NOME: .... **MATRICOLA:** ....

Corso di Laurea in Fisica, A.A. 2007/2008
Calcolo 1, Esame scritto del 14.06.2011

1) Data la funzione

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}} \, \frac{x^2}{x-1} \, ,$$

a) determinare il dominio (massimale) di f ;

b) trovare tutti gli asintoti di f ;

c) trovare tutti i massimi e minimi locali di f ;

d) tracciare un grafico qualitativo di f .

2) Calcolare una primitiva della funzione

$$f(x) = \frac{\operatorname{arctg}(\sqrt{x}\,)}{(\sqrt{x}-1)^2} \, \frac{1}{\sqrt{x}} \, .$$

3) Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n} - \sin\left(\frac{1}{n}\right) \right]^n (5\,n^3)^n \,.$$

4) Trovare tutti i numeri complessi $z \in \mathbb{C}$ soddisfacenti l'inequazione

$$\big(z - \overline{z}\big)^2 \geq 0 \,.$$

Soluzioni:

1) : a) $f(x)$ è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$ per quale si può dividere con x e $x-1$. Perciò il dominio di f è $\mathbb{R} \setminus \big\{0\,,1\big\} = \big(-\infty\,,0\big) \cup \big(0\,,1\big) \cup \big(0\,,+\infty\big)$.

b) Per trovare gli asintoti verticali calcoliamo i seguenti limiti :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0-0} f(x) &= \lim_{x\to 0-0} e^{\frac{1}{x}}\,\frac{x^2}{x-1} \\
&\overset{t=\frac{1}{x}}{=} \lim_{t\to-\infty} e^t\,\frac{1}{t(1-t)} \\
&= 0\,, \\
\lim_{x\to 0+0} f(x) &= \lim_{x\to 0+0} e^{\frac{1}{x}}\,\frac{x^2}{x-1} \\
&\overset{t=\frac{1}{x}}{=} \lim_{t\to+\infty} e^t\,\frac{1}{t(1-t)} \\
&= -\infty\,, \\
\lim_{x\to 1-0} f(x) &= \lim_{x\to 1-0} e^{\frac{1}{x}}\,\frac{x^2}{x-1} \\
&\overset{t=\frac{1}{x}}{=} \lim_{t\to 1+0} e^t\,\frac{1}{t(1-t)} \\
&= -\infty\,, \\
\lim_{x\to 1+0} f(x) &= \lim_{x\to 1+0} e^{\frac{1}{x}}\,\frac{x^2}{x-1} \\
&\overset{t=\frac{1}{x}}{=} \lim_{t\to 1-0} e^t\,\frac{1}{t(1-t)} \\
&= +\infty\,.
\end{aligned}$$

Risulta che f ha limite sinistro uguale a 0 in $x=0$, ma $x=0$ è asintoto verticale a destra. D'altro canto $x=1$ è asintoto verticale sia a sinistra che a destra.

La prima condizione per l'esistenza di un asintoto obliquo per $x \to \pm\infty$ è l'esistenza del limite finito

$$m_\pm = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}$$

e si ottiene

$$m_{\pm} = \lim_{x\to\pm\infty} e^{\frac{1}{x}}\, \frac{x}{x-1} = e^0\, 1 = 1\ .$$

La seconda condizione perché esisti un asintoto obliquo per $x \to \pm\infty$, necessariamente di forma

$$y = m_{\pm} x + n_{\pm} = x + n_{\pm}\ ,$$

è l'esistenza del limite finito

$$n_{\pm} = \lim_{x\to\pm\infty} \big(f(x) - m_{+} x \big) = \lim_{x\to\pm\infty} \big(f(x) - x \big)\ .$$

Verifichiamo che anche questo limite esiste :

$$\begin{aligned}
n_{\pm} &= \lim_{x\to\pm\infty} \left(e^{\frac{1}{x}}\, \frac{x^2}{x-1} - x \right) \\
&\overset{t=\frac{1}{x}}{=} \lim_{t\to 0\pm 0} \left(e^t \frac{1}{t(1-t)} - \frac{1}{t} \right) = \lim_{t\to 0\pm 0} \frac{e^t - 1 + t}{t(1-t)} \\
&= \lim_{t\to 0\pm 0} \left(\frac{e^t - 1}{t} + 1 \right) \cdot \lim_{t\to 0\pm 0} \frac{1}{1-t} \\
&= 2\ .
\end{aligned}$$

Cosicché $y = x + 2$ è un asintoto obliquo di f, sia per $x \to +\infty$ che per $x \to -\infty$.

