NOME: .... **MATRICOLA:** ....

Corso di Laurea in Fisica, A.A. 2014/2015
Calcolo 2, Esame scritto del 16.02.2015

1) a) Si trovi la soluzione generale dell'equazione differenziale

$$x^2 y'' - 2\,x\,y' + 2\,y = -\,x \tag{*}$$

in $\big(0\,,+\infty\big)$.

b) Si trovi la soluzione dell'equazione (*) che soddisfa la condizione iniziale

$$\begin{cases} y(1) = 0\,, \\ y'(1) = 0\,. \end{cases}$$

2) Si calcoli l'integrale doppio

$$\int\limits_{\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\leq 1} \sqrt[5]{1-\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

Suggerimento: È conveniente passare in coordinate polari generalizzati

$$\begin{matrix} x = 2\,\rho\cos\theta \\ y = 3\,\rho\sin\theta \end{matrix}\,, \qquad \rho \geq 0\,, 0 \leq \theta < 2\pi\,.$$

3) Si calcoli il volume del solido che si ottiene girando attorno all'asse z il semicardioide definito nel piano yz tramite

$$y^2 + z^2 \leq 3\sqrt{y^2+z^2} - 3\,z\,, \quad y \geq 0\,,$$

cioè del solido S descritto dalla disequazione (ottenuta sostituendo y nella disequazione precedente con $\sqrt{x^2+y^2}$)

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 3\sqrt{x^2+y^2+z^2} - 3\,z\,.$$

Suggerimento: È conveniente passare alle coordinate sferiche.

4) a) Si trovi la serie di Fourier della funzione continua f, periodica e di periodo 2π, definita su $\mathbb{R}$ tramite la formula

$$f(x) = \frac{\sin(22\,x)}{\sin x}\,, \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi\,;\, k \in \mathbb{Z}\}\,.$$

Suggerimento: Si può usare la formula di Eulero per la funzione sin e l'identità nota

$$u^n - v^n = (u-v)\big(u^{n-1} + u^{n-2}v + \ \dots\ + u\,v^{n-2} + v^{n-1}\big)$$

che vale per ogni $u\,, v \in \mathbb{C}$.

b) Usando l'identità di Parseval si calcoli l'integrale

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin^2(22\,x)}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x\,.$$

Soluzioni:

1) : a) L'equazione differenziale (*) è una equazione di Eulero. Per risolverla in $\big(0\,,+\infty\big)$ effettuiamo il cambiamento di variabile $x = e^t$.

Sia

$$z(t) = y(e^t) \text{ per } t \in \mathbb{R} \iff y(x) = z(\ln x) \text{ per } x > 0\,.$$

Allora

$$\begin{aligned} z(t) &= y(e^t)\,, \\ z'(t) &= y'(e^t)\,e^t\,, \\ z''(t) &= y''(e^t)\,e^{2t} + y'(t)\,e^t\,, \end{aligned}$$

quindi

$$\begin{aligned} y(e^t) &= z(t)\,, \\ y'(e^t) &= z'(t)\,e^{-t}\,, \\ y''(e^t) &= z''(t)\,e^{-2t} - y'(t)\,e^{-t} = \big(z''(t) - z'(t)\big)e^{-2t}\,, \end{aligned}$$

e l'equazione (*) $x^2 y'' - 2\,x\,y' + 2\,y = -\,x$ si riduce ad una equazione differenziale lineare a coefficienti costanti:

$$\begin{aligned} e^{2t}\big(z''(t) - z'(t)\big)e^{-2t} - 2\,e^t z'(t)\,e^{-t} + 2\,z(t) &= -\,e^t\,, \\ z''(t) - 3\,z'(t) + 2\,z(t) &= -\,e^t\,. \end{aligned}$$

La soluzione generale di questa equazione è

$$z(t) = c_1\,e^t + c_2\,e^{2\,t} + t\,e^t\ :$$

Risolviamo prima l'equazione omogenea $z'' - 3\,z' + 2\,z = 0$:
Il polinomio caratteristico $\lambda^2 - 3\,\lambda + 2$ ha i zeri $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 2$, perciò

$$e^t\,, \quad e^{2\,t}$$

sono due soluzioni linearmente indipendenti. Cosicché la soluzione generale dell'equazione omogenea è

$$z(t) = c_1\,e^t + c_2\,e^{2\,t}\,, \qquad c_1\,, c_2 \text{ costanti.}$$

Per trovare una soluzione particolare dell'equazione non omogenea possiamo usare **il metodo della variazione delle costanti** :
Cerchiamo una soluzione particolare sotto la forma

