NOME: ....   **MATRICOLA:** ....

Corso di Laurea in Matematica, A.A. 2012/2013
Analisi Reale e Complessa, Esame del 15.11.2013

1) Sia $f : \big(0\,,1\big] \longrightarrow \big(0\,,1\big]$ la funzione definita dalla formula

$$f(x) := \begin{cases} \left(\dfrac{1}{x} - k\right) & \text{se } \dfrac{1}{k+1} \leq x < \dfrac{1}{k}\,, \\ \quad 1 & \text{se } x = 1\,. \end{cases}$$

a) Descrivere $f^{-1}\big((a\,,b]\big)$ per ogni $0 \leq a < b \leq 1$ e verificare che f è una funzione di Borel.

b) Mostrare che esistono delle costanti $0 < c_1 \leq c_2 < +\infty$ tali che

$$c_1\big(b-a\big) \leq \big|f^{-1}\big((a\,,b]\big)\big| \leq c_2\big(b-a\big)\,, \quad 0 \leq a < b \leq 1\,.$$

2) Sapendo che

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{x}{n}\right)^n = e^{-x}\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,,$$

è corretto il seguente passaggio al limite sotto il segno di integrale

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n \ln x\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int\limits_0^{+\infty} \chi_{[0\,,n]}(x)\left(1-\frac{x}{n}\right)^n \ln x\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x}\ln x\,\mathrm{d}x$$

dove $\chi_{[0\,,n]}$ indica la funzione caratteristica di $[0\,,n]$?

Suggerimento: Si cerchi di maggiorare $\left(1-\dfrac{x}{n}\right)^n$ con e^{-x} per $0 \leq x \leq n$.

3) Sia

$$E := \left\{ x + iy \in \mathbb{C} : \ x, y \in \mathbb{R}, \ 4x^2 + 9y^2 \le 25 \right\}.$$

Calcolare

$$\int_{\partial^+ E} e^{1/z}(z^3 + z)\,\mathrm{d}z\,,$$

$$\int_{\partial^+ E} z^2 \sin\left(\frac{1}{z-1}\right)\mathrm{d}z\,.$$

4) Sia U un aperto del piano complesso contenente il il quadrato chiuso Q di vertici 1, 3, $3+2i$, $1+2i$. Denoti Γ il bordo di Q e sia $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ una funzione olomorfa tale che

1. $|f(z)| > 5$ per ogni $z \in \Gamma$,
2. $f(2+i) = 4$.

Mostrare che esiste $z_0 \in Q$ tale che $f(z_0) = 0$.

Soluzioni:

1) **:** a) Siano $0 \leq a < b \leq 1$. Per ogni intero $k \geq 1$ abbiamo

$$\begin{aligned} f^{-1}\big((a\,,b]\big) \cap \left[\frac{1}{k+1}\,,\frac{1}{k}\right) &= \left\{x \in \left[\frac{1}{k+1}\,,\frac{1}{k}\right); a < \frac{1}{x} - k \leq b\right\} \\ &= \left\{x \in \left[\frac{1}{k+1}\,,\frac{1}{k}\right); \frac{1}{k+b} \leq x < \frac{1}{k+a}\right\} \\ &= \left[\frac{1}{k+b}\,,\frac{1}{k+a}\right). \end{aligned}$$

Perciò

$$\begin{aligned} f^{-1}\big((a\,,b]\big) \cap \big(0\,,1\big) &= \bigcup_{k\geq 1}\left(f^{-1}\big((a\,,b]\big) \cap \left[\frac{1}{k+1}\,,\frac{1}{k}\right)\right) \\ &= \bigcup_{k\geq 1}\left[\frac{1}{k+b}\,,\frac{1}{k+a}\right) \end{aligned}$$

e possiamo concludere :

Se $0 \leq a < b < 1$ allora

$$f^{-1}\big((a\,,b]\big) = f^{-1}\big((a\,,b]\big) \cap \big(0\,,1\big) = \bigcup_{k\geq 1}\left[\frac{1}{k+b}\,,\frac{1}{k+a}\right),$$

mentre se $0 \leq a < b = 1$ allora

$$\begin{aligned} f^{-1}\big((a\,,1]\big) &= \{1\} \cup \Big(f^{-1}\big((a\,,1]\big) \cap \big(0\,,1\big)\Big) \\ &= \{1\} \cup \bigcup_{k\geq 1}\left[\frac{1}{k+1}\,,\frac{1}{k+a}\right). \end{aligned}$$