c) Per trovare gli intervalli di monotonia e gli extremi locali di f, dobbiamo prima calcolare la sua derivata :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= e^{\frac{1}{x}} \left(-\frac{1}{x^2} \right) \frac{x^2}{x-1} + e^{\frac{1}{x}}\, \frac{2x(x-1) - x^2}{(x-1)^2} \\
&= e^{\frac{1}{x}}\, \frac{x^2 - 3x + 1}{(x-1)^2}\ .
\end{aligned}$$

Risulta che i zeri di f' sono

$$\frac{3-\sqrt{5}}{2} \approx 0,382...\,, \qquad \frac{3+\sqrt{5}}{2} \approx 3,236...$$

e

$$f' \text{ è } > 0 \text{ in } \big(-\infty\,, 0 \big) \cup \left(0\,, \frac{3-\sqrt{5}}{2} \right),$$

$$
\begin{aligned}
f' \text{ è } < 0 \text{ in } &\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\,,1\right) \cup \left(1\,,\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right),\\
f' \text{ è } > 0 \text{ in } &\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\,,+\infty\right).
\end{aligned}
$$

Cosicché f risulta ad essere

$$
\begin{aligned}
&\text{strettamente crescente in } \big(-\infty\,,0\big)\,,\\
&\text{strettamente crescente in } \left(0\,,\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right),\\
&\text{strettamente decrescente in } \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\,,1\right),\\
&\text{strettamente decrescente in } \left(1\,,\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right),\\
&\text{strettamente crescente in } \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\,,+\infty\right).
\end{aligned}
$$

In particolare, $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \approx 0,382...$ è un punto di massimo locale e

$$
f\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) = e^{\frac{2}{3-\sqrt{5}}}\big(2-\sqrt{5}\big) \approx -3,235...\,,
$$

mentre $\dfrac{3+\sqrt{5}}{2} \approx 3,236...$ è un punto di minimo locale e

$$
f\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) = e^{\frac{2}{3+\sqrt{5}}}\big(2+\sqrt{5}\big) \approx 6,2066...\,.
$$

Rimarchiamo che (l'estensione per continuità sinistra di) f ha derivata sinistra in 0 :

$$
\begin{aligned}
f_s^{'}(0) = \lim_{0>x\to 0}\frac{f(x)-0}{x-0} &= \lim_{0>x\to 0} e^{\frac{1}{x}}\,\frac{x}{x-1}\\
&\overset{t=\frac{1}{x}}{=} \lim_{t\to-\infty} e^{t}\,\frac{1}{1-t}\\
&= 0\,,
\end{aligned}
$$

perciò il grafico fi f ha in 0 la semiretta tangente orizzontale

$$\big\{(x\,,0)\,;\,x\leq 0\big\}\,.$$

d) Per studiare la convessità di f calcoliamo la sua seconda derivata :

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(e^{\frac{1}{x}}\,\frac{x^2-3x+1}{(x-1)^2}\right)' = \left(e^{\frac{1}{x}}\Big(1-\frac{x}{(x-1)^2}\Big)\right)' \\ &= e^{\frac{1}{x}}\left[\Big(-\frac{1}{x^2}\Big)\frac{x^2-3x+1}{(x-1)^2}-\Big(\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{2x}{(x-1)^3}\Big)\right] \\ &= e^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{x^2-3x+1}{x^2(x-1)^2}+\frac{x+1}{(x-1)^3}\right) \\ &= e^{\frac{1}{x}}\,\frac{5x^2-4x+1}{x^2(x-1)^3} \end{aligned}$$

Poiché $5x^2-4x+1=0$ non ha radici reali e quindi $5x^2-4x+1>0$ per ogni $x\in\mathbb{R}$, risulta che

f'' è <0 in $\big(-\infty\,,0\big)$ e quindi f è concava in $\big(-\infty\,,0\big)$,

f'' è <0 in $\big(0\,,1\big)$ e quindi f è concava in $\big(0\,,1\big)$,

f'' è >0 in $\big(1\,,+\infty\big)$ e quindi f è convessa in $\big(1\,,+\infty\big)$.

e) Riportiamo il comportamento di f', f'' e f nella seguente tabella :

x	$-\infty$		0		$\frac{3-\sqrt{5}}{2}$		1		$\frac{3+\sqrt{5}}{2}$		$+\infty$
f'		$+$	$0\,\vert$	$+$	0	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
f''		$-$	$\vert$		$-$		$\vert$		$+$		
f	$-\infty$	$\nearrow$	$0\,\vert-\infty$	$\nearrow$	$e^{\frac{2}{3-\sqrt{5}}}(2+\sqrt{5})$	$\searrow$	$-\infty\,\vert+\infty$	$\searrow$	$e^{\frac{2}{3+\sqrt{5}}}(2+\sqrt{5})$	$\nearrow$	$+\infty$