$$z(t) = c_1(t)\,e^t + c_2(t)\,e^{2t}\,.$$

Per avere

$$z'(t) = c_1(t)\,e^t + 2\,c_2(t)\,e^{2t}$$

dobbiamo richiedere

$$c_1'(t)\,e^t + c_2'(t)\,e^{2t} = 0\,. \tag{1}$$

Risulta

$$z''(t) = c_1'(t)\,e^t + c_1(t)\,e^t + 2\,c_2'(t)\,e^{2t} + 4\,c_2(t)\,e^{2t}$$

e tramite sostituzione in l'equazione non omogenea si ottiene

$$\begin{aligned} &c_1'(t)\,e^t + c_1(t)\,e^t + 2\,c_2'(t)\,e^{2t} + 4\,c_2(t)\,e^{2t} \\ &-3\big(c_1(t)\,e^t + 2\,c_2(t)\,e^{2t}\big) \\ &+2\left(c_1(t)\,e^t + c_2(t)\,e^{2t}\right) = -\,e^t\,, \end{aligned}$$

cioè

$$c_1'(t)\,e^t + 2\,c_2'(t)\,e^{2t} = -\,e^t\,. \tag{2}$$

Per trovare c_1' , c_2' dobbiamo quindi risolvere il sistema di equazioni lineari costituito da (1), (2). Sottraendo (1) da (2) risulta

$$c_2'(t)\,e^{2t} = -\,e^t \iff c_2'(t) = -\,e^{-t}$$

e sostituendo poi $c_2'(t) = -\,e^{-t}$ in (1) otteniamo

$$c_1'(t)\,e^t - e^{-t}e^{2t} = 0 \iff c_1'(t) = 1\,.$$

Per avere $c_1'(t) = 1$ e $c_2'(t) = -\,e^{-t}$ scegliamo

$$c_1(t) = t\,, \quad c_2(t) = e^{-t}$$

ed otteniamo la soluzione particolare

$$t\,e^t + e^{-t}e^{2t} = t\,e^t + e^t$$

dell'equazione diferenziale non omogenea. Ma siccome la funzione e^t è una soluzione dell'equazione omogenea,

$$\big(t\,e^t + e^t\big) - e^t = t\,e^t$$

è pure una soluzione particolare dell'equazione non omogenea.

Con **il metodo degli annichilatori** possiamo trovare più veloce una soluzione particolare dell'equazione non omogenea :

Poiché il termine noto dell'equazione non omogenea è $-\,e^t$ ed il coefficiente 1 dell'esponente t è un zero semplice del polinomio caratteristico dell'equazione omogenea, sappiamo che l'equazione non omogenea ha una soluzione della forma $c\,t\,e^t$. Per trovare il valore della costante c, sostituiamo $z(t) = c\,t\,e^t$ nell'equazione non omogenea, ottenendo

$$\begin{aligned} (c\,t\,e^t)'' - 3\,(c\,t\,e^t)' + 2\,c\,t\,e^t &= -\,e^t\,, \\ (2\,c\,e^t + c\,t\,e^t) - 3\,(c\,e^t + c\,t\,e^t) + 2\,c\,t\,e^t &= -\,e^t\,, \\ -\,c\,e^t &= -\,e^t\,, \\ c &= 1\,. \end{aligned}$$

Così ritroviamo la soluzione particolare $t\,e^t$ dell'equazione non omogenea.

Avendo ora la soluzione generale dell'equazione omogenea ed aver trovato la soluzione particolare $t\,e^t$ dell'equazione non omogenea, possiamo concludere che

$$z(t) = c_1\,e^t + c_2\,e^{2t} + t\,e^t\,, \qquad c_1\,, c_2 \text{ costanti}$$

è la soluzione generale dell'equazione differenziale

$$z''(t) - 3\,z'(t) + 2\,z(t) = -e^t\,.$$

Ora la soluzione generale dell'equazione differenziale (*) in $\big(0\,, +\infty\big)$ si ottiene dalla soluzione generale dell'equazione di cui sopra tramite il cambiamento di variabile $x = e^t \iff t = \ln x$:

$$y(x) = c_1\,x + c_2\,x^2 + x\ln x\,.$$

b) Poiché

$$y'(x) = c_1 + 2\,c_2\,x + 1 + \ln x\,,$$

abbiamo

$$y(1) = c_1 + c_2\,, \qquad y'(1) = c_1 + 2\,c_2 + 1\,.$$

Perciò la soluzione che soddisfa la condizione iniziale $y(1) = 0\,, y'(1) = 0$ si ottiene per le costanti $c_1\,, c_2$ soddisfacenti il sistema

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 + 2\,c_2 + 1 = 0 \end{cases}.$$

Si trovano $c_1 = 1$ e $c_2 = -1$, quindi la soluzione cercata è

$$y(x) = x - x^2 + x \ln x\,.$$

2) : Calcoleremo l'integrale

$$\int\limits_{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^{\alpha} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

dove $a\,, b > 0$ e $\alpha > -1$ sono costanti arbitrari. Nel nostro caso $a = 2$, $b = 3$ e $\alpha = \dfrac{1}{5}$.

