_{t\to 0\pm 0} \left(\frac{e^t - 1}{t} + 1 \right) \cdot \lim_{t\to 0\pm 0} \frac{1}{1-t} \\ &= 2\ . \end{aligned}$$

Cosicché $y = x + 2$ è un asintoto obliquo di f, sia per $x \to +\infty$ che per $x \to -\infty$.

c) Per trovare gli intervalli di monotonia e gli extremi locali di f, dobbiamo prima calcolare la sua derivata :

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{\frac{1}{x}} \left(-\frac{1}{x^2} \right) \frac{x^2}{x-1} + e^{\frac{1}{x}}\, \frac{2x(x-1) - x^2}{(x-1)^2} \\ &= e^{\frac{1}{x}}\, \frac{x^2 - 3x + 1}{(x-1)^2}\ . \end{aligned}$$

Risulta che i zeri di f' sono

$$\frac{3-\sqrt{5}}{2} \approx 0,382...\,, \qquad \frac{3+\sqrt{5}}{2} \approx 3,236...$$

e

$$f' \text{ è } > 0 \text{ in } \big(-\infty\,, 0\big) \cup \left(0\,, \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right),$$

$$f' \text{ è } < 0 \text{ in } \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\,,1\right) \cup \left(1\,,\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right),$$
$$f' \text{ è } > 0 \text{ in } \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\,,+\infty\right).$$

Cosicché f risulta ad essere

$$\text{strettamente crescente in } \big(-\infty\,,0\big)\,,$$
$$\text{strettamente crescente in } \left(0\,,\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right),$$
$$\text{strettamente decrescente in } \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\,,1\right),$$
$$\text{strettamente decrescente in } \left(1\,,\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right),$$
$$\text{strettamente crescente in } \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\,,+\infty\right).$$

In particolare, $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \approx 0,382...$ è un punto di massimo locale e

$$f\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) = e^{\frac{2}{3-\sqrt{5}}}\big(2-\sqrt{5}\big) \approx -3,235...\,,$$

mentre $\dfrac{3+\sqrt{5}}{2} \approx 3,236...$ è un punto di minimo locale e

$$f\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) = e^{\frac{2}{3+\sqrt{5}}}\big(2+\sqrt{5}\big) \approx 6,2066...\,.$$

Rimarchiamo che (l'estensione per continuità sinistra di) f ha derivata sinistra in 0 :

$$\begin{aligned} f_s'(0) = \lim_{0>x\to 0}\frac{f(x)-0}{x-0} &= \lim_{0>x\to 0} e^{\frac{1}{x}}\,\frac{x}{x-1} \\ &\overset{t=\frac{1}{x}}{=} \lim_{t\to-\infty} e^{t}\,\frac{1}{1-t} \\ &= 0\,, \end{aligned}$$

perciò il grafico fi f ha in 0 la semiretta tangente orizzontale

$$\{(x\,,0)\,;\,x\leq 0\}\,.$$

d) Per studiare la convessità di f calcoliamo la sua seconda derivata :

$$\begin{aligned}
f''(x) &= \left(e^{\frac{1}{x}}\,\frac{x^2-3x+1}{(x-1)^2}\right)' = \left(e^{\frac{1}{x}}\Big(1-\frac{x}{(x-1)^2}\Big)\right)' \\
&= e^{\frac{1}{x}}\left[\Big(-\frac{1}{x^2}\Big)\frac{x^2-3x+1}{(x-1)^2} - \left(\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{2x}{(x-1)^3}\right)\right] \\
&= e^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{x^2-3x+1}{x^2(x-1)^2}+\frac{x+1}{(x-1)^3}\right) \\
&= e^{\frac{1}{x}}\,\frac{5x^2-4x+1}{x^2(x-1)^3}
\end{aligned}$$

Poiché $5x^2-4x+1=0$ non ha radici reali e quindi $5x^2-4x+1>0$ per ogni $x\in\mathbb{R}$, risulta che

f'' è <0 in $(-\infty\,,0)$ e quindi f è concava in $(-\infty\,,0)$,

f'' è <0 in $(0\,,1)$ e quindi f è concava in $(0\,,1)$,

f'' è >0 in $(1\,,+\infty)$ e quindi f è convessa in $(1\,,+\infty)$.

