NOME: .... **MATRICOLA: ....**

Corso di Laurea in Fisica, A.A. 2013/2014
Calcolo 2, Esame scritto del 15.09.2014

1) Si trovi la soluzione generale dell'equazione differenziale

$$y''' + y'' - 2\,y' = e^x + \sin(2\,x)\,. \qquad (*)$$

b) Si trovino tutte le soluzioni dell'equazione (*) che sono limitate sull'intervallo $\big(0\,,+\infty\big)$.

2) Calcolare l'area della superficie descritta dall'equazione

$$z^2 = 2\,x\,y$$

e dalle disuguaglianze

$$0 \leq x \leq 1\,,\ 0 \leq y \leq 2\,,\ z \geq 0\,.$$

3) Si calcoli l'integrale di volume improprio

$$\int\limits_{x^2+y^2+z^2\leq 4} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-1)^2}}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z\,.$$

(il potenziale in $(0\,,0\,,1)$ della forza di attrazione newtoniana estesa alla palla di centro $(0\,,0\,,0)$ e raggio $2\,$.)

Suggerimento: È conveniente usare le coordinate sferiche con centro in $(0\,,0\,,1)$, cioè il cambio di variabili

$$\begin{cases} x = \rho \sin\theta \cos\varphi\,, \\ y = \rho \sin\theta \sin\varphi\,, \\ z = 1 + \rho\cos\theta\,. \end{cases}$$

4) Consideriamo la funzione periodica di periodo $2\,\pi$

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

data tramite la formula

$$f(x) = (\sin x)^4\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

Si calcolino i coefficienti di Fourier reali $a_k(f)$, $k \geq 0$, e $b_k(f)$, $k \geq 1$, di f e si studi la convergenza puntuale della serie di Fourier

$$\frac{a_o(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \Big(a_k(f) \cos(kx) + b_k(f) \sin(kx) \Big)\,.$$

Soluzioni:

1) **:** a) Abbiano da risolvere una equazione differenziale lineare a coefficienti costanti. Risolviamo prima l'equazione omogenea :

Il polinomio caratteristico $\lambda^3 + \lambda^2 - 2\,\lambda = \lambda\,(\lambda^2 + \lambda - 2)$ ha tre zeri semplici:

$$\lambda_1 = 0\,, \quad \lambda_{2,3} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 + 4 \cdot 2}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \begin{array}{l} \nearrow\ 1 \\ \searrow\ -2 \end{array} .$$

Risulta che

$$1\,(= e^{0x})\,, \quad e^x\,, \quad e^{-2x}$$

sono tre soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione omogenea

$$y''' + y'' - 2\,y' = 0\,,$$

di cui la soluzione generale è

$$y(x) = c_1 + c_2\,e^x + c_3\,e^{-2x}\,, \qquad c_1\,, c_2\,, c_3 \text{ costanti.}$$

Per trovare una soluzione particolare dell'equazione non omogenea (*), il modo più semplice è di prendere la somma di una soluzione particolare dell'equazione

$$y''' + y'' - 2\,y' = e^x \tag{1}$$

e di una soluzione particolare dell'equazione

$$y''' + y'' - 2\,y' = \sin(2x)\,. \tag{2}$$

Riguardante l'equazione (1), la non-omogeneità e^x è (multiplo costante di) una esponenziale avendo il coefficiente 1 di x nell'esponente uguale ad un zero semplice del polinomio caratteristico. Di conseguenza esiste una soluzione particolare dell'equazione (1) della forma cxe^x con c una costante. Per la sostituzione di $y(x) = cxe^x$ in (1) si ottiene

$$(3\,ce^x + cxe^x) + (2\,ce^x + cxe^x) - 2\,(ce^x + cxe^x) = e^x$$

e risulta $c = \dfrac{1}{3}$. Cosicché $\dfrac{1}{3}\,xe^x$ è una soluzione particolare di (1).