Per verificare che f è una funzione di Borel basta mostrare che per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ la controimmagine $f^{-1}\big((\lambda\,,+\infty)\big)$ è un insieme di Borel. Ma usando la formula di cui sopra si ottiene

$$f^{-1}\big((\lambda\,,+\infty)\big) = \begin{cases} \big(0\,,1\big] & \text{se} \quad \lambda \leq 0\,, \\ \{1\} \cup \displaystyle\bigcup_{k\geq 1}\left[\frac{1}{k+1}\,,\frac{1}{k+\lambda}\right) & \text{se} \quad 0 < \lambda < 1\,, \\ \emptyset & \text{se} \quad \lambda \geq 1 \end{cases}$$

e risulta la borelianità di $f^{-1}\big((\lambda\,,+\infty)\big)$ in tutti i casi.

b) Nel punto a) abbiamo visto che, per ogni $0\leq a<b\leq 1$,

$$f^{-1}\big((a\,,b]\big)=\begin{cases}\displaystyle\bigcup_{k\geq 1}\left[\frac{1}{k+b}\,,\frac{1}{k+a}\right) & \text{se } \ b<0\,,\\ \displaystyle\{1\}\cup\bigcup_{k\geq 1}\left[\frac{1}{k+b}\,,\frac{1}{k+a}\right) & \text{se } \ b=1\,,\end{cases}$$

perciò

$$\big|f^{-1}\big((a\,,1]\big)\big|=\sum_{k\geq 1}\left(\frac{1}{k+b}-\frac{1}{k+a}\right)=\big(b-a\big)\sum_{k\geq 1}\frac{1}{(k+a)(k+b)}\,.$$

Poiché

$$\sum_{k\geq 1}\frac{1}{(k+a)(k+b)}\quad\begin{cases}\displaystyle\leq\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}\,,\\ \displaystyle\geq\sum_{k\geq 1}\frac{1}{(k+1)^2}=\frac{\pi^2}{6}-1\,,\end{cases}$$

risulta

$$\left(\frac{\pi^2}{6}-1\right)\big(b-a\big)\leq\big|f^{-1}\big((a\,,b]\big)\big|\leq\frac{\pi^2}{6}\big(b-a\big)\,.$$

2) : La successione delle funzioni continue (quindi misurabili)

$$\big(0\,,+\infty\big)\ni x\longmapsto\chi_{[0\,,n]}(x)\left(1-\frac{x}{n}\right)^n\ln x\,,n\geq 1$$

converge puntualmente alla funzione continua (quindi misurabile)

$$\big(0\,,+\infty\big)\ni x\longmapsto e^{-x}\ln x\,.$$

La correttezza del passaggio al limite sotto il segno di integrale seguirà se verifichiamo la validità della condizione di dominanza

$$\left|\chi_{[0\,,n]}(x)\left(1-\frac{x}{n}\right)^n\ln x\right|\leq g(x)\,,\qquad x\in\big(0\,,+\infty\big)\,,n\geq 1\,,$$

cioè

$$\left(1-\frac{x}{n}\right)^n\big|\ln x\big|\leq g(x)\,,\qquad x\in\big(0\,,n\big)\,,n\geq 1\,,\tag{1}$$

dove $g : \big(0\,,+\infty\big) \longrightarrow \big[0\,,+\infty\big)$ è una opportuna funzione sommabile. A questo fine proviamo che

$$\left(1-\frac{x}{n}\right)^n \leq e^{-x}\,, \qquad x\in\big(0\,,+\infty\big)\,, n\geq 1\,. \tag{2}$$

(2) è equivalente ($x = n\,t$) alla disuguaglianza

$$1-t\leq e^{-t}\,, t\in\big(0\,,1\big)\,.$$

Ma la funzione $1-t-e^{-t}$ si annulla in $t=0$ ed è decrescente in $\big(0\,,+\infty\big)$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(1-t-e^{-t}\big) = -1+e^{-t} < 0\,, \qquad t>0\,.$$

Di conseguenza $1-t-e^{-t} < 0$ per ogni $t>0$.

In virtù di (2) la disuguaglianza (1) sarà soddisfatta ponendo

$$g(x) := e^{-x}|\ln x|\,, \qquad x>0$$

e resta solo da verificare che la funzione $g : \big(0\,,+\infty\big) \longrightarrow \big[0\,,+\infty\big)$ è sommabile. Ma

$$\int_0^1 e^{-x}|\ln x|\,\mathrm{d}x \leq \int_0^1 \big(-\ln x\big)\mathrm{d}x = \big(x-x\ln x\big)\Big|_{x=0}^{x=1} = 1 < +\infty$$

e

$$\int_1^{+\infty} e^{-x}|\ln x|\,\mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} \ln x\,\mathrm{d}\big(-e^{-x}\big) = \underbrace{\big(-e^{-x}\ln x\big)\Big|_{x=1}^{x=+\infty}}_{=0} + \int_1^{+\infty}\frac{e^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x$$

$$\leq \int_1^{+\infty} e^{-x}\,\mathrm{d}x = 1 < +\infty\,.$$

Osservazione 1.