e) Riportiamo il comportamento di f', f'' e f nella seguente tabella :

x	$-\infty$	0		$\frac{3-\sqrt5}{2}$		1		$\frac{3+\sqrt5}{2}$		$+\infty$
f'	$+$	$0\,\vert$	$+$	0	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
f''	$-$	$\vert$		$-$		$\vert$		$+$		
f	$-\infty\ \nearrow$	$0\,\vert-\infty$	$\nearrow$	$e^{\frac{2}{3-\sqrt5}}(2+\sqrt5)$	$\searrow$	$-\infty\,\vert+\infty$	$\searrow$	$e^{\frac{2}{3+\sqrt5}}(2+\sqrt5)$	$\nearrow$	$+\infty$

Ora abbiamo tutte le informazioni per tracciare il grafico di f :

$y=x+2$ è asintoto obliquo di f per $x\to-\infty$. Il grafico di f sale da $-\infty$ fino al punto $(0\,,0)$, dove ha una semiretta tangente orizzontale, restando sempre sotto l'asintoto :

Infatti, per ogni $x\leq -1$, moltiplicando la disuguaglianza

$$e^{\frac{1}{x}} = 1+\frac{1}{x}+\frac{1}{2!}\,\frac{1}{x^2}+\frac{1}{3!}\,\frac{1}{x^3}+\frac{1}{4!}\,\frac{1}{x^4}++\frac{1}{5!}\,\frac{1}{x^5}+\ ...$$

$$= 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2!}\,\frac{1}{x^2}\Bigg(\underbrace{1 + \frac{1}{3\,x}}_{>\,0}\Bigg) + \frac{1}{4!}\,\frac{1}{x^4}\Bigg(\underbrace{1 + \frac{1}{5\,x}}_{>\,0}\Bigg) + \,...$$

$$> 1 + \frac{1}{x}$$

con $\dfrac{x^2}{x-1} < 0$, si ottiene

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}}\,\frac{x^2}{x-1} < \left(1 + \frac{1}{x}\right)\frac{x^2}{x-1} = x + 2 + \frac{2}{x-1} < x + 2\,.$$

D'altro canto, per $-1 < x < 0$ vale ovviamente

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}}\,\frac{x^2}{x-1} < 0 < x + 2\,.$$

Poi il grafico di f sale da $-\infty$ lungo l'asintoto verticale a destra $x = 0$ fino al punto di massimo locale $\left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\,,\, e^{\frac{2}{3-\sqrt{5}}}\big(2-\sqrt{5}\big)\right)$, dove ha tangente orizzontale, per scendere dopo a $-\infty$ lungo l'asintoto verticale a sinistra $x = 1$.

Finalmente, il grafico scende da $+\infty$ lungo l'asintoto verticale a destra $x = 1$ fino al punto di minimo locale $\left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\,,\, e^{\frac{2}{3+\sqrt{5}}}\big(2+\sqrt{5}\big)\right)$, dove ha tangente orizzontale, per salire successivamente a $+\infty$, avvicinando sempre di più l'asintoto obliquo $y = x + 2$, restando però sopra l'asintoto :

Infatti, per ogni $x > 1$, moltiplicando la disuguaglianza

$$e^{\frac{1}{x}} = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2!}\,\frac{1}{x^2} + \frac{1}{3!}\,\frac{1}{x^3} + \frac{1}{4!}\,\frac{1}{x^4} + + \frac{1}{5!}\,\frac{1}{x^5} + \,... > 1 + \frac{1}{x}$$

con $\dfrac{x^2}{x-1} > 0$, si ottiene

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}}\,\frac{x^2}{x-1} > \left(1 + \frac{1}{x}\right)\frac{x^2}{x-1} = x + 2 + \frac{2}{x-1} > x + 2\,.$$

Sui tratti $\big(-\infty\,,0\big]$ e $\big(0\,,1\big)$ la funzione è concava, mentre sul tratto $\big(1\,,+\infty\big)$ è convessa.

2) **:** Abbiamo da studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\sin\left(\frac{1}{n}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{n}\right)\right]^n (5\,n^3)^n$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left[5\,n^3 \left(\sin\left(\frac{1}{n}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right]^n .$$

Se

$$d_n := 5\,n^3 \left(\sin\left(\frac{1}{n}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

fosse positivo almeno definitivamente, potremmo tentare di applicare il criterio della radice. Perciò esaminiamo d_n per prima.