Ora, riguardante l'equazione (2), la non-omogeneità $\sin(2x)$ è la parte immaginaria di e^{2ix} con il coefficiente $2i$ di x nell'esponente diverso dai zeri del polinomio caratteristico. Per conseguenza l'equazione (2) ha una soluzione particolare della forma $a\cos(2x)+b\sin(2x)$ dove $a\,,b$ sono costanti :

L'equazione $y'''+y''-2y'=e^{2ix}$ ha una soluzione particolare della forma

$$k_1 e^{2ix}\,,\quad k_1 \text{ costante,}$$

mentre anche l'equazione $y'''+y''-2y'=e^{-2ix}$ ha una soluzione particolare della forma

$$k_2 e^{-2ix}\,,\quad k_2 \text{ costante.}$$

Allora

$$\underbrace{\frac{k_1-k_2}{2i}}_{=a}\cos(2x)+\underbrace{\frac{k_1+k_2}{2}}_{=b}\sin(2x)=\frac{1}{2i}\big(k_1 e^{2ix}-k_2 e^{-2ix}\big)$$

sarà una soluzione dell'equazione

$$y'''+y''-2y'=\frac{1}{2i}\big(e^{2ix}-e^{-2ix}\big)=\sin(2x)\,,$$

cioè di (2).

Per la sostituzione di $y(x)=a\cos(2x)+b\sin(2x)$ in (2) otteniamo

$$\begin{aligned}&\big(8a\sin(2x)-8b\cos(2x)\big)\\ &+\big(-4a\cos(2x)-4b\sin(2x)\big)\\ &-2\big(-2a\sin(2x)+2b\cos(2x)\big)=\sin(2x)\,,\end{aligned}$$

cioè

$$\big(12a-4b\big)\sin(2x)-\big(4a+12b\big)\cos(2x)=\sin(2x)\,.$$

Risulta

$$\begin{cases}12a-\ \ 4b=1\\ \ \ 4a+12b=0\end{cases},$$

quindi

$$a=\frac{3}{40}\,,\quad b=-\frac{1}{40}$$

Cosicché $\dfrac{3}{40}\cos(2x)-\dfrac{1}{40}\sin(2x)$ è una soluzione particolare di (2).

Avendo ora alla disposizione una soluzione particolare sia di (1) che di (2), concludiamo che $\dfrac{1}{3}\, x e^x + \dfrac{3}{40} \cos(2x) - \dfrac{1}{40} \sin(2x)$ è una soluzione particolare dell'equazione (*), di cui la soluzione generale è quindi

$$y(x) = c_1 + c_2\, e^x + c_3\, e^{-2\,x} + \frac{1}{3}\, x e^x + \frac{3}{40} \cos(2x) - \frac{1}{40} \sin(2x)\,,$$

dove $c_1\,, c_2\,, c_3$ sono costanti arbitrari.

Osservazione.

Possiamo trovare una soluzione particolare dell'equazione differenziale non omogenea (*) anche usando il metodo della variazione delle costanti. Con questo metodo risolveremo in seguito addirittura l'equazione più generale

$$y''' + y'' - 2\, y' = g(x) \tag{**}$$

dove $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ è una funzione continua qualsiasi.

Poiché la soluzione generale dell'equazione omogenea è

$$c_1 + c_2\, e^x + c_3\, e^{-2\,x}\,, \qquad c_1\,, c_2\,, c_3 \text{ costanti,}$$

cercheremo una soluzione particolare di (**) sotto la forma

$$y(x) = c_1(x) + c_2(x)\, e^x + c_3(x)\, e^{-2\,x}\,.$$

Per avere

$$y'(x) = c_2(x)\, e^x - 2\, c_3(x)\, e^{-2\,x}$$

dobbiamo richiedere

$$c_1'(x) + c_2'(x)\, e^x + c_3'(x)\, e^{-2\,x} = 0\,, \tag{3}$$

e per avere poi

$$y''(x) = c_2(x)\, e^x + 4\, c_3(x)\, e^{-2\,x}$$

dobbiamo richiedere anche

$$c_2'(x)\, e^x - 2\, c_3'(x)\, e^{-2\,x} = 0\,. \tag{4}$$

Risulta

$$y'''(x) = c_2'(x)\, e^x + 4\, c_3'(x)\, e^{-2\,x} + c_2(x)\, e^x - 8\, c_3(x)\, e^{-2\,x}$$