Ora abbiamo tutte le informazioni per tracciare il grafico di f :

$y=x+2$ è asintoto obliquo di f per $x\to-\infty$. Il grafico di f sale da $-\infty$ fino al punto $\big(0\,,0\big)$, dove ha una semiretta tangente orizzontale, restando sempre sotto l'asintoto :

Infatti, per ogni $x\leq -1$, moltiplicando la disuguaglianza

$$e^{\frac{1}{x}}=1+\frac{1}{x}+\frac{1}{2!}\frac{1}{x^2}+\frac{1}{3!}\frac{1}{x^3}+\frac{1}{4!}\frac{1}{x^4}++\frac{1}{5!}\frac{1}{x^5}+\ ...$$

$$= 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2!}\,\frac{1}{x^2}\Big(\underbrace{1 + \frac{1}{3\,x}}_{>0}\Big) + \frac{1}{4!}\,\frac{1}{x^4}\Big(\underbrace{1 + \frac{1}{5\,x}}_{>0}\Big) + \ ...$$

$$> 1 + \frac{1}{x}$$

con $\dfrac{x^2}{x-1} < 0$, si ottiene

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}}\,\frac{x^2}{x-1} < \left(1 + \frac{1}{x}\right)\frac{x^2}{x-1} = x + 2 + \frac{2}{x-1} < x + 2\ .$$

D'altro canto, per $-1 < x < 0$ vale ovviamente

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}}\,\frac{x^2}{x-1} < 0 < x + 2\ .$$

Poi il grafico di f sale da $-\infty$ lungo l'asintoto verticale a destra $x = 0$ fino al punto di massimo locale $\left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\,,\, e^{\frac{2}{3-\sqrt{5}}}\big(2-\sqrt{5}\big)\right)$, dove ha tangente orizzontale, per scendere dopo a $-\infty$ lungo l'asintoto verticale a sinistra $x = 1$.

Finalmente, il grafico scende da $+\infty$ lungo l'asintoto verticale a destra $x = 1$ fino al punto di minimo locale $\left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\,,\, e^{\frac{2}{3+\sqrt{5}}}\big(2+\sqrt{5}\big)\right)$, dove ha tangente orizzontale, per salire successivamente a $+\infty$, avvicinando sempre di più l'asintoto obliquo $y = x + 2$, restando però sopra l'asintoto :

Infatti, per ogni $x > 1$, moltiplicando la disuguaglianza

$$e^{\frac{1}{x}} = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2!}\,\frac{1}{x^2} + \frac{1}{3!}\,\frac{1}{x^3} + \frac{1}{4!}\,\frac{1}{x^4} + + \frac{1}{5!}\,\frac{1}{x^5} + \ ... > 1 + \frac{1}{x}$$

con $\dfrac{x^2}{x-1} > 0$, si ottiene

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}}\,\frac{x^2}{x-1} > \left(1 + \frac{1}{x}\right)\frac{x^2}{x-1} = x + 2 + \frac{2}{x-1} > x + 2\ .$$

Sui tratti $\big(-\infty\,,0\big]$ e $\big(0\,,1\big)$ la funzione è concava, mentre sul tratto $\big(1\,,+\infty\big)$ è convessa.

2) : Per trovare una primitiva della funzione

$$f(x) = \frac{\operatorname{arctg}(\sqrt{x}\,)}{(\sqrt{x}-1)^2}\,\frac{1}{\sqrt{x}}\,,$$

usiamo prima la sostituzione

$$t = \sqrt{x}\,, \qquad \mathrm{d}t = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$$

e poi integrazione per parti, ottenendo

$$\begin{aligned}\int \frac{\operatorname{arctg}(\sqrt{x}\,)}{(\sqrt{x}-1)^2}\,\frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x &= 2\int \frac{\operatorname{arctg} t}{(t-1)^2}\,\mathrm{d}t = 2\int \operatorname{arctg} t\,\mathrm{d}\Big(-\frac{1}{t-1}\Big)\\ &= -\,2\,\frac{\operatorname{arctg} t}{t-1} + \int \frac{2}{(t-1)(1+t^2)}\,\mathrm{d}t\,.\end{aligned}$$