Abbiamo

$$d_n = 5\,\frac{1}{t^3}\big(\sin t - \operatorname{arctg} t\big) \text{ ove } t = \frac{1}{n} .$$

Ma la formula di Taylor con il resto di Peano ci fornisce da una parte

$$\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + o\big(t^3\big) \text{ per } t \to 0 ,$$

e dall'altra parte

$$\operatorname{arctg} t = t - \frac{t^3}{3} + o\big(t^3\big) \text{ per } t \to 0 .$$

Deduciamo che

$$\sin t - \operatorname{arctg} t = \frac{t^3}{6} + o\big(t^3\big) \text{ per } t \to 0$$

e di conseguenza

$$5\,\frac{1}{t^3}\big(\sin t - \operatorname{arctg} t\big) = \frac{5}{6} + \frac{o\big(t^3\big)}{t^3} \text{ per } t \to 0 ,$$
$$d_n = 5\,n^3 \left(\sin\left(\frac{1}{n}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{5}{6} + n^3\, o\left(\frac{1}{n^3}\right) \text{ per } n \to \infty .$$

Poiché

$$\lim_{n\to\infty} n^3\, o\left(\frac{1}{n^3}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{o\left(\dfrac{1}{n^3}\right)}{\dfrac{1}{n^3}} = 0 ,$$

risulta

$$\lim_{n\to\infty} d_n = \frac{5}{6}\,. \tag{*}$$

Cosicché il termine generale $\big(d_n\big)^n$ della nostra serie è definitivamente positivo.

Ora possiamo applicare il criterio della radice : per (*) abbiamo

$$\lim_{n\to\infty} \Big(\big(d_n\big)^n\Big)^{1/n} = \lim_{n\to\infty} d_n = \frac{5}{6} < 1$$

e concludiamo che la nostra serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \big(d_n\big)^n$$

è convergente.

Rimarco 1.

Nella soluzione del compito precedente abbiamo visto che

$$\frac{1}{t^3}\big(\sin t - \operatorname{arctg} t\big) = \frac{1}{6} + \frac{o\big(t^3\big)}{t^3} \text{ per } t \to 0\,,$$

quindi che

$$\sin t - \operatorname{arctg} t > 0 \tag{**}$$

se t è abbastanza vicino a 0 . Qui mostreremo che (**) vale addirittura per ogni $0 < t \leq 1$, in particolare

$$d_n = 5\,n^3\bigg(\sin\Big(\frac{1}{n}\Big) - \operatorname{arctg}\Big(\frac{1}{n}\Big)\bigg) > 0 \text{ per ogni intero } n \geq 1\,.$$

(i) Per prima, usando i sviluppi in serie die Taylor

$$\begin{aligned} \sin t &= t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + \frac{t^9}{9!} - \ ...\,, \qquad t \in \mathbb{R}\,, \\ \operatorname{arctg} t &= t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + \frac{t^9}{9} - \ ...\,, \qquad t \in (-1\,,1)\,, \end{aligned}$$

mostriamo che (**) vale per ogni $0 < t \leq \sqrt{\dfrac{20}{23}} \approx 0,93250\ldots$. Infatti, abbiamo per ogni $t \in (0\,,1)$

$$
\begin{aligned}
&\sin t - \operatorname{arctg} t \\
&= \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3!}\right)t^3 - \left(\frac{1}{5}-\frac{1}{5!}\right)t^5 + \left(\frac{1}{7}-\frac{1}{7!}\right)t^7 - \left(\frac{1}{9}-\frac{1}{9!}\right)t^9 + \dots \\
&= t^3\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3!}-\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{5!}\right)t^2\right) + t^7\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{7!}-\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{9!}\right)t^2\right) + \dots \\
&> t^3\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3!}-\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{5!}\right)t^2\right) + t^7\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{7!}-\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{9!}\right)\right) + \dots \\
&= t^3\left(\frac{1}{6}-\frac{23}{120}\,t^2\right) + t^7\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{9}-\left(\frac{1}{7!}-\frac{1}{9!}\right)\right) + \dots \,.
\end{aligned}
$$