Useremo il passaggio in coordinate polari generalizzati

$$\begin{cases} x = a\,\rho \cos\theta \\ y = b\,\rho \sin\theta \end{cases}, \qquad \rho \geq 0\,, 0 \leq \theta < 2\pi\,,$$

tramite il quale l'ellisse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leq 1$ si trasforma in il rettangolo

$$\left\{\begin{pmatrix} \rho \\ \theta \end{pmatrix} ;\, 0 \leq \rho \leq 1\,, 0 \leq \theta < 2\pi\right\}.$$

Poiché

$$\left|\det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \rho} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \rho} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix}\right| = \left|\det\begin{pmatrix} a\cos\theta & -a\,\rho\sin\theta \\ b\sin\theta & b\,\rho\cos\theta \end{pmatrix}\right| = ab\rho$$

e quindi

$$\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = ab\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,,$$

risulta

$$\int\limits_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leq 1} \left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)^{\alpha} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \int\limits_{\substack{0\leq\rho\leq 1\\ 0\leq\theta<2\pi}} (1-\rho^2)^{\alpha} ab\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta$$

$$= ab\int_0^1 (1-\rho^2)^{\alpha}\rho\left(\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\right)\mathrm{d}\rho = 2\pi ab\int_0^1 (1-\rho^2)^{\alpha}\rho\,\mathrm{d}\rho$$

$$= -\pi ab\int_0^1 (1-\rho^2)^{\alpha}\mathrm{d}\big(1-\rho^2\big) = -\frac{\pi ab}{\alpha+1}\big(1-\rho^2\big)^{\alpha+1}\Big|_{\rho=0}^{\rho=1}$$

$$= \frac{\pi ab}{\alpha+1}\,.$$

Nel nostro caso, per $a=2\,,b=3$ e $\alpha=\dfrac{1}{5}$ abbiamo

$$\int\limits_{\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\leq 1} \sqrt[5]{1-\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{6\pi}{\frac{1}{5}+1} = 5\pi\,.$$

3) : Per calcolare l'integrale triplo

$$\mathrm{Volume}\,(S) = \int\limits_S \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

ci conviene passare alle coordinate sferiche

$$\begin{cases} x=\rho\sin\theta\cos\varphi \\ y=\rho\sin\theta\sin\varphi \\ z=\rho\cos\theta \end{cases} \quad , \quad \rho\geq 0\,, 0\leq\theta\leq\pi\,, 0\leq\varphi<2\pi\,.$$

Il determinante funzionale del cambio di variabile è

$$\left|\begin{array}{ccc} \dfrac{\partial x}{\partial \rho} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \rho} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial z}{\partial \rho} & \dfrac{\partial z}{\partial \theta} & \dfrac{\partial z}{\partial \varphi} \end{array}\right| = \left|\begin{array}{ccc} \sin\theta\cos\varphi & \rho\cos\theta\cos\varphi & -\rho\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \rho\cos\theta\sin\varphi & \rho\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -\rho\sin\theta & 0 \end{array}\right|$$

$$\begin{aligned}
&= \rho^2(\sin\theta)\left|\begin{array}{ccc} \sin\theta\cos\varphi & \cos\theta\cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\sin\varphi & \cos\varphi \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{array}\right| \\
&= \rho^2(\sin\theta)\Bigg((\cos\theta)\left|\begin{array}{cc} \cos\theta\cos\varphi & -\sin\varphi \\ \cos\theta\sin\varphi & \cos\varphi \end{array}\right| + \\
&\qquad (\sin\theta)\left|\begin{array}{cc} \sin\theta\cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \cos\varphi \end{array}\right|\Bigg) \\
&= \rho^2(\sin\theta)\Big((\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2\Big) \\
&= \rho^2\sin\theta\,,
\end{aligned}$$

quindi

$$\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \rho^2(\sin\theta)\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\,.$$