e tramite sostituzione in l'equazione (**) si ottiene

$$\begin{aligned}
&\big(c_2'(x)\,e^x + 4\,c_3'(x)\,e^{-2x} + c_2(x)\,e^x - 8\,c_3(x)\,e^{-2x}\big)\\
&+ \big(c_2(x)\,e^x + 4\,c_3(x)\,e^{-2x}\big)\\
&- 2\,\big(c_2(x)\,e^x - 2\,c_3(x)\,e^{-2x}\big) = g(x)\,,
\end{aligned}$$

cioè, svolgendo le operazioni alla parte sinistra,

$$c_2'(x)\,e^x + 4\,c_3'(x)\,e^{-2x} = g(x)\,. \tag{5}$$

Per trovare $c_1'\,, c_2'\,, c_3'$ dobbiamo quindi risolvere il sistema di equazioni lineari costituito da (3), (4), (5) :

$$\left\{\begin{aligned}
c_1'(x) + c_2'(x)\,e^x + \quad c_3'(x)\,e^{-2x} &= 0\\
c_2'(x)\,e^x - 2\,c_3'(x)\,e^{-2x} &= 0\\
c_2'(x)\,e^x + 4\,c_3'(x)\,e^{-2x} &= g(x)
\end{aligned}\right. \quad . \tag{6}$$

Dalla seconda equazione (cioè (4)) otteniamo

$$c_2'(x) = 2\,c_3'(x)\,e^{-3x}$$

e tramite questa sostituzione il sistema (6) si riduce a

$$\left\{\begin{aligned}
c_1'(x) + 3\,c_3'(x)\,e^{-2x} &= 0\\
6\,c_3'(x)\,e^{-2x} &= g(x)
\end{aligned}\right. \quad .$$

Risultano

$$c_3'(x) = \frac{1}{6}\,g(x)\,e^{2x}\,, \quad c_2'(x) = \frac{1}{3}\,g(x)\,e^{-x}\,, \quad c_1'(x) = -\,\frac{1}{2}\,g(x)$$

e troviamo la soluzione particolare dell'equazione (**)

$$y(x) = -\,\frac{1}{2}\int g(x)\,\mathrm{d}x + \frac{e^x}{3}\int g(x)\,e^{-x}\mathrm{d}x + \frac{e^{-2x}}{6}\int g(x)\,e^{2x}\mathrm{d}x\,.$$

Nel caso dell'equazione (*), con $g(x) = e^x + \sin(2\,x)$, abbiamo

$$\begin{aligned}
\int g(x)\,\mathrm{d}x &= e^x - \frac{\cos(2x)}{2}\,,\\
\int g(x)\,e^{-x}\mathrm{d}x &= x - \frac{e^{-x}}{5}\Big(\sin(2x) + 2\cos(2x)\Big)\,,\\
\int g(x)\,e^{2x}\mathrm{d}x &= \frac{e^{3x}}{3} + \frac{e^{2x}}{4}\Big(\sin(2x) - \cos(2x)\Big) \ :
\end{aligned}$$

La prima uguaglianza è immediata.

Per la seconda uguaglianza usiamo che, integrando per parti due volte, si ottiene

$$\begin{aligned}
&\int e^{-x}\sin(2x)\,\mathrm{d}x \\
&= -\, e^{-x}\sin(2x) + 2\int e^{-x}\cos(2x)\,\mathrm{d}x \\
&= -\, e^{-x}\sin(2x) - 2\,e^{-x}\cos(2x) - 4\int e^{-x}\sin(2x)\,\mathrm{d}x\,,
\end{aligned}$$

quindi

$$\int e^{-x}\sin(2x)\,\mathrm{d}x = -\,\frac{e^{-x}}{5}\Big(\sin(2x) + 2\cos(2x)\Big)\,,$$

Finalmente, per la terza uguaglianza usiamo

$$\int e^{2x}\sin(2x)\,\mathrm{d}x = \frac{e^{2x}}{4}\Big(\sin(2x) - \cos(2x)\Big)$$

che si ottiene pure tramite due integrazioni per parti :

$$\begin{aligned}
&\int e^{2x}\sin(2x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\,e^{2x}\sin(2x) - \int e^{2x}\cos(2x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\,e^{2x}\sin(2x) - \frac{1}{2}\,e^{2x}\cos(2x) - \int e^{2x}\sin(2x)\,\mathrm{d}x\,.
\end{aligned}$$