Siccome

$$
\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2} = \frac{2}{k\,(k+2)} \geq \frac{1}{(k-1)\,k} > \frac{1}{k!}-\frac{1}{(k+2)!}\,, \qquad k \geq 4\,,
$$

risulta

$$
\sin t - \operatorname{arctg} t > t^3\left(\frac{1}{6}-\frac{23}{120}\,t^2\right) = \frac{23\,t^3}{120}\left(\frac{20}{23}-t^2\right), \qquad t \in (0\,,1)
$$

e quindi

$$
\sin t - \operatorname{arctg} t > 0 \ \text{ per } \ 0 < t \leq \sqrt{\frac{20}{23}} \approx 0,93250\,.
$$

(ii) Resta quindi di mostrare che (**) vale anche per t nell'intervallo $\left[\sqrt{\dfrac{20}{23}}\,,1\right]$. A questo fine basta mostrare che la funzione

$$
f(t) := \sin t - \operatorname{arctg} t
$$

è strettamente concava (cioè soddisfacente $f''(t) < 0$) in $\left(\sqrt{\dfrac{20}{23}}\,,1\right)$ e

$$
f\left(\sqrt{\frac{20}{23}}\right) > 0 \ \big(\text{già visto in (i)}\big)\,, \quad f(1) > 0\,.
$$

Infatti, *se* $f : [a\,,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *è una funzione continua, due volte derivabile in* $(a\,,b)$ *e soddisfacente* $f''(t) < 0$ *per* $t \in (a\,,b)$ *, allora il grafico di* f *in* $(a\,,b)$ *si trova strettamente sopra la corda che riunisce il punto* $\big(a\,,f(a)\big)$ *con* $\big(b\,,f(b)\big)$ *:*

$$
\begin{aligned}
f(t) &> f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\,(t-a)\\
&= f(a)\,\frac{b-t}{b-a} + f(b)\,\frac{t-a}{b-a}\,, \qquad t\in(a\,,b)\,.
\end{aligned}
$$

Perciò $f(a)\geq 0$ *e* $f(b)\geq 0$ *implicano che* $f(t)>0$ *per ogni* $t\in(a\,,b)$ *.*

La funzione $g:[a\,,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ definita tramite

$$g(t) := f(t) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\,(t-a)$$

è continua, due volte derivabile in $(a\,,b)$, e con $g''(t)=f''(t)<0$ per $t\in(a\,,b)$. Per di più,

$$g(a)=0=g(b)\,.$$

Affermiamo che allora

$$g(t)>0\,, \qquad t\in(a\,,b)\,.$$

Infatti, supponiamo che esiste un $t_o\in(a\,,b)$ tale che $g(t_o)\leq 0$. Per il teorema del valor medio di Lagrange esistono

$$a<\tau_1<t_o<\tau_2<b$$

tale che

$$
\begin{aligned}
g(t_o) &= g(t_o)-g(a) = g'(\tau_1)\,(t_o-a)\,,\\
-\,g(t_o) &= g(b)-g(t_o) = g'(\tau_2)\,(b-t_o)\,.
\end{aligned}
$$

Risulta

$$g'(\tau_1) = \frac{g(t_o)}{t_o-a} \leq 0 \leq -\,\frac{g(t_o)}{b-t_o} = g'(\tau_2)\,,$$

in contradizione con il fatto che $g''(t)=f''(t)<0$ per $t\in(a\,,b)$ e quindi g' è strettamente decrescente in $(a\,,b)$.

(iii) Mostriamo ora che $f(t):=\sin t-\mathrm{arctg}\,t$ è strettamente concava in un intervallo contenente $\left(\sqrt{\dfrac{20}{23}}\,,1\right)$.

