NOME: . . . . **MATRICOLA:** . . . .

Corso di Laurea in Fisica, A.A. 2014/2015
Calcolo 2, Esame scritto del 16.02.2015

1) a) Si trovi la soluzione generale del sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) + y(t) - \cos t \\ y'(t) = -2\,x(t) - y(t) + \sin t + \cos t \end{cases} . \qquad (*)$$

b) Si trovi la soluzione del sistema (*) che soddisfa la condizione iniziale

$$x(0) = 1\,,\, y(0) = -2\,.$$

2) Si calcoli l'integrale doppio

$$\int\limits_{\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}\leq 1} \sqrt{1 - \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

Suggerimento: È conveniente passare in coordinate polari generalizzati

$$\begin{matrix} x = 3\,\rho\cos\theta \\ y = 2\,\rho\sin\theta \end{matrix}\,, \qquad \rho \geq 0\,, 0 \leq \theta < 2\pi\,.$$

3) Si calcoli l'area della sezione del solido cilindrico

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \, ; \, \frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1 \right\}$$

con la semisfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4 \, , z \geq 0 \, ,$$

cioè della superficie definita dalle relazioni

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4 \, , \frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1 \, , z \geq 0 \, .$$

Suggerimento: È conveniente passare in coordinate sferiche.

4) Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua a tratti dispari, periodica di periodo $2\,\pi$, e $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la funzione periodica di periodo $2\,\pi$ definita tramite la formula

$$g(x) = f(x) \sin x \, , \qquad x \in [-\pi \, , \pi] \, .$$

a) Sapendo che la serie di Fourier di f è

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx) \, ,$$

si verifichi che la serie di Fourier di g è

$$\frac{b_1}{2} + \frac{b_2}{2} \cos x + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{b_{k+1} - b_{k-1}}{2} \cos(kx) \, .$$

b) Sapendo che nel caso $f(x) = 1$ per $x \in (0 \, , \pi)$ abbiamo

$$b_k(f) = \frac{2}{\pi} \frac{1 - (-1)^k}{k} \, , \qquad k \geq 1 \, ,$$

si trovi la serie di Fourier di g e si discuti la sua convergenza.

Soluzioni:

1) **:** a) Il sistema di equazioni differenziale da risolvere è lineare ed a coefficienti costanti.

Risolviamo prima il sistema omogeneo associato

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico della matrice dei coefficienti è

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1$$

ed ha due zeri semplici :

$$\lambda_1 = i\,, \qquad \lambda_2 = -i\,.$$

Gli autovettori corrispondenti all'autovalore λ_1 sono le soluzioni non zeri dell'equazione matriciale

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda_1 & 1 \\ -2 & -1-\lambda_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

cioè di

$$\begin{pmatrix} 1-i & 1 \\ -2 & -1-i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff y_1 = (i-1)\,x_1\,,$$

quindi i multipli non zeri del vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ i-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Similmente si trova che gli autovettori corrispondenti all'autovalore λ_2 sono i multipli non zeri del vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ -1-i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} - i\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Risultano le seguenti due soluzioni linearmente indipendenti del sistema omogeneo :

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix} &= e^{it}\begin{pmatrix} 1 \\ i-1 \end{pmatrix} \\
&= \big(\cos t + i\sin t\big)\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \\
&= \begin{pmatrix} \cos t \\ -\cos t - \sin t \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t - \sin t \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

e

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} &= e^{-it} \begin{pmatrix} 1 \\ -1-i \end{pmatrix} \\
&= \big(\cos t - i \sin t\big)\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} - i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \\
&= \begin{pmatrix} \cos t \\ -\cos t - \sin t \end{pmatrix} - i \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t - \sin t \end{pmatrix} .
\end{aligned}
$$

Altre due soluzioni linearmente indipendenti, che saranno inoltre reali, si ottengono considerando la parte reale e la parte immaginaria delle soluzioni precedenti :

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} \cos t \\ -\cos t - \sin t \end{pmatrix} , \\
\frac{1}{2i}\left(\begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t - \sin t \end{pmatrix} .
\end{aligned}
$$

Cosicché la soluzione generale del sistema omogeneo è

$$
c_1 \begin{pmatrix} \cos t \\ -\cos t - \sin t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t - \sin t \end{pmatrix}
$$

dove $c_1 \, , c_2$ sono costanti arbitrari.