Perciò si ottiene la seguente soluzione particolare di (*) :

$$\begin{aligned}
y(x) = &-\frac{1}{2}\left(e^{x} - \frac{\cos(2x)}{2}\right) \\
&+ \frac{e^{x}}{3}\left(x - \frac{e^{-x}}{5}\Big(\sin(2x) + 2\cos(2x)\Big)\right) \\
&+ \frac{e^{-2x}}{6}\left(\frac{e^{3x}}{3} + \frac{e^{2x}}{4}\Big(\sin(2x) - \cos(2x)\Big)\right) \\
= &-\frac{e^{x}}{2} + \frac{\cos(2x)}{4}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{x\,e^x}{3}-\frac{1}{15}\Big(\sin(2x)+2\cos(2x)\Big)\\
&+\frac{e^x}{18}+\frac{1}{24}\Big(\sin(2x)-\cos(2x)\Big)\\
=&-\frac{4\,e^x}{9}+\frac{x\,e^x}{3}+\frac{3}{40}\cos(2x)-\frac{1}{40}\sin(2x)\,.
\end{aligned}
$$

Siccome $-\dfrac{4\,e^x}{9}$ è una soluzione dell'equazione omogenea, sottraendola dalla soluzione particolare di (*) di cui sopra, riotteniamo la soluzione particolare $\dfrac{x\,e^x}{3}+\dfrac{3}{40}\cos(2x)-\dfrac{1}{40}\sin(2x)\,.$

b) Poiché la soluzione generale dell'equazione differenziale (*) è

$$y(x)=c_1+c_2\,e^x+c_3\,e^{-2x}+\frac{1}{3}\,xe^x+\frac{3}{40}\cos(2x)-\frac{1}{40}\sin(2x)$$

e la funzione

$$c_1+c_3\,e^{-2x}+\frac{3}{40}\cos(2x)-\frac{1}{40}\sin(2x)$$

è limitata sull'intervallo $\big(\,0\,,+\infty\big)$, la soluzione $y(x)$ è limitata su $\big(\,0\,,+\infty\big)$ se e soltanto se la funzione

$$c_2\,e^x+\frac{1}{3}\,xe^x$$

è limitata su $\big(\,0\,,+\infty\big)$. Ma questo non accade mai, perché per qualsiasi costante c_2 abbiamo

$$\lim_{x\to+\infty}\Big(c_2\,e^x+\frac{1}{3}\,xe^x\Big)=\lim_{x\to+\infty}\Big(c_2+\frac{1}{3}\,x\Big)e^x=+\infty\,.$$

Pertanto l'equazione (*) non ha nessuna soluzione $y(x)$ che sia limitata sull'intervallo $\big(\,0\,,+\infty\big)$.

2) **:** È richiesta l'area A del grafico della funzione

$$g(x\,,y):=\sqrt{2\,x\,y}$$

definita sul rettangolo $R:=[\,0\,,1]\times[\,0\,,2]$. Per calcolarla, useremo la formula nota

$$A=\iint\limits_R\sqrt{1+\Big(\frac{\partial g}{\partial x}(x\,,y)\Big)^2+\Big(\frac{\partial g}{\partial y}(x\,,y)\Big)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,. \tag{7}$$

Ricordo la deduzione della formula (7).

Possiamo parametrizzare il grafico S di g usando le variabili come parametri :

$$\varphi(x\,,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ g(x\,,y) \end{pmatrix}\,, \qquad (x\,,y) \in R\,.$$

Poiché

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dfrac{\partial g}{\partial x} \end{pmatrix}\,, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dfrac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}$$

e quindi

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \times \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & 0 & \dfrac{\partial g}{\partial x} \\ 0 & 1 & \dfrac{\partial g}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{\partial g}{\partial x} \\ -\dfrac{\partial g}{\partial y} \\ 1 \end{pmatrix}\,,$$

l'elemento d'area è

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\sigma &= \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x} \times \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right\| \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}(x\,,y)\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}(x\,,y)\right)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,. \end{aligned}$$

Segue per l'area del grafico di g la formula

$$\int_S \mathrm{d}\sigma = \iint_R \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}(x\,,y)\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}(x\,,y)\right)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

