NOME: .... **MATRICOLA:** ....

Corso di Laurea in Matematica, A.A. 2007/2008
Analisi Matematica 2, Esame scritto del 15.09.2008

1) Determinare gli intervalli in cui la funzione $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definita tramite la formula

$$f(x) = \frac{\log x}{x}$$

è uniformamente continua e quelli in cui è lipschitziana.

2) Dire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ la seguente serie converge:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n}\right)^{\alpha}} .$$

3) Determinare una primitiva della funzione

$$f(x) = \frac{1}{1+\sqrt{x^3}} \ .$$

4) Calcolare l'area della regione piana compresa fra gli archi

$$y = \sin x \, , \quad 0 \leq x \leq 2\pi$$

e

$$y = \cos x \, , \quad 0 \leq x \leq 2\pi \, .$$

5) Determinare i valori del parametro reale α per cui il seguente integrale improprio converge :

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{1+e^x} \, \mathrm{d}x \ .$$

Soluzioni:

1) **:** f è derivabile e la sua derivata

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \log x}{x^2} = \frac{1 - \log x}{x^2}$$

è limitata su ogni intervallo della forma $(a, +\infty)$ con $a > 0$, ma non è limitata su nessun intervallo del tipo $(0, b)$. Infatti,

$$\lim_{x \to +\infty} f'(x) \overset{\text{de L'Hospital}}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{-\frac{1}{x}}{2x} = -\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{2x^2} = 0$$

e

$$\lim_{0 < x \to 0} f'(x) = \frac{+\infty}{+0} = +\infty \, .$$

Risulta che f è lipschitziana esattamente sugli intervalli con estremo inferiore > 0.

Riguardante la continuità uniforma, poiché

$$\lim_{0 < x \to 0} f(x) = \frac{+\infty}{+0} = +\infty \, ,$$

f non è uniformamente continua su nessun intervallo del tipo $(0, b)$. Di conseguenza f è uniformamente continua esattamente sugli intervalli sui quali è lipschitziana, cioè su quelli della forma $(a, +\infty)$ con $a > 0$.

2) **:** Volendo usare confronto con serie armoniche generalizzate, cerchiamo un esponente $\beta \in \mathbb{R}$ per quale le successioni

$$\frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n} \, , \ n \geq 1 \qquad \text{e} \qquad \left(\frac{1}{n}\right)^{\beta} = \frac{1}{n^{\beta}} \, , \ n \geq 1$$

siano asintoticamente equivalenti, cioè tale che il limite

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n}}{\left(\frac{1}{n}\right)^{\beta}}$$

esisti e sia diverso sia da 0 che da $+\infty$. Più generalmente, chiediamo che $\beta \in \mathbb{R}$ sia tale che il limite

$$\lim_{0<x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^\beta}$$

esisti e sia diverso da zero e da $+\infty$. La riposta è $\beta = 3$ ed abbiamo due modi (essenzialmente equivalenti) per vederla :

Usando la regola di de L'Hospital. Per $\beta \leq 0$ vale

$$\lim_{0<x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^\beta} = \lim_{0<x\to 0} (x - \sin x)\, x^{|\beta|} = 0$$

perciò β, se esiste, dev'essere > 0.
Supponiamo quindi che $\beta > 0$. Allora

$$\lim_{0<x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^\beta} \overset{\text{de L'Hospital}}{=} \lim_{0<x\to 0} \frac{1 - \cos x}{\beta\, x^{\beta - 1}}$$

se il secondo limite esiste. Per $\beta \leq 1$, cioè $\beta - 1 < 0$, abbiamo di nuovo

$$\lim_{0<x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^\beta} = \frac{1}{\beta} \lim_{0<x\to 0} (1 - \cos x)\, x^{|\beta - 1|} = 0\,,$$

quindi possimo restringersi a $\beta > 1$.
Supponiamo ora che $\beta > 1$. Allora

$$\begin{aligned} &\lim_{0<x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^\beta} \\ &= \frac{1}{\beta} \lim_{0<x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x^{\beta - 1}} \overset{\text{de L'Hospital}}{=} \frac{1}{\beta} \lim_{0<x\to 0} \frac{\sin x}{(\beta - 1)\, x^{\beta - 2}}\,. \end{aligned}$$