Possiamo trovare una soluzione particolare del sistema non omogeneo usando il metodo della variazione delle costanti :

Cerchiamo una soluzione particolare sotto la forma

$$
c_1(t) \begin{pmatrix} \cos t \\ -\cos t - \sin t \end{pmatrix} + c_2(t) \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t - \sin t \end{pmatrix}
$$

che deve quindi soddisfare l'equazione matriciale

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(c_1(t) \begin{pmatrix} \cos t \\ -\cos t - \sin t \end{pmatrix} + c_2(t) \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t - \sin t \end{pmatrix}\right) \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \left(c_1(t) \begin{pmatrix} \cos t \\ -\cos t - \sin t \end{pmatrix} + c_2(t) \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t - \sin t \end{pmatrix}\right) \\
&\qquad + \begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t + \cos t \end{pmatrix} ,
\end{aligned}
$$

cioè

$$c_1'(t)\begin{pmatrix}\cos t\\ -\cos t-\sin t\end{pmatrix}+c_2'(t)\begin{pmatrix}\sin t\\ \cos t-\sin t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\cos t\\ \sin t+\cos t\end{pmatrix}.$$

Si trovano $c_1'(t)=-1\,,c_2'(t)=0$, quindi una soluzione particolare si ottiene con $c_1(t)=-t\,,c_2(t)=0$:

$$-t\begin{pmatrix}\cos t\\ -\cos t-\sin t\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}\sin t\\ \cos t-\sin t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-t\cos t\\ t\bigl(\cos t+\sin t\bigr)\end{pmatrix}.$$

Avendo ora la soluzione generale del sistema omogeneo ed aver trovato anche una soluzione particolare del sistema non omogeneo, possiamo concludere che

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}x(t)\\ y(t)\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}-t\cos t\\ t\bigl(\cos t+\sin t\bigr)\end{pmatrix}+c_1\begin{pmatrix}\cos t\\ -\cos t-\sin t\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}\sin t\\ \cos t-\sin t\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}-t\cos t+c_1\cos t+c_2\sin t\\ t\bigl(\cos t+\sin t\bigr)-c_1\bigl(\cos t+\sin t\bigr)+c_2\bigl(\cos t-\sin t\bigr)\end{pmatrix},\end{aligned}$$

dove $c_1\,,c_2$ sono costanti arbitrari, è la soluzione generale del sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} x'(t)= \quad x(t)+y(t)-\cos t\\ y'(t)=-2x(t)-y(t)+\sin t+\cos t\end{cases}. \qquad (*)$$

b) Perché una soluzione

$$\begin{cases} x(t)=-t\cos t+c_1\cos t+c_2\sin t\\ y(t)=t\bigl(\cos t+\sin t\bigr)-c_1\bigl(\cos t+\sin t\bigr)+c_2\bigl(\cos t-\sin t\bigr)\end{cases}$$

del sistema (*) verifichi la condizione iniziale

$$\begin{cases} x(0)=\ \ 1\\ y(0)=-2\end{cases}$$

dobbiamo avere

$$\left.\begin{aligned} c_1=x(0)&=\ \ 1\\ -c_1+c_2=y(0)&=-2\end{aligned}\right\}\iff\begin{cases} c_1=\ \ 1\\ c_2=-1\end{cases}.$$

Di conseguenza

$$\begin{cases} x(t)=-t\cos t+\cos t-\sin t\\ y(t)=t\bigl(\cos t+\sin t\bigr)-2\cos t\end{cases}$$

è la soluzione del sistema (*) soddisfacente la condizione iniziale

$$\begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = -2 \end{cases} .$$

2) **:** Calcoleremo l'integrale

$$\int\limits_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leq 1} \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

dove $a\,,b>0$ sono costanti arbitrari. Nel nostro caso $a=3$ e $b=2$.