Ora, poiché

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{y}{x}}\,, \quad \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{x}{y}}\,,$$

usando la formula (7) ed il teorema di riduzione otteniamo

$$
\begin{aligned}
A &= \iint\limits_{[0,1]\times[0,2]} \sqrt{1+\frac{y}{2x}+\frac{x}{2y}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_{[0,1]\times[0,2]} \sqrt{\frac{2xy+y^2+x^2}{2xy}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \iint\limits_{[0,1]\times[0,2]} \frac{x+y}{\sqrt{2xy}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{1}{\sqrt{2}} \iint\limits_{[0,1]\times[0,2]} \left(\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 \left(\sqrt{x}\left(2\sqrt{y}\,\Big|_{y=0}^{y=2}\right) + \frac{1}{\sqrt{x}}\left(\frac{2}{3}\,y^{3/2}\,\Big|_{y=0}^{y=2}\right)\right)\mathrm{d}x \\
&= 2\int_0^1 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x + \frac{4}{3}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 2\left(\frac{2}{3}\,x^{3/2}\,\Big|_{x=0}^{x=1}\right) + \frac{4}{3}\left(2\sqrt{x}\,\Big|_{x=0}^{x=1}\right) \\
&= \frac{4}{3}+\frac{8}{3} = 12\,.
\end{aligned}
$$

3) : Per calcolare l'integrale di volume

$$
I := \iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le 4} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-1)^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z
$$

useremo il cambiamento di variabili

$$
\begin{cases} x = \rho\sin\theta\cos\varphi \\ y = \rho\sin\theta\sin\varphi \\ z = 1+\rho\cos\theta \end{cases} , \quad \rho\ge 0\,,\ 0\le\theta\le\pi\,,\ 0\le\varphi\le 2\pi\,.
$$

Il nuovo dominio di integrazione sarà l'insieme di tutti i punti $(\rho\,,\theta\,,\varphi)$ in $[0\,,+\infty)\times[0\,,\pi]\times[0\,,2\pi]$ per quali vale

$$
(\rho\sin\theta\cos\varphi)^2+(\rho\sin\theta\sin\varphi)^2+(1+\rho\cos\theta)^2\le 4\,,
$$

cioè

$$
\rho^2+2\,\rho\cos\theta-3\le 0\,.
$$

Poiché i radici di $\rho^2+2\,\rho\cos\theta-3=0$ sono $\rho_\pm = -\cos\theta\pm\sqrt{3+(\cos\theta)^2}$, abbiamo

$$
\begin{aligned}
&\rho^2+2\,\rho\cos\theta-3\le 0 \iff \rho_-\le\rho\le\rho_+ \\
\iff & -\cos\theta-\sqrt{3+(\cos\theta)^2}\le\rho\le -\cos\theta+\sqrt{3+(\cos\theta)^2}\,.
\end{aligned}
$$

Di conseguenza il nuovo dominio di integrazione è

$$\left\{(\rho\,,\theta\,,\varphi)\in\mathbb{R}^3\;;\;\begin{array}{l}0\le\theta\le\pi\,,0\le\varphi\le 2\pi\\ 0\le\rho\le\sqrt{3+(\cos\theta)^2}-\cos\theta\end{array}\right\}.$$

Siccome il determinante della matrice di Jacobi del cambiamento è

$$\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial\rho} & \dfrac{\partial x}{\partial\theta} & \dfrac{\partial x}{\partial\varphi}\\ \dfrac{\partial y}{\partial\rho} & \dfrac{\partial y}{\partial\theta} & \dfrac{\partial y}{\partial\varphi}\\ \dfrac{\partial z}{\partial\rho} & \dfrac{\partial z}{\partial\theta} & \dfrac{\partial z}{\partial\varphi}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\sin\theta\cos\varphi & \rho\cos\theta\sin\varphi & -\rho\sin\theta\sin\varphi\\ \sin\theta\sin\varphi & \rho\cos\theta\sin\varphi & \rho\sin\theta\cos\varphi\\ \cos\theta & -\rho\sin\theta & 0\end{vmatrix}$$

$$=\rho^2\sin\theta$$

e quindi

$$\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\rho^2\sin\theta\,\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\,,$$