Lo sviluppo di $\dfrac{2}{(t-1)(1+t^2)}$ in fratti semplici è dalla forma

$$\frac{2}{(t-1)(1+t^2)} = \frac{a}{t-1} + \frac{b\,t+c}{1+t^2}$$

ed allora

$$2 = a\,(1+t^2) + (b\,t+c)\,(t-1)\,.$$

Risultano

$$a = 1\,, \quad b = c = -1$$

e di conseguenza

$$\begin{aligned}&\int \frac{\operatorname{arctg}(\sqrt{x}\,)}{(\sqrt{x}-1)^2}\,\frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x\\ &= -2\,\frac{\operatorname{arctg} t}{t-1} + \int \frac{2}{(t-1)(1+t^2)}\,\mathrm{d}t\\ &= -2\,\frac{\operatorname{arctg} t}{t-1} + \int \frac{1}{t-1}\,\mathrm{d}t - \int \frac{t+1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\\ &= -2\,\frac{\operatorname{arctg} t}{t-1} + \ln|t-1| - \frac{1}{2}\int \frac{2\,t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t - \int \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\\ &= -2\,\frac{\operatorname{arctg} t}{t-1} + \ln|t-1| - \frac{1}{2}\ln(1+t^2) - \operatorname{arctg} t + C\end{aligned}$$

$$= 2\,\frac{\operatorname{arctg} t}{1-t} - \operatorname{arctg} t + \frac{1}{2}\ln\frac{(1-t)^2}{1+t^2} + C$$

$$= 2\,\frac{\operatorname{arctg}(\sqrt{x}\,)}{1-\sqrt{x}} - \operatorname{arctg}(\sqrt{x}\,) + \frac{1}{2}\ln\frac{\bigl(1-\sqrt{x}\,\bigr)^2}{1+x} + C\,.$$

$$\int \frac{\operatorname{arctg}(\sqrt{x}\,)}{(\sqrt{x}-1)^2}\,\frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$$

$$= \;-\,2\,\frac{\operatorname{arctg} t}{t-1} + \ln|t-1| - \frac{1}{2}\int\frac{2\,t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t - \int\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

$$= 2\,\frac{\operatorname{arctg}(\sqrt{x}\,)}{1-\sqrt{x}} - \operatorname{arctg}(\sqrt{x}\,) + \frac{1}{2}\ln\frac{\bigl(1-\sqrt{x}\,\bigr)^2}{1+x} + C\,.$$

3) : Poiché

$$t - \sin t > 0\,, \qquad t > 0\,,$$

la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n} - \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right]^n (5\,n^3)^n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left[5\,n^3\left(\frac{1}{n} - \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right]^n\,.$$

è a termini positivi e possiamo quindi tentare di applicare il criterio della radice. A questo fine esaminiamo

$$d_n := 5\,n^3\left(\frac{1}{n} - \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)\,.$$

Abbiamo

$$d_n = 5\,\frac{1}{t^3}\,\bigl(t - \sin t\bigr) \text{ ove } t = \frac{1}{n}\,.$$

Applicando la formula di Taylor con il resto di Peano risulta

$$\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + o\bigl(t^3\bigr) \text{ per } t \to 0$$

e quindi

$$t - \sin t = \frac{t^3}{6} + o\big(t^3\big) \text{ per } t \to 0\,.$$

Di conseguenza

$$5\,\frac{1}{t^3}\big(t - \sin t\big) = \frac{5}{6} + \frac{o\big(t^3\big)}{t^3} \text{ per } t \to 0\,,$$

$$d_n = 5\,n^3\left(\frac{1}{n} - \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{5}{6} + n^3\,o\left(\frac{1}{n^3}\right) \text{ per } n \to \infty\,.$$

Poiché

$$\lim_{n\to\infty} n^3\,o\left(\frac{1}{n^3}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{o\left(\dfrac{1}{n^3}\right)}{\dfrac{1}{n^3}} = 0\,,$$

risulta

$$\lim_{n\to\infty} d_n = \frac{5}{6}\,. \tag{*}$$

Ora possiamo applicare il criterio della radice : per (*) abbiamo

$$\lim_{n\to\infty} \Big(\big(d_n\big)^n\Big)^{1/n} = \lim_{n\to\infty} d_n = \frac{5}{6} < 1$$

e concludiamo che la nostra serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \big(d_n\big)^n$$

è convergente.

4) : Poiché $z - \overline{z} = 2\,i\,\mathrm{Im}\,z$, abbiamo

$$\begin{aligned} 0 \le \big(z - \overline{z}\big)^2 = -4\big(\mathrm{Im}\,z\big)^2 &\Longleftrightarrow \big(\mathrm{Im}\,z\big)^2 \le 0 \\ &\Longleftrightarrow \mathrm{Im}\,z = 0 \\ &\Longleftrightarrow z \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

Cosicché i numeri complessi z soddisfacenti l'inequazione $\big(z - \overline{z}\big)^2 \ge 0$ sono esattamente i numeri reali.