NOME: . . . . **MATRICOLA:** . . . .

Corso di Laurea in Matematica, A.A. 2007/2008
Analisi Matematica 2, Esame scritto del 15.09.2008

1) Determinare gli intervalli in cui la funzione $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definita tramite la formula

$$f(x) = x \log x$$

è uniformemente continua e quelli in cui è lipschitziana.

2) Dire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ la seguente serie converge:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(\operatorname{tg}\frac{1}{n} - \frac{1}{n}\right)^{\alpha}} .$$

3) Determinare una primitiva della funzione

$$f(x) = \frac{1}{1 - \sqrt{x^3}};.$$

4) Calcolare l'area della regione piana compresa fra l'arco

$$y = \sin x\,, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

e la semiretta

$$y = \frac{2}{\pi} x\,, \quad x \geq 0\,.$$

5) Determinare i valori del parametro reale α per cui il seguente integrale improprio converge :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{\alpha x}}{x} \, \mathrm{d}x\,.$$

Soluzioni:

1) **:** f è derivabile e la sua derivata

$$f'(x) = 1 + \log x$$

è limitata su ogni intervallo della forma $[a, b]$ con $0 < a \leq b < +\infty$, ma non è limitata su nessun intervallo del tipo $(0, b)$ o $(a, +\infty)$. Infatti,

$$\lim_{0<x\to 0} f'(x) = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to +\infty} f'(x) = +\infty \ .$$

Risulta che f è lipschitziana esattamente sugli intervalli con estremo inferiore > 0 ed estremo superiore finita.

Riguardante la continuità uniforma, rimarchiamo che esiste il limite finito

$$\lim_{0<x\to 0} f(x) = \lim_{0<x\to 0} \frac{\log x}{\dfrac{1}{x}} \overset{\text{de L'Hospital}}{=} \lim_{0<x\to 0} \frac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{x^2}} = 0 \ ,$$

perciò f è uniformamente continua su ogni intervallo della forma $(0, b)$ con $b < +\infty$. D'altro canto f non è uniformamente continua su nessun intervallo del tipo $(a, +\infty)$. Infatti, per ogni $x\,, \delta > 0$ abbiamo

$$\begin{aligned}
&f(x + \delta) - f(x) \\
&= (x + \delta)\log(x + \delta) - x \log x \\
&= (x + \delta)\log(x + \delta) - x \log(x + \delta) + x \log(x + \delta) - x \log x \\
&= \delta \log(x + \delta) + x \log \frac{x + \delta}{x} \\
&\geq \delta \log x
\end{aligned}$$

e risulta che, per ogni $\delta > 0$, se $x > e^{\delta^{-1}}$ allora, pur avendo

$$\bigl|(x + \delta) - x\bigr| = \delta \,,$$

la distanza

$$\bigl|f(x + \delta) - f(x)\bigr| \geq f(x + \delta) - f(x) \geq \delta \log x > \delta \cdot \delta^{-1} = 1$$

non scende mai sotto 1 . Di conseguenza f è uniformamente continua esattamente sugli intervalli con estremo superiore finita.

2) **:** Volendo usare confronto con serie armoniche generalizzate, cerchiamo un esponente $\beta \in \mathbb{R}$ per quale le successioni

$$\operatorname{tg}\frac{1}{n} - \frac{1}{n}\,,\ n \geq 1 \qquad \text{e} \qquad \Big(\frac{1}{n}\Big)^{\beta} = \frac{1}{n^{\beta}}\,,\ n \geq 1$$

siano asintoticamente equivalenti, cioè tale che il limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{tg}\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n}}{\Big(\dfrac{1}{n}\Big)^{\beta}}$$

esisti e sia diverso sia da 0 che da $+\infty$. Più generalmente, chiediamo che $\beta \in \mathbb{R}$ sia tale che il limite

$$\lim_{0<x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x^{\beta}}$$

esisti e sia diverso da zero e da $+\infty$. La riposta è $\beta = 3$ ed abbiamo due modi (essenzialmente equivalenti) per vederla :

Usando la regola di de L'Hospital. Per $\beta \leq 0$ vale

$$\lim_{0<x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x^{\beta}} = \lim_{0<x\to 0} (\operatorname{tg} x - x)\, x^{|\beta|} = 0$$

perciò β , se esiste, dev'essere > 0 .