Useremo il passaggio in coordinate polari generalizzati

$$\begin{cases} x = a\,\rho\cos\theta \\ y = b\,\rho\sin\theta \end{cases} , \qquad \rho\geq 0\,, 0\leq\theta<2\pi\,,$$

tramite il quale l'ellisse $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\leq 1$ si trasforma in il rettangolo

$$\left\{\begin{pmatrix}\rho\\ \theta\end{pmatrix} ; \, 0\leq\rho\leq 1\,,\, 0\leq\theta<2\pi\right\}.$$

Poiché

$$\left|\det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial\rho} & \dfrac{\partial x}{\partial\theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial\rho} & \dfrac{\partial y}{\partial\theta}\end{pmatrix}\right| = \left|\det\begin{pmatrix} a\cos\theta & -a\,\rho\sin\theta \\ b\sin\theta & b\,\rho\cos\theta\end{pmatrix}\right| = ab\rho$$

e quindi

$$\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = ab\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,,$$

risulta

$$\int\limits_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leq 1} \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \int\limits_{\substack{0\leq\rho\leq 1\\ 0\leq\theta<2\pi}} \sqrt{1-\rho^2}\,ab\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta$$

$$
\begin{aligned}
&= ab \int\limits_0^1 \sqrt{1-\rho^2}\,\rho \Big(\int\limits_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \Big) \mathrm{d}\rho = 2\pi ab \int\limits_0^1 \sqrt{1-\rho^2}\,\rho\,\mathrm{d}\rho \\
&= -\pi ab \int\limits_0^1 \sqrt{1-\rho^2}\,\mathrm{d}\big(1-\rho^2\big) = -\,\pi ab\,\frac{2}{3}\big(1-\rho^2\big)^{3/2}\Big|_{\rho=0}^{\rho=1} \\
&= \frac{2\pi}{3}\,ab\,.
\end{aligned}
$$

Nel nostro caso, per $a = 3$ e $b = 2$ abbiamo

$$\int\limits_{\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}\leq 1} \sqrt{1-\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 4\pi\,.$$

3) **:** Risolveremo il problema più generale del calcolo dell'area della sezione del solido cilindrico

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3\,;\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}$$

con la semisfera

$$x^2+y^2+z^2 = a^2\,,\ z \geq 0\,,$$

dove $a \geq b > 0$ sono costanti arbitrari. Nel nostro caso $a = 2$ e $b = 1$.

Soluzione usando la formula nota per l'area di un grafico:

Osserviamo che la semisfera $x^2+y^2+z^2 = a^2$, $z \geq 0$, è il grafico della funzione

$$f(x\,,y) = \sqrt{a^2-x^2-y^2}$$

definita sul disco $x^2+y^2 \leq a^2$. Siccome $0 < b \leq a$, il disco $x^2+y^2 \leq a^2$ contiene l'ellisse E descritta dalla disuguaglianza $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2} \leq 1$ ed il nostro compito consiste nel calcolo dell'area A del grafico di f sopra E .

Per la nota formula

$$A = \int_E \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)^2}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\,.$$

Poiché

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}\,, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}\,,$$

otteniamo

$$A = \int_E \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{a^2 - x^2 - y^2}}\, x\, \mathrm{d}y = a \int_E \frac{\mathrm{d}x\, \mathrm{d}y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}\,.$$

Per il calcolo dell'integrale possiamo passare in coordinate polari

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}, \qquad \rho \geq 0\,, 0 \leq \theta < 2\pi\,, \quad \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \rho\, \mathrm{d}\rho\, \mathrm{d}\theta\,.$$

In coordinate polari l'ellisse E è descritta tramite la disuguaglianza

$$\rho^2\left(\frac{\cos^2\theta}{a^2} + \frac{\sin^2\theta}{b^2}\right) \leq 1 \iff \rho \leq \left(\frac{\cos^2\theta}{a^2} + \frac{\sin^2\theta}{b^2}\right)^{-1/2},$$

perciò

$$\begin{aligned}
A &= a \int_o^{2\pi} \left(\int_0^{\left(\frac{\cos^2\theta}{a^2} + \frac{\sin^2\theta}{b^2}\right)^{-1/2}} \frac{\rho}{\sqrt{a^2 - \rho^2}}\, \mathrm{d}\rho \right) \mathrm{d}\theta \\
&= a \int_o^{2\pi} \left(\int_0^{\left(\frac{\cos^2\theta}{a^2} + \frac{\sin^2\theta}{b^2}\right)^{-1/2}} \frac{-1}{2\sqrt{a^2 - \rho^2}}\, \mathrm{d}\big(a^2 - \rho^2\big) \right) \mathrm{d}\theta \\
&= a \int_o^{2\pi} \left(-\sqrt{a^2 - \rho^2}\, \Bigg|_{\rho=0}^{\rho=\left(\frac{\cos^2\theta}{a^2} + \frac{\sin^2\theta}{b^2}\right)^{-1/2}} \right) \mathrm{d}\theta \\
&= a \int_o^{2\pi} \left(a - \sqrt{a^2 - \frac{1}{\frac{\cos^2\theta}{a^2} + \frac{\sin^2\theta}{b^2}}} \right) \mathrm{d}\theta
\end{aligned}$$