Abbiamo

$$f'(t)=\cos t-\frac{1}{1+t^2}\,, \quad f''(t)=-\sin t+\frac{2\,t}{(1+t^2)^2}\,,$$

perciò

$$f''(t) \leq -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{2\,t}{(1+t^2)^2}\,, \qquad \frac{\pi}{4} \leq t \leq \frac{3\,\pi}{4}\,.$$

Poiché

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{2\,t}{(1+t^2)^2} < 0 \iff 2\sqrt{2}t < (\underbrace{1+t^2}_{2\,t\,\leq})^2 \impliedby 2\sqrt{2}t < 4\,t^2$$

e quindi

$$t > \frac{1}{\sqrt{2}} \implies -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{2\,t}{(1+t^2)^2} < 0\,,$$

ma anche

$$\frac{1}{\sqrt{2}} < \frac{3}{4} < \frac{\pi}{4}\,,$$

risulta

$$f''(t) \leq -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{2\,t}{(1+t^2)^2} < 0\,, \qquad t \in \left(\frac{\pi}{4}\,, \frac{3\,\pi}{4}\right) \supset \left(\sqrt{\frac{20}{23}}\,, 1\right).$$

(iv) Finalmente mostriamo che $f(1) > 0$.

Usando il sviluppio in serie di Taylor risulta

$$\sin 1 = 1 - \frac{1}{3!} + \underbrace{\frac{1}{5!} - \frac{1}{7!}}_{>\,0} + \underbrace{\frac{1}{9!} - \frac{1}{11!}}_{>\,0} + ... > 1 - \frac{1}{3!} = \frac{5}{6} > \frac{\pi}{4}$$

$$f(1) = \sin 1 - \operatorname{arctg} 1 = \sin 1 - \frac{\pi}{4} > 0\,.$$

(v) Concludiamo che (**) vale per ogni $0 < t \leq 1$.

Rimarco 2.

Nel Rimarco 1 abbiamo visto che

$$f(t) = \sin t - \operatorname{arctg} t$$

è > 0 per ogni $0 < t \leq 1$. Cerchiamo ora di chiarire che segno ha $f(t)$ per $t > 1$.

Anzitutto

$$f(t) < 0 \;\text{ per }\; t \geq \operatorname{tg} 1 = 1,55\,...\;: \qquad (***)$$

Infatti, per $t \geq \operatorname{tg} 1$ abbiamo

$$f(t) = \sin t - \operatorname{arctg} t \leq 1 - \operatorname{arctg}\big(\operatorname{tg} 1\big) = 0$$

e l'ugualità sarebbe possibile solo se fossero verificate

$$\sin t = 1 \ \text{ e } \ t = \operatorname{tg} 1$$

cioè se fosse

$$\operatorname{tg} 1 = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \text{ per un intero } k\,.$$

Ma $\operatorname{tg} 1 = \dfrac{\sin 1}{\cos 1}$ e

$$\sin 1 = 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} + \underbrace{\frac{1}{9!} - \frac{1}{11!}}_{>0} + \ldots > 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!}\,,$$

$$\cos 1 = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} \underbrace{- \frac{1}{6!} + \frac{1}{8!}}_{<0} - \ldots < 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!}\,,$$

$$\sin 1 = 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} \underbrace{- \frac{1}{7!} + \frac{1}{9!}}_{<0} - \ldots < 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!}\,,$$

$$\cos 1 = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{6!} + \underbrace{\frac{1}{8!} - \frac{1}{10!}}_{>0} + \ldots > 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{6!}\,,$$

implicano

$$\operatorname{tg} 1 > \frac{1 - \dfrac{1}{3!} + \dfrac{1}{5!} - \dfrac{1}{7!}}{1 - \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{4!}} = \frac{4241}{2730} = 1,553\ldots\,,$$

$$\operatorname{tg} 1 < \frac{1 - \dfrac{1}{3!} + \dfrac{1}{5!}}{1 - \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{4!} - \dfrac{1}{6!}} = \frac{606}{389} = 1,557\ldots\,.$$

Risulta che $\operatorname{tg} 1 = 1.55\ldots \in \left(0\,, \dfrac{\pi}{2}\right)$ non è della forma $2k\pi + \dfrac{\pi}{2}$ per un intero k.

Nel Rimarco 1 (iii) abbiamo visto che f è strettamente concava in $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right) \supset \left[1, \operatorname{tg} 1\right]$, perciò la derivata f' è strettamente decrescente in $\left[1, \operatorname{tg} 1\right]$. Ma $f'(1) > 0$:

Infatti

$$f'(1) = \cos 1 - \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2!} + \underbrace{\frac{1}{4!} - \frac{1}{6!}}_{>0} + \ldots - \frac{1}{2}$$
$$> 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{2} = 0 .$$

D'altro canto $f'\big(\operatorname{tg} 1\big) < 0$:

Se fosse $f'\big(\operatorname{tg} 1\big) \geq 0$, allora avremmo $f'(t) > f'\big(\operatorname{tg} 1\big) \geq 0$ per ogni $1 < t < \operatorname{tg} 1$ e risulterebbe che f è strettamente cerscente in $\left[1, \operatorname{tg} 1\right]$, quindi $f\big(\operatorname{tg} 1\big) > f(1) > 0$, contradicendo (***) .