<u>Supponiamo quindi che</u> $\beta > 0$. Allora

$$\lim_{0<x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x^{\beta}} \overset{\text{de L'Hospital}}{=} \lim_{0<x\to 0} \frac{\dfrac{1}{\cos^2 x} - 1}{\beta\, x^{\beta-1}}$$

se il secondo limite esiste. Ma

$$\frac{1}{\cos^2 x} - 1 = \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$$

implica che

$$\frac{\dfrac{1}{\cos^2 x} - 1}{\beta\, x^{\beta-1}} = \frac{1}{\beta \cos^2 x} \cdot \Big(\frac{\sin x}{x}\Big)^2 \cdot \frac{1}{x^{\beta-3}}$$

e così

$$\lim_{0<x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x^\beta} = \lim_{0<x\to 0} \frac{\dfrac{1}{\cos^2 x} - 1}{\beta\, x^{\beta-1}} = \frac{1}{\beta} \lim_{0<x\to 0} \frac{1}{x^{\beta-3}}$$

è finito e nonzero se e soltanto se $\beta = 3$ ed in questo caso

$$\lim_{0<x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x^3} = \frac{1}{3}\,.$$

Usando la formula di Taylor con il resto di Peano.

Per poter applicare la formula di Taylor alla funzione $f(x) = \operatorname{tg} x$ in modo efficiente, dobbiamo calcolare un certo numero di derivate successive di f :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{\cos^2 x}\,,\\
f''(x) &= -\,2\,\frac{-\sin x}{\cos^3 x} = 2\,\frac{1}{\cos^2 x}\operatorname{tg} x = 2\,f'(x)\,f(x)\,,\\
f'''(x) &= 2\,f''(x)\,f(x) + 2\,f'(x)^2 = 4\,f'(x)\,f(x)^2 + 2\,f'(x)^2\\
f^{(4)}(x) &= 4\,f''(x)\,f(x)^2 + 8\,f'(x)^2\,f(x) + 4\,f'(x)\,f''(x)\\
&= 8\,f'(x)\,f(x)^3 + 8\,f'(x)^2\,f(x) + 8\,f'(x)^2\,f(x)\\
&= 8\,f'(x)\,f(x)^3 + 16\,f'(x)^2\,f(x)\,.
\end{aligned}$$

Risultano :

$$f(0) = 0\,,\ f'(0) = 1\,,\ f''(0) = 0\,,\ f'''(0) = 2\,,\ f^{(4)}(0) = 0\,.$$

Applichiamo ora a $f(x) = \operatorname{tg} x$ la formula di Taylor con centro in 0 e resto di Peano :

$$\operatorname{tg} x = \sum_{k=0}^{4} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\,x^k + o(x^4) = x + \frac{x^3}{3} + o(x^4) \ \text{ per } \ x \to 0\,.$$

Risulta che

$$\operatorname{tg} x - x = \frac{x^3}{3} + o(x^4) \ \text{ cioè } \ \frac{\operatorname{tg} x - x}{x^3} = \frac{1}{3} + \frac{o(x^4)}{x^3} = \frac{1}{3} + o(x)$$

per $x \to 0$ e così

$$\lim_{0<x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x^3} = \frac{1}{3}\,.$$

Applicando ora il criterio del confronto risulta che la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(\operatorname{tg}\frac{1}{n} - \frac{1}{n}\right)^{\alpha}}$$

converge esattamente quando converge la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\frac{1}{n^{3\alpha}}} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{3\alpha},$$

cioè per $3\alpha < -1 \iff \alpha < -\dfrac{1}{3}$.