usando il teorema di riduzione otteniamo

$$\begin{aligned}I &= \iiint\limits_{\substack{0\le\theta\le\pi\\ 0\le\varphi\le2\pi\\ 0\le\rho\le\sqrt{3+(\cos\theta)^2}-\cos\theta}}\frac{1}{\rho}\,\rho^2\sin\theta\,\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\\
&= \int_0^{2\pi}\Bigg(\int_0^{\pi}\Bigg(\int_0^{\sqrt{3+(\cos\theta)^2}-\cos\theta}\rho\,\mathrm{d}\rho\Bigg)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\Bigg)\mathrm{d}\varphi\\
&= 2\pi\int_0^{\pi}\frac{\Big(\sqrt{3+(\cos\theta)^2}-\cos\theta\Big)^2}{2}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\\
&\overset{u=-\cos\theta}{=} \pi\int_{-1}^{1}\big(\sqrt{3+u^2}+u\big)^2\mathrm{d}u\\
&= \pi\Bigg(\int_{-1}^{1}3\,\mathrm{d}u+\int_{-1}^{1}2\,u^2\mathrm{d}u+\int_{-1}^{1}2\,u\sqrt{3+u^2}\,\mathrm{d}u\Bigg).\end{aligned}$$

Osservando che la funzione $[\,-1\,,1]\ni u\longmapsto 2\,u\sqrt{3+u^2}$ è dispari, risulta subito l'annullamento di $\int\limits_{-1}^{1} 2\,u\sqrt{3+u^2}\,\mathrm{d}u$. Cosicché

$$I=\pi\left(3\,u\,\Big|_{u=-1}^{u=1}+2\,\frac{u^3}{3}\,\Big|_{u=-1}^{u=1}\right)=\frac{22}{3}\,\pi\,.$$

4) : **Soluzione breve sfruttando la particolarità di f :**

Poiché

$$\begin{aligned}
f(x)=(\sin x)^4=\big((\sin x)^2\big)^2&=\left(\frac{1-\cos(2x)}{2}\right)^2\\
&=\frac{1-2\cos(2x)+\big(\cos(2x)\big)^2}{4}\\
&=\frac{1-2\cos(2x)+\dfrac{1-\cos(4x)}{2}}{4}\\
&=\frac{3}{8}-\frac{1}{2}\cos(2x)+\frac{1}{8}\cos(4x)\,,
\end{aligned}$$

i coefficienti di Fourier di f sono

$$a_o(f)=\frac{3}{4}\,,\ a_2(f)=-\frac{1}{2}\,,\ a_4(f)=\frac{1}{8}\,,$$
$$a_k(f)=0 \text{ per } k=1\,,k=3 \text{ e } k\geq 5\ \ ,$$
$$b_k(f)=0 \text{ per ogni } k\geq 1$$

e la serie di Fourier di f è la somma finita

$$\frac{3}{8}-\frac{1}{2}\cos(2x)+\frac{1}{8}\cos(4x)$$

(f è un polinomio trigonometrico) uguale ad $f(x)$.

Soluzione "standard":

Poiché f è una funzione pari, sappiamo fin dall'inizio che $b_k(f)=0$ per ogni $k\geq 1$.

Per calcolare

$$a_o(f) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} (\sin x)^4\,\mathrm{d}x\,,$$

osserviamo che

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} (\sin x)^\alpha\,\mathrm{d}x = \frac{\alpha-1}{\alpha} \int\limits_{-\pi}^{\pi} (\sin x)^{\alpha-2}\,\mathrm{d}x\,, \qquad \alpha \geq 2\ : \tag{8}$$

Infatti, integrando per parti si ottiene

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} (\sin x)^\alpha\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-\pi}^{\pi} (\sin x)^{\alpha-1}\,\mathrm{d}(-\cos x)$$

$$= \underbrace{-(\sin x)^{\alpha-1}\cos x \Big|_{x=-\pi}^{x=\pi}}_{=0} + \int\limits_{-\pi}^{\pi} (\alpha-1)(\sin x)^{\alpha-2}\,\underbrace{(\cos x)^2}_{=1-(\sin x)^2}\,\mathrm{d}x$$

$$= (\alpha-1)\int\limits_{-\pi}^{\pi} (\sin x)^{\alpha-2}\,\mathrm{d}x - (\alpha-1)\int\limits_{-\pi}^{\pi} (\sin x)^{\alpha}\,\mathrm{d}x\,,$$

cioè

$$\alpha \int\limits_{-\pi}^{\pi} (\sin x)^\alpha\,\mathrm{d}x = (\alpha-1)\int\limits_{-\pi}^{\pi} (\sin x)^{\alpha-2}\,\mathrm{d}x\,.$$