Ora, poiché la disequazione $x^2 + y^2 + z^2 \leq 3\sqrt{x^2+y^2+z^2} - 3\,z$ che definisce il solido S significa per le coordinate sferiche

$$\rho^2 \leq 3\,\rho - 3\,\rho\cos\theta \iff 0 \leq \rho \leq 3 - 3\cos\theta\,,$$

abbiamo

$$\begin{aligned}
\text{Volume}\,(S) &= \int_0^\pi \mathrm{d}\theta \int_o^{3-3\cos\theta} \mathrm{d}\rho \int_0^{2\pi} \rho^2\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi \\
&= 2\,\pi \int_0^\pi \mathrm{d}\theta \int_o^{3-3\cos\theta} \rho^2\sin\theta\,\mathrm{d}\rho \\
&= 2\,\pi \int_0^\pi \left(\frac{\rho^3}{3} \Bigg|_{\rho=0}^{\rho=3-3\cos\theta} \right) \sin\theta\,\mathrm{d}\theta \\
&= 18\,\pi \int_0^\pi \big(1-\cos\theta\big)^3 \sin\theta\,\mathrm{d}\theta
\end{aligned}$$

$$= 18\pi \int_0^\pi \big(1-\cos\theta\big)^3 \mathrm{d}\big(1-\cos\theta\big)$$

$$= 18\pi \frac{\big(1-\cos\theta\big)^4}{4} \Bigg|_{\theta=0}^{\theta=\pi} = 18\pi \frac{2^4}{4}$$

$$= 72\pi\,.$$

4) **:** a) Ricordiamo l'identità di Eulero

$$e^{it} = \cos t + i\sin t\,, \qquad t \in \mathbb{R}\,.$$

Risultano :

$$e^{it} - e^{-it} = (\cos t + i\sin t) - (\cos t - i\sin t) = 2\,i\sin t\,,$$

$$\sin t = \frac{1}{2\,i}\big(e^{it} - e^{-it}\big)$$

e

$$e^{it} + e^{-it} = (\cos t + i\sin t) + (\cos t - i\sin t) = 2\cos t\,,$$

$$\cos t = \frac{1}{2}\big(e^{it} + e^{-it}\big)\,.$$

Di conseguenza

$$\sin(22x) = \frac{1}{2\,i}\big(e^{i22x} - e^{-i22x}\big) = \frac{1}{2\,i}\Big((e^{ix})^{22} - (e^{-ix})^{22}\Big).$$

Ma applicando

$$u^{22} - v^{22} = (u-v)\big(u^{21} + u^{20}v + u^{19}v^2 + \,...\, + u\,v^{20} + v^{21}\big)$$

con $u = e^{ix}$ e $v = e^{-ix}$ otteniamo

$$\begin{aligned}(e^{ix})^{22} - (e^{-ix})^{22} &= \big(e^{ix} - e^{-ix}\big)\Big((e^{ix})^{21} + (e^{ix})^{20}e^{-it} + (e^{ix})^{19}(e^{-ix})^2 \\ &\qquad + \,...\, + e^{ix}(e^{-ix})^{20} + (e^{-ix})^{21}\Big) \\ &= \big(e^{ix} - e^{-ix}\big)\Big(e^{i21x} + e^{i19x} + e^{i17x} + \,...\, + e^{-i19x} \\ &\qquad + e^{-i21x}\Big) \\ &= \big(e^{ix} - e^{-ix}\big) \sum_{\substack{-21\le n\le 21 \\ n \text{ dispari}}} e^{inx}\end{aligned}$$

e risulta

$$\sin(22\,x) = \frac{1}{2\,i}\big(e^{i\,x} - e^{-\,i\,x}\big) \sum_{\substack{-\,21\leq n\leq 21 \\ n\,\text{dispari}}} e^{i\,n\,x} = (\sin x) \sum_{\substack{-\,21\leq n\leq 21 \\ n\,\text{dispari}}} e^{i\,n\,x} \,.$$

Perciò la formula

$$f(x) = \frac{\sin(22\,x)}{\sin x}\,, \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi\,;\,k \in \mathbb{Z}\}$$

definisce una funzione continua $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, periodica e di periodo 2π, cioè il polinomio trigonometrico

$$f(x) = \sum_{\substack{-\,21\leq n\leq 21 \\ n\,\text{dispari}}} e^{i\,n\,x}\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,. \tag{3}$$

Per di più, (3) ci fornisce anche lo sviluppo di f in serie di Fourier complessa.