3) : Tramite la sostituzione $x = t^2$ $(t \geq 0)$ otteniamo

$$\int \frac{1}{1-\sqrt{x^3}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2t}{1-t^3}\,\mathrm{d}t.$$

Per determinare una primitiva della funzione

$$\frac{2t}{1-t^3}$$

usiamo lo sviluppo di $\dfrac{2t}{1-t^3}$ in fratti semplici :

La decomposizione del polinomio con coefficienti reali $1-t^3$ in fattori irriducili è $1-t^3 = (1-t)(t^2+t+1)$. Perciò

$$\frac{2t}{1-t^3} = \frac{A}{1-t} + \frac{Bt+C}{t^2+t+1},$$

cioè

$$2t = A(t^2+t+1) + (Bt+C)(1-t)$$

per opportune costanti reali A, B, C. Per $t = 1$ otteniamo

$$2 = 3A, \text{ ossia } A = \frac{2}{3}.$$

Di conseguenza

$$\begin{aligned}(Bt+C)(1-t) &= 2t - \frac{2}{3}(t^2+t+1) = \frac{2}{3}(-t^2+2t-1)\\ &= -\frac{2}{3}(1-t)^2 = \frac{2}{3}(1-t)(t-1)\end{aligned}$$

e risulta

$$B\,t + C = \frac{2}{3}(t-1)\,,\ \text{cioè}\ B = \frac{2}{3}\ \text{ e }\ C = -\frac{2}{3}\,.$$

Concludiamo che

$$\frac{2\,t}{1-t^3} = \frac{2}{3}\,\frac{1}{1-t} + \frac{2}{3}\,\frac{t-1}{t^2+t+1}\,.$$

Risulta :

$$\int \frac{2\,t}{1-t^3}\,\mathrm{d}t = -\frac{2}{3}\log|1-t| + \frac{2}{3}\int \frac{t-1}{t^2+t+1}\,\mathrm{d}t\,.$$

Per integrare $\dfrac{t-1}{t^2+t+1}$, mettiamo in evidenza nel numeratore la derivata $2\,t+1$ del denominatore :

$$\frac{t-1}{t^2+t+1} = \frac{1}{2}\,\frac{2\,t-2}{t^2+t+1} = \frac{1}{2}\,\frac{2\,t+1}{t^2+t+1} - \frac{3}{2}\,\frac{1}{t^2+t+1}$$

Risulta che

$$\int \frac{t-1}{t^2+t+1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\log(t^2+t+1) - \frac{3}{2}\int \frac{1}{t^2+t+1}\,\mathrm{d}t$$

e quindi

$$\int \frac{2\,t}{1+t^3}\,\mathrm{d}t = -\frac{2}{3}\log|1-t| + \frac{1}{3}\log(t^2+t+1) - \int \frac{1}{t^2+t+1}\,\mathrm{d}t\,.$$

Adesso, per integrare $\dfrac{1}{t^2+t+1}$, scriviamo il denominatore come un moltiplo scalare della somma di 1 con il quadrato di un polinomio di grado 1 :

$$t^2+t+1 = \left(t+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4}\left(\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\,t + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1\right)$$

Risulta che

$$\int \frac{1}{t^2+t+1}\,\mathrm{d}t = \frac{4}{3}\int \frac{1}{1+\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\,t+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\int \frac{\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\,t+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)'}{1+\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\,t+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2\,t+1}{\sqrt{3}} + C$$

e così

$$\int \frac{1}{1-\sqrt{x^3}}\,\mathrm{d}x$$

$$= \int \frac{2\,t}{1-t^3}\,\mathrm{d}t$$

$$= -\frac{2}{3}\log|1-t| + \frac{1}{3}\log(t^2+t+1) - \frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2\,t+1}{\sqrt{3}} + C$$

$$= -\frac{2}{3}\log\left|1-\sqrt{x}\right| + \frac{1}{3}\log(x+\sqrt{x}+1) - \frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{3}} + C\,.$$

4) **:** Anzitutto mostriamo che l'arco $y=\sin x\,,\, 0\leq x\leq \dfrac{\pi}{2}$ si trova sopra del segmento $y=\dfrac{2}{\pi}\,x\,,\, 0\leq x\leq\dfrac{\pi}{2}$:

$$\sin x \geq \frac{2}{\pi}\,x\,, \qquad 0\leq x\leq \frac{\pi}{2}\,,$$

Sia $f(x)=\sin x-\dfrac{2}{\pi}\,x$. La derivata $f'(x)=\cos x-\dfrac{2}{\pi}$ è strettamente decrescente in $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ ed abbiamo

$$f'(0)=1-\frac{2}{\pi}>0\,,\quad f'\Bigl(\frac{\pi}{2}\Bigr)=-\frac{2}{\pi}<0\,,$$

perciò f' si annulla esattamente una volta tra 0 e $\dfrac{\pi}{2}$ (in $\arccos\dfrac{2}{\pi}$), ha il segno $+$ a sinistra di questo zero ed il segno $-$ a destra.