$$= a^2 \int\limits_o^{2\pi} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{\cos^2\theta + \frac{a^2}{b^2}\sin^2\theta}} \right) \mathrm{d}\theta \tag{1}$$

$$= a^2 \int\limits_o^{2\pi} \left(1 - \sqrt{\frac{\cos^2\theta + \frac{a^2}{b^2}\sin^2\theta - 1}{\cos^2\theta + \frac{a^2}{b^2}\sin^2\theta}} \right) \mathrm{d}\theta$$

$$= a^2 \int\limits_o^{2\pi} \left(1 - \sqrt{\frac{\frac{a^2}{b^2}\sin^2\theta - \sin^2\theta}{\cos^2\theta + \frac{a^2}{b^2}(1 - \cos^2\theta)}} \right) \mathrm{d}\theta$$

$$= a^2 \int\limits_o^{2\pi} \left(1 - \frac{\sqrt{\frac{a^2}{b^2} - 1}\,|\sin\theta|}{\sqrt{\frac{a^2}{b^2}\left(\frac{b^2}{a^2}\cos^2\theta + 1 - \cos^2\theta\right)}} \right) \mathrm{d}\theta$$

$$= a^2 \int\limits_o^{2\pi} \left(1 - \frac{\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}\,|\sin\theta|}{\sqrt{1 - \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)\cos^2\theta}} \right) \mathrm{d}\theta$$

$$= 2\,a^2 \int\limits_o^{\pi} \left(1 - \frac{\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}\,\sin\theta}{\sqrt{1 - \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)\cos^2\theta}} \right) \mathrm{d}\theta$$

$$= 2\pi a^2 - 2\,a^2 \int\limits_o^{\pi} \frac{\mathrm{d}\left(-\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}\cos\theta\right)}{\sqrt{1 - \left(-\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}\cos\theta\right)^2}}$$

$$= 2\pi a^2 - 2\,a^2 \arcsin\left(-\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}\cos\theta\right)\Bigg|_{\theta=0}^{\theta=\pi}$$

$$= 2\pi a^2 - 4\,a^2 \arcsin\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$$

$$= 4a^2\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}\right).$$

Nel caso $a = 2\,, b = 1$ possiamo fermarci qui: l'are richiesta è

$$16\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 16\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{8}{3}\,\pi\,.$$

Nel caso generale però è convenabile fare una ulteriore semplificazione usando l'identità

$$\frac{\pi}{2} - \arcsin\sqrt{1-t^2} = \arcsin t\,, \qquad 0 \leq t \leq 1\ : \tag{2}$$

Anzitutto, se poniamo

$$\alpha := \frac{\pi}{2} - \arcsin\sqrt{1-t^2}$$

allora $0 \leq \arcsin\sqrt{1-t^2} \leq \dfrac{\pi}{2}$ implica

$$0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}\,.$$

Poi, siccome $\arcsin\sqrt{1-t^2} = \dfrac{\pi}{2} - \alpha$, abbiamo

$$\cos\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sqrt{1-t^2}\,.$$

Di conseguenza

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-(1-t^2)} = t$$

e quindi $\alpha = \arcsin t$.

Infatti, usando (2) con $t = \dfrac{b}{a}$ otteniamo

$$A = 4a^2\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}\right) = 4a^2\arcsin\frac{b}{a}\,.$$

Soluzione usando parametrizzazione con le coordinate sferiche:

La semisfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $z \geq 0$, si parametrizza tramite le coordinate sferiche

$$\begin{cases} x = a\sin\theta\cos\varphi \\ y = a\sin\theta\sin\varphi \\ z = a\cos\theta \end{cases} \quad , \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\,, 0 \leq \varphi < 2\pi\,.$$

Per calcolare l'elemento di area ci serve il prodotto vettoriale

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\begin{pmatrix} x \\ y \\ x \end{pmatrix} \times \frac{\partial}{\partial\varphi}\begin{pmatrix} x \\ y \\ x \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial x}{\partial\theta} & \dfrac{\partial y}{\partial\theta} & \dfrac{\partial z}{\partial\theta} \\ \dfrac{\partial x}{\partial\varphi} & \dfrac{\partial y}{\partial\varphi} & \dfrac{\partial z}{\partial\varphi} \end{vmatrix}$$

uguale a

$$\begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ a\cos\theta\cos\varphi & a\cos\theta\sin\varphi & -a\sin\theta \\ -a\sin\theta\sin\varphi & a\sin\theta\cos\varphi & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} a^2\sin^2\theta\cos\varphi \\ a^2\sin^2\theta\sin\varphi \\ a^2\cos\theta\sin\theta \end{pmatrix}.$$