Cosicché abbiamo

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} (\sin x)^4\,\mathrm{d}x = \frac{3}{4}\int\limits_{-\pi}^{\pi} (\sin x)^2\,\mathrm{d}x$$

e

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} (\sin x)^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x = \pi\,,$$

quindi

$$a_o(f) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} (\sin x)^4\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\,\frac{3}{4}\,\pi = \frac{3}{4}\,.$$

Per calcolare i restanti coefficienti di Fourier reali di f, cioè

$$a_k(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\sin x)^4\cos(kx)\,\mathrm{d}x\,, \qquad k \geq 1\,,$$

osserviamo che

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\alpha^2}{k^2}-1\right)\int_{-\pi}^{\pi}(\sin x)^{\alpha}\cos(kx)\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{\alpha(\alpha-1)}{k^2}\int_{-\pi}^{\pi}(\sin x)^{\alpha-2}\cos(kx)\,\mathrm{d}x\,, \qquad \alpha \geq 2\,, k \geq 1\ :\end{aligned} \tag{9}$$

Infatti, integrando per parti due volte si ottiene

$$\int_{-\pi}^{\pi}(\sin x)^{\alpha}\cos(kx)\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi}(\sin x)^{\alpha}\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{k}\sin(kx)\right)$$

$$= \underbrace{\frac{1}{k}(\sin x)^{\alpha}\sin(kx)\Big|_{x=-\pi}^{x=\pi}}_{=0} - \frac{1}{k}\int_{-\pi}^{\pi}\alpha\,(\sin x)^{\alpha-1}(\cos x)\sin(kx)\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{k}\int_{-\pi}^{\pi}\alpha\,(\sin x)^{\alpha-1}(\cos x)\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{k}\cos(kx)\right)$$

$$= \underbrace{\frac{\alpha}{k^2}(\sin x)^{\alpha-1}(\cos x)\cos(kx)\Big|_{x=-\pi}^{x=\pi}}_{=0}$$

$$-\frac{\alpha}{k^2}\int_{-\pi}^{\pi}\left((\alpha-1)\,(\sin x)^{\alpha-2}\underbrace{(\cos x)^2}_{=1-(\sin x)^2} - (\sin x)^{\alpha}\right)\cos(kx)\,\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{\alpha(\alpha-1)}{k^2}\int_{-\pi}^{\pi}(\sin x)^{\alpha-2}\cos(kx)\,\mathrm{d}x + \frac{\alpha^2}{k^2}\int_{-\pi}^{\pi}(\sin x)^{\alpha}\cos(kx)\,\mathrm{d}x\,,$$

cioè

$$\frac{\alpha(\alpha-1)}{k^2}\int_{-\pi}^{\pi}(\sin x)^{\alpha-2}\cos(kx)\,\mathrm{d} = \left(\frac{\alpha^2}{k^2}-1\right)\int_{-\pi}^{\pi}(\sin x)^{\alpha}\cos(kx)\,\mathrm{d}x\,.$$

Per (9) abbiamo

$$\begin{aligned}&\left(\frac{16}{k^2}-1\right)\int\limits_{-\pi}^{\pi}(\sin x)^4\cos(kx)\,\mathrm{d}x\\&=\frac{6}{k^2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}(\sin x)^2\cos(kx)\,\mathrm{d}x\,,\qquad k\geq 1\,.\end{aligned}\tag{10}$$

e

$$\begin{aligned}&\left(\frac{4}{k^2}-1\right)\int\limits_{-\pi}^{\pi}(\sin x)^2\cos(kx)\,\mathrm{d}x\\&=\frac{2}{k^2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos(kx)\,\mathrm{d}x=\frac{2}{k^3}\,\sin(kx)\Big|_{x=-\pi}^{x=\pi}=0\,,\qquad k\geq 1\,.\end{aligned}\tag{11}$$