Risulta

x	0		$\arccos(2/\pi)$		$\pi/2$
f'	$1-2/\pi$	$+$	0	-	$-2/\pi$
f	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

ed in particolare la diseguaglianza $f(x) \geq 0\,,\ 0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}\,.$

Così l'area tra l'arco $y = \sin x\,, 0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}$ ed il segmento $y = \dfrac{2}{\pi}\,x\,, 0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}$ è la differenza

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \,\mathrm{d}x - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{\pi}\,x\,\mathrm{d}x = -\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{x^2}{\pi}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 - \frac{\pi}{4}\ .$$

5) : L'integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-e^{\alpha x}}{x}\,\mathrm{d}x$$

può essere improprio (dipendente dal valore di α) sia in 0 che a $+\infty$. Esaminiamo separatamente la sua convergenza in 0 ed all'infinito.

Per $\alpha \neq 0$ esiste il limite finito nonzero

$$\lim_{0<x\to 0} \frac{\dfrac{1-e^{\alpha x}}{x}}{\alpha} = \lim_{0<x\to 0} \frac{1-e^{\alpha x}}{\alpha\, x} \overset{\text{de L'Hospital}}{=} \lim_{0<x\to 0} \frac{-\,\alpha\, e^{\alpha x}}{\alpha} = -\,1$$

e per il criterio del confronto abbiamo

$$\int_0^1 \frac{1-e^{\alpha x}}{x}\,\mathrm{d}x \ \text{ converge } \iff \int_0^1 \alpha\,\mathrm{d}x \ \text{ converge }\ .$$

Di conseguenza l'integrale

$$\int_0^1 \frac{1-e^{\alpha x}}{x}\,\mathrm{d}x$$

converge per ogni $0 \neq \alpha \in \mathbb{R}$. Poiché per $\alpha = 0$ la sua convergenza è ovvia, concludiamo che l'integrale di cui sopra converge per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.

Esaminiamo ora la convergenza di

$$\int_1^{+\infty} \frac{1 - e^{\alpha x}}{x} \, \mathrm{d}x \, .$$

Per $\alpha < 0$, poiché

$$1 - e^{\alpha x} \geq \frac{1}{2} \iff e^{\alpha x} \leq \frac{1}{2} \iff x \geq -\frac{\log 2}{\alpha} \ \big(> 0 \big) \, ,$$

abbiamo

$$\frac{1 - e^{\alpha x}}{x} \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} \, , \qquad x \geq -\frac{\log 2}{\alpha}$$

e per il criterio del confronto risulta la divergenza di

$$\int_1^{+\infty} \frac{1 - e^{\alpha x}}{x} \, \mathrm{d}x \ \big(= +\infty \big) \, .$$

D'altro canto, per $\alpha > 0$ abbiamo

$$e^{\alpha x} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha^2 x^2}{2!} + \frac{\alpha^3 x^3}{3!} + \ldots \geq 1 + \alpha x \, , \qquad x \geq 0 \, ,$$

cioè

$$\frac{1 - e^{\alpha x}}{x} \leq -\alpha \, , \qquad x \geq 0 \, ,$$

e per il criterio del confronto risulta anche in questo caso la divergenza di

$$\int_1^{+\infty} \frac{1 - e^{\alpha x}}{x} \, \mathrm{d}x \ \big(= -\infty \big) \, .$$

Per $\alpha = 0$ invece la convergenza di

$$\int_1^{+\infty} \frac{1 - e^{\alpha x}}{x} \, \mathrm{d}x \, .$$

è ovvia.

Concludiamo che

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{\alpha x}}{x}\, \mathrm{d}x \ \text{ converge } \iff \alpha = 0\,.$$