Risulta che l'elemento d'area è

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\sigma &= \sqrt{a^4\sin^4\theta\cos^2\varphi + a^4\sin^4\theta\sin^2\varphi + a^4\cos^2\theta\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi \\ &= \sqrt{a^4\sin^4\theta + a^4\cos^2\theta\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi \\ &= \sqrt{a^4\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi = a^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\,. \end{aligned}$$

Ora l'intersezione $\mathcal{S}$ della semisfera $x^2+y^2+z^2=a^2$, $z\geq 0$, con il solido cilindrico verticale avendo come base l'ellipse $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\leq 1$ è la parte della semisfera corrispondente ai parametri $(\theta\,,\varphi)$ che soddisfano la disuguaglianza

$$\begin{aligned} &\frac{a^2\sin^2\theta\cos^2\varphi}{a^2} + \frac{a^2\sin^2\theta\sin^2\varphi}{b^2} \leq 1 \\ \Longleftrightarrow\ &\left(\cos^2\varphi + \frac{a^2}{b^2}\sin^2\varphi\right)\sin^2\theta \leq 1 \\ \Longleftrightarrow\ &\sin\theta \leq \left(\cos^2\varphi + \frac{a^2}{b^2}\sin^2\varphi\right)^{-1/2} \\ \Longleftrightarrow\ &\theta \leq \arcsin\left(\cos^2\varphi + \frac{a^2}{b^2}\sin^2\varphi\right)^{-1/2}. \end{aligned}$$

Osserviamo che $\cos^2\varphi + \dfrac{a^2}{b^2}\sin^2\varphi \geq 1$ per ogni valore di φ, perciò $\arcsin\left(\cos^2\varphi + \dfrac{a^2}{b^2}\sin^2\varphi\right)^{-1/2}$ è sempre definito. Infatti, siccome $0 < b \leq a$, abbiamo

$$\cos^2\varphi + \frac{a^2}{b^2}\sin^2\varphi = 1 + \Bigg(\underbrace{\frac{a^2}{b^2} - 1}_{\geq 0}\Bigg)\sin^2\varphi \geq 1$$

per ogni $\varphi \in \mathbb{R}$.

Perciò l'area di $\mathcal{S}$ è

$$A = \int\limits_S \mathrm{d}\sigma = \int\limits_0^{2\pi}\Bigg(\int\limits_0^{\arcsin\left(\cos^2\varphi+\frac{a^2}{b^2}\sin^2\varphi\right)^{-1/2}} a^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\Bigg)\mathrm{d}\varphi$$

$$= a^2\int\limits_0^{2\pi}\Bigg(-\cos\theta\Bigg|_{\theta=0}^{\theta=\arcsin\left(\cos^2\varphi+\frac{a^2}{b^2}\sin^2\varphi\right)^{-1/2}}\Bigg)\mathrm{d}\varphi$$

$$= a^2\int\limits_0^{2\pi}\Bigg(1 - \cos\arcsin\Big(\cos^2\varphi + \frac{a^2}{b^2}\sin^2\varphi\Big)^{-1/2}\Bigg)\mathrm{d}\varphi$$

$$= a^2\int\limits_0^{2\pi}\Bigg(1 - \sqrt{1 - \Big(\cos^2\varphi + \frac{a^2}{b^2}\sin^2\varphi\Big)^{-1}}\Bigg)\mathrm{d}\varphi$$

$$= a^2\int\limits_o^{2\pi}\Bigg(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{\cos^2\varphi + \dfrac{a^2}{b^2}\sin^2\varphi}}\Bigg)\mathrm{d}\varphi\,.$$

Ma questo è proprio l'integrale (1) che abbiamo già calcolato :

$$A = a^2\int\limits_o^{2\pi}\Bigg(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{\cos^2\varphi + \dfrac{a^2}{b^2}\sin^2\varphi}}\Bigg)\mathrm{d}\varphi = 4\,a^2\arcsin\frac{b}{a}\ .$$

4) : a) Poiché f e la funzione sin sono dispari, il loro prodotto g sarà pari. Perciò tutti i coefficienti di seni $b_k(g)$, $k \geq 1$, si annullano e per scrivere la serie di Fourier di g abbiamo da calcolare solo i coefficienti dei coseni $a_k(g)$, $k \geq 0$.