Chiaramente, per ogni funzione misurabile $f : \big(0\,,+\infty\big) \longrightarrow \mathbb{R}$, tale che il suo prodotto con e^{-x} sia sommabile, è giustificato il passaggio al limite

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x} f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

(nel caso dell'esercizio 3) $f(x) = \ln x$).

Osservazione 2.

Il passaggio al limite nell'esercizio 3) può essere usato per calcolare

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-x} \ln x\,\mathrm{d}x\,.$$

In verità, possiamo calcolare esplicitamente gli integrali

$$\int\limits_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n \ln x\,\mathrm{d}x\,, \qquad n \geq 1\ :$$

tramite integrazione per parti seguita dalla sostituzione

$$t = 1-\frac{x}{n}\,, \quad x = n(1-t)\,, \quad \mathrm{d}x = -n\,\mathrm{d}t$$

si ottiene

$$\begin{aligned}
&\int\limits_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n \ln x\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{n}{n+1} \int\limits_0^n \ln x\,\mathrm{d}\left(1-\left(1-\frac{x}{n}\right)^{n+1}\right) \\
&= \frac{n}{n+1}\left[\left(1-\left(1-\frac{x}{n}\right)^{n+1}\right)\ln x\,\Bigg|_{x=0}^{x=n} - \int\limits_0^n \left(1-\left(1-\frac{x}{n}\right)^{n+1}\right)\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\right] \\
&= \frac{n}{n+1}\left[\ln n - \int\limits_0^1 \frac{1-t^{n+1}}{1-t}\,\mathrm{d}t\right] = \frac{n}{n+1}\left[\ln n - \int\limits_0^1 \Big(\sum_{k=0}^{n} t^k\Big)\mathrm{d}t\right] \\
&= \frac{n}{n+1}\left[\ln n - \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\right] = \frac{n}{n+1}\left[\ln n - \sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}\right].
\end{aligned}$$

Perciò

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} \ln x \, \mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \left[\ln n - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} \right] = -\gamma \, ,$$

dove

$$\gamma := \lim_{n\to\infty} \left[\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \ln n \right]$$

è la cosiddetta *costante di Eulero-Mascheroni*.

L'esistenza del limite che definisce la costante di Eulero-Mascheroni si può verificare anche direttamente. Infatti, poiché

$$n = \prod_{k=1}^{n-1} \frac{k+1}{k} \, , \quad \ln n = \sum_{k=1}^{n} \Big(\ln(k+1) - \ln k \Big) = \sum_{k=1}^{n} \ln \Big(1 + \frac{1}{k} \Big) \, ,$$

abbiamo

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \ln n = \sum_{k=1}^{n-1} \bigg(\frac{1}{k} - \ln \Big(1 + \frac{1}{k} \Big) \bigg)$$

dove

$$0 < \frac{1}{k} - \ln \Big(1 + \frac{1}{k} \Big) < \frac{1}{2\,k^2} \ :$$

La funzione $\big[0\,,+\infty\big) \ni t \longmapsto t - \ln(1+t)$ si annulla in $t = 0$ ed è strettamente crescente :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(t - \ln(1+t) \Big) = \frac{t}{1+t} > 0 \, , \qquad t > 0 \, .$$

Perciò

$$t - \ln(1+t) > 0 \, , \qquad t > 0 \, .$$

Poi la funzione $\big[0\,,+\infty\big) \ni t \longmapsto t - \ln(1+t) - \dfrac{t^2}{2}$ si annulla in $t = 0$ ed è strettamente decrescente :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg(t - \ln(1+t) - \frac{t^2}{2} \bigg) = -\frac{t^2}{1+t} < 0 \, , \qquad t > 0 \, .$$

Così otteniamo anche la disuguaglianza

$$t - \ln(1+t) - \frac{t^2}{2} < o \iff t - \ln(1+t) < \frac{t^2}{2} \, , \qquad t > 0 \, .$$

Risulta che la costante γ di Eulero-Mascheroni è la somma della serie a termini positivi

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}-\ln\Big(1+\frac{1}{k}\Big)\right)$$

che è convergente perché si maggiora termine a termine con la serie convergente nota

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2\,k^2}=\frac{\pi^2}{12}=0.8224670\ldots\ .$$

Il valore di γ con venti decimali esatti è

$$\gamma=0,57721566490153286060\ldots\ .$$

Non è ancora noto se γ sia razionale o meno.