Risulta che la funzione strettamente decrescente f' si annulla una sola volta in $\left[1, \operatorname{tg} 1\right]$. Sia $t_{\max}$ l'unico punto in $\big(1, \operatorname{tg} 1\big)$ con $f'(t_{\max}) = 0$. Allora

$f'(t) > 0$ per $1 \leq t < t_{\max}$,

perciò f cresce strettamente in $\left[1, t_{\max}\right]$,

$f'(t) < 0$ per $t_{\max} \leq t < \operatorname{tg} 1$,

perciò f decresce strettamente in $\left[t_{\max}, \operatorname{tg} 1\right]$.

Risulta $0 < f(1) < f\big(t_{\max}\big)$ e, poiché $f\big(\operatorname{tg} 1\big) \overset{(***)}{<} 0$, il teorema di esistenza degli zeri implica l'esistenza di un punto $t_o \in \big(t_{\max}, \operatorname{tg} 1\big)$ per cui

$$f(t) > 0 \text{ per } 1 \leq t < t_o , \quad f(t_o) = 0 , \quad f(t) < 0 \text{ per } t_o < t \leq \operatorname{tg} 1 .$$

Concludiamo che

$$\boxed{\begin{array}{l} \qquad\qquad \sin t - \operatorname{arctg} t > 0 \text{ per } 0 < t < t_0 , \\ \qquad\qquad \sin t_o - \operatorname{arctg} t_o = 0 , \\ \qquad\qquad \sin t - \operatorname{arctg} t < 0 \text{ per } t > t_0 \\ \text{ove } 1 < t_o < \operatorname{tg} 1 = 1,55 \ldots . \end{array}}$$

3) : Per trovare una primitiva della funzione

$$f(x) = \frac{\operatorname{arctg}(\sqrt[3]{x})}{(\sqrt[3]{x}-1)^2}\,\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\,,$$

usiamo prima la sostituzione

$$t = \sqrt[3]{x}\,, \qquad \mathrm{d}t = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\,\mathrm{d}x$$

e poi integrazione per parti, ottenendo

$$\begin{aligned}\int \frac{\operatorname{arctg}(\sqrt[3]{x})}{(\sqrt[3]{x}-1)^2}\,\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\,\mathrm{d}x &= 3\int \frac{\operatorname{arctg} t}{(t-1)^2}\,\mathrm{d}t = 3\int \operatorname{arctg} t\,\mathrm{d}\Big(-\frac{1}{t-1}\Big)\\ &= -3\,\frac{\operatorname{arctg} t}{t-1} + 3\int \frac{1}{(t-1)(1+t^2)}\,\mathrm{d}t\,.\end{aligned}$$

Lo sviluppo di $\dfrac{1}{(t-1)(1+t^2)}$ in fratti semplici è dalla forma

$$\frac{1}{(t-1)(1+t^2)} = \frac{a}{t-1} + \frac{b\,t+c}{1+t^2}$$

ed allora

$$1 = a(1+t^2) + (b\,t+c)(t-1)\,.$$

Risultano

$$a = \frac{1}{2}\,, \quad b = c = -\frac{1}{2}$$

e di conseguenza

$$\begin{aligned}&\int \frac{\operatorname{arctg}(\sqrt[3]{x})}{(\sqrt[3]{x}-1)^2}\,\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\,\mathrm{d}x\\ &= -3\,\frac{\operatorname{arctg} t}{t-1} + 3\int \frac{1}{(t-1)(1+t^2)}\,\mathrm{d}t\\ &= -3\,\frac{\operatorname{arctg} t}{t-1} + \frac{3}{2}\int \frac{1}{t-1}\,\mathrm{d}t - \frac{3}{2}\int \frac{t+1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\\ &= -3\,\frac{\operatorname{arctg} t}{t-1} + \frac{3}{2}\,\ln|t-1| - \frac{3}{4}\int \frac{2t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t - \frac{3}{2}\int \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\\ &= -3\,\frac{\operatorname{arctg} t}{t-1} + \frac{3}{2}\,\ln|t-1| - \frac{3}{4}\ln(1+t^2) - \frac{3}{2}\operatorname{arctg} t + C\end{aligned}$$