Siccome per ogni k dispari e per ogni $k>4$ (anche pari)

$$\frac{4}{k^2}-1\neq 0\,,\quad \frac{16}{k^2}-1\neq 0\,,$$

(11) e (10) implicano successivamente per $k=1\,, k=3$ ed ogni $k\geq 5$:

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}(\sin x)^2\cos(kx)\,\mathrm{d}x=0\,,$$
$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}(\sin x)^4\cos(kx)\,\mathrm{d}x=0\,,$$

quindi

$$a_k(f)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}(\sin x)^4\cos(kx)\,\mathrm{d}x=0\,.$$

Di conseguenza resta da calcolare solo $a_2(f)$ e $a_4(f)$.

Calcoliamo $a_2(f)$ direttamente usando (8): poiché

$$
\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} (\sin x)^4 \underbrace{\cos(2x)}_{=1-2(sinx)^2} \mathrm{d}x &= \int_{-\pi}^{\pi} (\sin x)^4 \mathrm{d}x - 2\int_{-\pi}^{\pi} (\sin x)^6 \mathrm{d}x \\
&\overset{(8)}{=} \int_{-\pi}^{\pi} (\sin x)^4 \mathrm{d}x - 2\,\frac{5}{6}\int_{-\pi}^{\pi} (\sin x)^4 \mathrm{d}x \\
&= -\frac{2}{3}\int_{-\pi}^{\pi} (\sin x)^4 \mathrm{d}x \\
&\overset{(8)}{=} -\frac{2}{3}\,\frac{3}{4}\int_{-\pi}^{\pi} (\sin x)^2 \mathrm{d}x \\
&\overset{(8)}{=} -\frac{2}{3}\,\frac{3}{4}\,\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x = -\frac{\pi}{2}\,,
\end{aligned}
$$

risulta

$$
a_2(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (\sin x)^4 \cos(2x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\,.
$$

Il calcolo di $a_4(f)$ è simile: poiché

$$
\begin{aligned}
\cos(4x) &= 2\big(\cos(2x)\big)^2 - 1 = 2\big(1 - 2\,(\sin x)^2\big)^2 - 1 \\
&= 1 - 8\,(\sin x)^2 + 8\,(\sin x)^4
\end{aligned}
$$

e quindi

$$
\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} (\sin x)^4 \cos(4x) \mathrm{d}x &= \int_{-\pi}^{\pi} (\sin x)^4 \mathrm{d}x - 8\int_{-\pi}^{\pi} (\sin x)^6 \mathrm{d}x + 8\int_{-\pi}^{\pi} (\sin x)^8 \mathrm{d}x \\
&\overset{(8)}{=} \int_{-\pi}^{\pi} (\sin x)^4 \mathrm{d}x - 8\int_{-\pi}^{\pi} (\sin x)^6 \mathrm{d}x + 8\,\frac{7}{8}\int_{-\pi}^{\pi} (\sin x)^6 \mathrm{d}x \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} (\sin x)^4 \mathrm{d}x - \int_{-\pi}^{\pi} (\sin x)^6 \mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&\overset{(8)}{=} \int\limits_{-\pi}^{\pi} (\sin x)^4 \mathrm{d}x - \frac{5}{6} \int\limits_{-\pi}^{\pi} (\sin x)^4 \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{6} \int\limits_{-\pi}^{\pi} (\sin x)^4 \mathrm{d}x \\
&\overset{(8)}{=} \frac{1}{6} \frac{3}{4} \int\limits_{-\pi}^{\pi} (\sin x)^2 \mathrm{d}x \\
&\overset{(8)}{=} \frac{1}{6} \frac{3}{4} \frac{1}{2} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{8} \, ,
\end{aligned}$$

risulta

$$a_4(f) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} (\sin x)^4 \cos(4x) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{8} \, .$$

Cosiché la serie di Fourier di f (in forma reale) è

$$\frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos(2x) + \frac{1}{8} \cos(4x) \, .$$

La serie di Fourier di f, essendo una somma finita, converge ovviamente in ogni punto e, siccome f è regolare, la sua somma è uguale ad f :

$$(\sin x)^4 = \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos(2x) + \frac{1}{8} \cos(4x) \, , \qquad x \in \mathbb{R}, .$$