3) : La funzione $e^{1/z}(z^3+z)$ ha una sola singolarità in $z=0$. Per trovare il suo residuo in 0, la sviluppiamo in serie di Laurent :

$$\begin{aligned}
e^{1/z}(z^3+z) &= (z^3+z)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\,z^{-k}\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\,z^{3-k}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\,z^{1-k}\\
&\overset{j=k-2}{=} \sum_{j=-2}^{\infty}\frac{1}{(j+2)!}\,z^{1-j}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\,z^{1-k}\\
&= z^3+z^2+\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{(k+2)!}+\frac{1}{k!}\right)z^{1-k}\,.
\end{aligned}$$

Risulta che

$$Res\Big(e^{1/z}(z^3+z)\,,0\Big)=\frac{1}{(2+2)!}+\frac{1}{2!}=\frac{13}{24}$$

e, dato che la singolarità 0 si trova nell'interno di E, per il teorema dei residui concludiamo :

$$\int\limits_{\partial^+E} e^{1/z}(z^3+z)\,\mathrm{d}z=2\pi i\,Res\Big(e^{1/z}(z^3+z)\,,0\Big)=\frac{13\,\pi i}{12}\,.$$

Il calcolo dell'integrale

$$\int\limits_{\partial^+ E} z^2 \sin\left(\frac{1}{z-1}\right) \mathrm{d}z$$

è simile :

Poiché la funzione $z^2 \sin\left(\dfrac{1}{z-1}\right)$ ha una sola singolarità in $z = 1$ ed 1 si trova nell'interno di E, per il teorema dei residui abbiamo

$$\int\limits_{\partial^+ E} z^2 \sin\left(\frac{1}{z-1}\right) \mathrm{d}z = 2\pi i \, Res\left(z^2 \sin\left(\frac{1}{z-1}\right) \right).$$

Perciò resta solo da calcolare il residuo alla parte destra. A questo fine sviluppiamo $z^2 \sin\left(\dfrac{1}{z-1}\right)$ in serie di Laurent attorno a $z = 1$:

$$\begin{aligned}
& z^2 \sin\left(\frac{1}{z-1}\right) \\
&= \Big((z-1)+1\Big)^2 \sin\left(\frac{1}{z-1}\right) \\
&= (z-1)^2 \left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{3!}\frac{1}{(z-1)^3} + \frac{1}{5!}\frac{1}{(z-1)^5} - \ldots \right) \\
&\quad + 2(z-1)\left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{3!}\frac{1}{(z-1)^3} + \frac{1}{5!}\frac{1}{(z-1)^5} - \ldots \right) \\
&\quad + \frac{1}{z-1} - \frac{1}{3!}\frac{1}{(z-1)^3} + \frac{1}{5!}\frac{1}{(z-1)^5} - \ldots \\
&= (z-1) + 2 + \left(1 - \frac{1}{3!}\right)\frac{1}{z-1} - \frac{2}{3!}\frac{1}{(z-1)^2} + \ldots .
\end{aligned}$$

Risulta che

$$Res\left(z^2 \sin\left(\frac{1}{z-1}\right) \right) = 1 - \frac{1}{3!} = \frac{5}{6},$$

quindi

$$\int\limits_{\partial^+ E} z^2 \sin\left(\frac{1}{z-1}\right) \mathrm{d}z = \frac{5\pi i}{3}.$$

4) **:** Se f non si annullasse in Q, cioè se l'aperto

$$V := \{z \in U \,;\, f(z) \neq 0\}$$

contenesse Q, allora il dominio della funzione olomorfa

$$V \ni z \longmapsto \frac{1}{f(z)}$$

conterebbe Q ed avremmo

$$\left| \frac{1}{f(z)} \right| < \frac{1}{5} \text{ per ogni } z \in \Gamma \,,$$
$$\frac{1}{f(z)} = \frac{1}{4} > \frac{1}{5} \text{ per } z = 2 + i \in Q \,,$$

in contraddizione con il principio del massimo.

Osservazione.

Possiamo chiederci, come si potrebbe costruire in modo esplicito una funzione f che soddisfi le condizioni nel compito 4) ?

$f(z)-4$ dovendo annularsi in $z = 2+i$, dev'essere divizibile con $z-2-i$, quindi dalla forma

$$f(z) - 4 = \big(z - 2 - i\big)\, g(z)$$

dove $g : U \longrightarrow \mathbb{C}$ è una funzione olomorfa. Basta ora prendere un g, per esempio una funzione costante c, tale che abbiamo

$$|f(z)| > 5 \text{ per } z \in \mathbb{C} \text{ a distanza } \geq 1 \text{ da } 2 + i \,,$$

cioè

$$|4 + cw| = |f(w + 2 + i)| > 5 \text{ per } w \in \mathbb{C} \,, |w| \geq 1 \,.$$

Cosicché il polinomio del primo grado

$$f(z) := 4 + c\big(z - 2 - i\big) \,,$$

con $c \in \mathbb{C}$, $|c| > 9$, soddisfarà le condizioni nel compito 4).

Rimarchiamo che la funzione di cui sopra si annulla in $z = 2 - \dfrac{4}{c} + i$ e per $|c| > 9$ questo punto si trova in Q.