Ma conoscendo il limite notevole

$$\lim_{0<x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1\,,$$

diventa chiaro che per $\beta - 2 = 1$, cioè $\beta = 3$, esiste il limite finito nonzero

$$\lim_{0<x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{\beta} \cdot \frac{1}{\beta - 1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}\,.$$

Usando la formula di Taylor con il resto di Peano.
Applichiamo la formula di Taylor con centro in 0 e resto di Peano alla funzione $f(x) = \sin x$:

$$\sin x = \sum_{k=0}^{4} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, x^k + o(x^4) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4) \ \text{ per } \ x \to 0 \, .$$

Risulta che

$$x - \sin x = \frac{x^3}{6} + o(x^4) \ \text{ cioè } \ \frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{6} + \frac{o(x^4)}{x^3} = \frac{1}{6} + o(x)$$

per $x \to 0$ e così

$$\lim_{0<x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{6} \, .$$

Applicando ora il criterio del confronto risulta che la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(\dfrac{1}{n} - \sin \dfrac{1}{n} \right)^{\alpha}}$$

converge esattamente quando converge la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\dfrac{1}{n^{3\alpha}}} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{3\alpha} \, ,$$

cioè per $3\alpha < -1 \iff \alpha < -\dfrac{1}{3}$.

3) **:** Tramite la sostituzione $x = t^2$ $(t \geq 0)$ otteniamo

$$\int \frac{1}{1 + \sqrt{x^3}}\, \mathrm{d}x = \int \frac{2\,t}{1 + t^3}\, \mathrm{d}t \, .$$

Per determinare una primitiva della funzione

$$\frac{2\,t}{1 + t^3}$$

usiamo lo sviluppo di $\dfrac{2\,t}{1 + t^3}$ in fratti semplici :

La decomposizione del polinomio con coefficienti reali $1+t^3$ in fattori irriducili è $1+t^3=(t+1)\,(t^2-t+1)$. Perciò

$$\frac{2t}{1+t^3}=\frac{A}{t+1}+\frac{B\,t+C}{t^2-t+1}\,,$$

cioè

$$2t=A\,(t^2-t+1)+(B\,t+C)\,(t+1)$$

per opportune costanti reali A,B,C . Per $t=-1$ otteniamo

$$-2=3\,A\,,\ \text{ossia } A=-\frac{2}{3}\,.$$

Di conseguenza

$$\begin{aligned}(B\,t+C)\,(t+1) &= 2t+\frac{2}{3}\,(t^2-t+1)=\frac{2}{3}\,(t^2+2\,t+1)\\ &=\frac{2}{3}\,(t+1)^2\end{aligned}$$

e risulta

$$B\,t+C=\frac{2}{3}\,(t+1)\,,\ \text{cioè } B=C=\frac{2}{3}\,.$$

Concludiamo che

$$\frac{2t}{1+t^3}=-\frac{2}{3}\,\frac{1}{t+1}+\frac{2}{3}\,\frac{t+1}{t^2-t+1}\,.$$

Risulta :

$$\int\frac{2t}{1+t^3}\,\mathrm{d}t=-\frac{2}{3}\log\,(t+1)+\frac{2}{3}\int\frac{t+1}{t^2-t+1}\,\mathrm{d}t\,.$$

Per integrare $\dfrac{t+1}{t^2-t+1}$, mettiamo in evidenza nel numeratore la derivata $2t-1$ del denominatore :

$$\frac{t+1}{t^2-t+1}=\frac{1}{2}\,\frac{2t+2}{t^2-t+1}=\frac{1}{2}\,\frac{2t-1}{t^2-t+1}+\frac{3}{2}\,\frac{1}{t^2-t+1}$$