$$= 3\,\frac{\operatorname{arctg} t}{1-t} - \frac{3}{2}\operatorname{arctg} t + \frac{3}{4}\ln\frac{(1-t)^2}{1+t^2} + C$$

$$= 3\,\frac{\operatorname{arctg}(\sqrt[3]{x})}{1-\sqrt[3]{x}} - \frac{3}{2}\operatorname{arctg}(\sqrt[3]{x}) + \frac{3}{4}\ln\frac{\left(1-\sqrt[3]{x}\right)^2}{1+\sqrt[3]{x^2}} + C\,.$$

4) : a) I massimi e minimi relativi di f sono *punti stazionari*, cioè annullano le derivate parziali di

$$f(x,y) = x^2y + (y-1)^2\ .$$

Per trovarli, calcoliamo le derivate parziali di f :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2\,x\,y\,,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 2\,(y-1)\,.$$

Risulta che i punti stazionari di f sono le soluzioni del sistema di equazioni

$$\begin{cases} 2\,x\,y = 0 \\ x^2 + 2\,(y-1) = 0 \end{cases}\,,$$

cioè i punti

$$(\sqrt{2}\,,0)\,,\quad (-\sqrt{2}\,,0)\,,\quad (0\,,1)\,.$$

Per poter dire se un punto stazionario è massimo o minimo relativo, calcoliamo anche le derivate parziali di secondo ordine :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2\,y\,,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} = 2\,x\,,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2\ .$$

Perciò la matrice hessiana di f in $(x\,,y)$ è

$$H_f(x\,,y) = \begin{pmatrix} 2\,y & 2\,x \\ 2\,x & 2 \end{pmatrix}$$

con determinante

$$\det H_f(x\,,y) = 4\,(y-x^2)\ .$$

In particolare

$$H_f(\pm\sqrt{2}\,,0) = \begin{pmatrix} 0 & \pm\sqrt{2} \\ \pm\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}\,, \quad \det H_f(\pm\sqrt{2}\,,0) = -8 < 0$$

e risulta che $(\pm\sqrt{2}\,,0)$ sono punti sella.
D'altro canto abbiamo

$$H_f(0\,,1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\,, \quad \det H_f(0\,,1) = 4 > 0$$

e, poiché il determinante della matrice hessiana $H_f(0\,,1)$ è > 0 e l'elemento nell'angolo sinistro superiore è $2 > 0$, concludiamo che $(0\,,1)$ è un punto di minimo locale.

b) La forma differenziale

$$\omega = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\,\mathrm{d}y = 2\,x\,\mathrm{d}x + 2\,x\,\mathrm{d}y$$

non è chiusa e quindi non è esatta :

$$\frac{\partial}{\partial y}(2\,x) = 0 \neq 2 = \frac{\partial}{\partial x}(2\,x)\ .$$

Perciò non abbiamo altra scelta che calcolare $\int\limits_\gamma \omega$ direttamente, usando la parametrizzazione di γ data dalla sua struttura di grafico :

$$\begin{aligned}
\int\limits_\gamma \omega &= \int\limits_1^e 2\,x\,\mathrm{d}x + \int\limits_1^e 2\,x\big(x\ln x\big)'\mathrm{d}x \\
&= \int\limits_1^e 2\,x\,\mathrm{d}x + \int\limits_1^e 2\,x\big(1+\ln x\big)\mathrm{d}x = \int\limits_1^e 4\,x\,\mathrm{d}x + \int\limits_1^e \ln x\,\mathrm{d}(x^2) \\
&= (2\,x^2)\Big|_{x=1}^{x=e} + (x^2\ln x)\Big|_{x=1}^{x=e} - \int\limits_1^e \left(x^2\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x \\
&= 2\,e^2 - 2 + e^2 - \frac{x^2}{2}\Big|_{x=1}^{x=e} = \frac{5}{2}\,e^2 - \frac{3}{2}\ .
\end{aligned}$$