Troviamo subito

$$a_o(g) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} g(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin x\,\mathrm{d}x = b_1(f) = b_1\,.$$

Per il calcolo di

$$a_k(g) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} g(x)\cos(kx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin x\cos(kx)\,\mathrm{d}x\,, \quad k \geq 1$$

ci serve invece l'identità trigonometrica

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2}\ :$$

Si conosce dal liceo, ma ecco una verifica veloce basata sull'identità di Eulero.

L'identità di Eulero implica

$$\begin{aligned}
\sin\alpha\cos\beta &= \frac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{2i}\cdot\frac{e^{i\beta}+e^{-i\beta}}{2} \\
&= \frac{e^{i\alpha+i\beta}+e^{i\alpha-i\beta}-e^{-i\alpha+i\beta}-e^{-i\alpha-i\beta}}{4i} \\
&- \frac{1}{2}\left(\frac{e^{i(\alpha+\beta)}-e^{-i(\alpha+\beta)}}{2i}+\frac{e^{i(\alpha-\beta)}-e^{-i(\alpha-\beta)}}{2i}\right) \\
&= \frac{1}{2}\Big(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\Big)\,.
\end{aligned}$$

Risulta per ogni $k \geq 1$

$$\begin{aligned}
a_k(g) &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\Big(\sin(x+kx)+\sin(x-kx)\Big)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\Big(\sin\big((k+1)x\big)-\sin\big((k-1)x\big)\Big)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin\big((k+1)x\big)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin\big((k-1)x\big)\,\mathrm{d}x\right) \\
&= \frac{1}{2}\big(b_{k+1}(f)-b_{k-1}(f)\big)
\end{aligned}$$

dove $b_o(f)$ è considerato uguale a 0. Cosicché

$$a_k(g) = \begin{cases} \dfrac{b_2}{2} & \text{per } k=1 \\ \dfrac{b_{k+1}-b_{k-1}}{2} & \text{per } k \geq 2 \end{cases}, \qquad k \geq 1\,.$$

Concludiamo che la serie di Fourier (in forma reale) della funzione pari g è

$$\begin{aligned} &\frac{a_o(g)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(g)\cos(kx) \\ &= \frac{b_1}{2} + \frac{b_2}{2}\cos x + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{b_{k+1}-b_{k-1}}{2}\cos(kx)\,. \end{aligned}$$

b) Nel caso $f(x)=1$ per $x \in (0\,,\pi)$, poiché f è dispari, abbiamo anche $f(x)=-1$ per $x \in (-\pi\,,0)$ e $f(0)=0$. Perciò $g(x) = |\sin x|$ per ogni $x \in (-\pi\,,\pi)$.

Tenendo conto che in questo caso

$$b_k(f) = \frac{2}{\pi}\,\frac{1-(-1)^k}{k}\,, \qquad k \geq 1\,,$$

ed applicando il risultato del punto a) risulta che la serie di Fourier di $g(x) = |\sin x|$ è

$$\begin{aligned} &\frac{b_1(f)}{2} + \frac{b_2(f)}{2}\cos x + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{b_{k+1}(f)-b_{k-1}(f)}{2}\cos(kx) \\ &= \frac{2}{\pi} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\pi}\left(\frac{1-(-1)^{k+1}}{k+1} - \frac{1-(-1)^{k-1}}{k-1}\right)\cos(kx) \\ &= \frac{2}{\pi} - \frac{2}{\pi}\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1-(-1)^{k+1}}{k^2-1}\cos(kx) \\ &= \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=\geq 2 \text{ pari}} \frac{1}{k^2-1}\cos(kx)\,. \end{aligned}$$

Poiché la funzione $g(x) = |\sin x|$ è continua e regolare a tratti, la sua serie di Fourier converge uniformemente a g. Abbiamo quindi

$$\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=\geq 2 \text{ pari}} \frac{1}{k^2 - 1} \cos(kx) = |\sin x|\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,,$$

cioè

$$\sum_{k=\geq 2 \text{ pari}} \frac{1}{k^2 - 1} \cos(kx) = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} |\sin x|\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$