Risulta che

$$\int\frac{t+1}{t^2-t+1}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\log\,(t^2-t+1)+\frac{3}{2}\int\frac{1}{t^2-t+1}\,\mathrm{d}t$$

e quindi

$$\int \frac{2\,t}{1+t^3}\,\mathrm{d}t = -\frac{2}{3}\log(t+1) + \frac{1}{3}\log(t^2-t+1) + \int \frac{1}{t^2-t+1}\,\mathrm{d}t\,.$$

Adesso, per integrare $\dfrac{1}{t^2-t+1}$, scriviamo il denominatore come un moltiplo scalare della somma di 1 con il quadrato di un polinomio di grado 1:

$$t^2-t+1 = \Big(t-\frac{1}{2}\Big)^2 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4}\left(\Big(\frac{2}{\sqrt{3}}\,t - \frac{1}{\sqrt{3}}\Big)^2 + 1\right)$$

Risulta che

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{t^2-t+1}\,\mathrm{d}t &= \frac{4}{3}\int \frac{1}{1+\Big(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\,t-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\Big)^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}}\int \frac{\Big(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\,t-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\Big)'}{1+\Big(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\,t-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\Big)^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2\,t-1}{\sqrt{3}} + C
\end{aligned}$$

e così

$$\begin{aligned}
&\int \frac{1}{1+\sqrt{x^3}}\,\mathrm{d}x \\
=\ &\int \frac{2\,t}{1+t^3}\,\mathrm{d}t \\
=\ &-\frac{2}{3}\log(t+1) + \frac{1}{3}\log(t^2-t+1) + \frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2\,t-1}{\sqrt{3}} + C \\
=\ &-\frac{2}{3}\log(1+\sqrt{x}) + \frac{1}{3}\log(x-\sqrt{x}+1) + \frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{3}} + C\,.
\end{aligned}$$

4) : Tra 0 e $\dfrac{\pi}{4}$ abbiamo $\cos x \geq \sin x$, ma i due grafici non delimitano una regione (senza il segmento verticale $\big\{(0,y)\,;\ 0 \leq y \leq 1\big\}$). Lo stesso discorso vale anche per il tratto tra $\dfrac{5\,\pi}{4}$ e $2\,\pi$.

Nel tratto tra $\dfrac{\pi}{4}$ e $\dfrac{5\,\pi}{4}$ abbiamo $\sin x \geq \cos x$ ed i due grafici delimitano una regione di cui l'area è

$$\begin{aligned}\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\,\pi}{4}} \big(\sin x - \cos x\big)\,\mathrm{d}x &= \big(-\,\cos x - \sin x\big)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\,\pi}{4}} \\ &= -\,\cos\frac{5\,\pi}{4} - \sin\frac{5\,\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}\,.\end{aligned}$$

5) : L'integrale

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha}}{1+e^{x}}\,\mathrm{d}x$$

può essere improprio (dipendente dal valore di α) sia in 0 che a $+\infty$. Esaminiamo separatamente la sua convergenza in 0 ed all'infinito.

Poiché

$$\lim_{0<x\to 0} \frac{\dfrac{x^{\alpha}}{1+e^{x}}}{x^{\alpha}} = \frac{1}{2}\,,$$

per il criterio del confronto

$$\int\limits_0^1 \frac{x^{\alpha}}{1+e^{x}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}x \;\text{ converge } \iff \int\limits_0^1 x^{\alpha}\,\mathrm{d}x \;\text{ converge } \iff \alpha > -1\,.$$

D'altro canto, poiché abbiamo

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{x^{\alpha}}{1+e^{x}}}{\dfrac{1}{e^{x/2}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\alpha}e^{x/2}}{1+e^{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\alpha}}{e^{x/2}} \cdot \frac{1}{\dfrac{1}{e^{x}}+1} = 0$$

per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, per il criterio del confronto la convergenza dell'integrale

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{e^{x/2}}\,\mathrm{d}x \;\Big(= 2\,e^{1/2}\Big)$$

implica la convergenza di

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^\alpha}{1+e^x}\,\mathrm{d}x$$

per tutti i valori $\alpha \in \mathbb{R}$.

Cosicché possiamo concludere che

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{1+e^x}\,\mathrm{d}x \ \text{ converge } \iff \ \alpha > -1\,.$$