Il coefficiente $c_k(f)$ è uguale ad 1 se k è un intero dispari tra $-\,21$ e 21, altrimenti è uguale a 0, come si vede guardando (3). D'altro canto la formula consueta ci attesta i stessi valori :

Se $-\,21 \leq k \leq 21$ è dispari, allora per (3)

$$\begin{aligned}
c_k(f) &= \frac{1}{2\,\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,e^{-ikx}\mathrm{d}x = \frac{1}{2\,\pi}\sum_{\substack{-\,21\leq n\leq 21 \\ n\,\text{dispari}}} \int_0^{2\pi} e^{i\,(n-k)\,x}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\,\pi}\Bigg(\int_0^{2\pi}\mathrm{d}x + \sum_{\substack{-\,21\leq n\leq 21 \\ n\,\text{dispari} \\ n-k\neq 0}} \int_0^{2\pi} e^{i\,(n-k)\,x}\mathrm{d}x\Bigg) \\
&= \frac{1}{2\,\pi}\Bigg(2\,\pi + \sum_{\substack{-\,21\leq n\leq 21 \\ n\,\text{dispari} \\ n\neq k}} \underbrace{\frac{e^{i\,(n-k)\,x}}{i\,(n-k)}\Bigg|_{x\,=\,0}^{x\,=\,2\pi}}_{=\,0}\Bigg) \\
&= 0\,,
\end{aligned}$$

mentre nel caso contrario

$$c_k(f) = \frac{1}{2\,\pi}\sum_{\substack{-\,21\leq n\leq 21 \\ n\,\text{dispari}}} \int_0^{2\pi} e^{i\,(n-k)\,x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2\,\pi}\sum_{\substack{-\,21\leq n\leq 21 \\ n\,\text{dispari}}} \underbrace{\frac{e^{i\,(n-k)\,x}}{i\,(n-k)}\Bigg|_{x\,=\,0}^{x\,=\,2\pi}}_{=\,0} = 0\,.$$

Osservando che

$$\sum_{\substack{-21\le n\le 21\\ n\,\text{dispari}}} e^{inx} = \sum_{\substack{1\le n\le 21\\ n\,\text{dispari}}} e^{inx} + \sum_{\substack{-21\le n\le -1\\ n\,\text{dispari}}} e^{inx} = \sum_{\substack{1\le n\le 21\\ n\,\text{dispari}}} \big(e^{inx} + e^{-inx}\big)$$
$$= \sum_{\substack{1\le n\le 21\\ n\,\text{dispari}}} 2\cos(n\,x)$$

(3) implica lo sviluppo di f in serie di Fourier reale :

$$f(x) = \sum_{\substack{1\le n\le 21\\ n\,\text{dispari}}} 2\cos(n\,x)\,, \qquad x\in\mathbb{R}\,. \tag{4}$$

I coefficienti $b_k(f)$ si annullano tutti, mentre $a_k(f) = 2$ se k è un numero naturale dispari tra 1 e 21 e $a_k(f) = 0$ altrimenti.

b) L'identità di Parseval nella scrittura complessa ci rende

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2(22\,x)}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\mathrm{d}x = 2\,\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k(f)|^2$$
$$= 2\,\pi \sum_{\substack{-21\le k\le 21\\ k\,\text{dispari}}} |c_k(f)|^2 = 2\,\pi \sum_{j=-10}^{11} |\underbrace{c_{2j-1}(f)}_{=1}|^2$$
$$= 44\,\pi\,.$$

Se applichiamo l'identità di Parseval nella scrittura reale, otteniamo lo stesso risultato :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2(22\,x)}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$$
$$= \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\mathrm{d}x = \pi\bigg(\frac{|a_o(f)|^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\Big(|a_k(k)|^2 + |b_k(k)|^2\Big)\bigg)$$
$$= \pi \sum_{\substack{1\le k\le 21\\ k\,\text{dispari}}} |a_k(f)|^2 = \pi \sum_{j=1}^{11} \Big|\underbrace{a_{2j-1}(f)}_{=2}\Big|^2 = 44\,\pi\,.$$

Oservando che la funzione f è pari, risulta

$$\int_0^\pi \frac{\sin^2(22\,x)}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2(22\,x)}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = 22\,\pi\,.$$

Osservazione. Con il metodo della soluzione del compito precedente si ottiene per ogni numero naturale $m \geq 1$ ed $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi\,;\, k \in \mathbb{Z}\}$

$$\frac{\sin(m\,x)}{\sin x} = \begin{cases} 2\sum\limits_{j=1}^{\frac{m}{2}} \cos\big((2\,j-1)\,x\big) & \text{per } m \text{ pari,} \\ 1 + 2\sum\limits_{j=1}^{\frac{m-1}{2}} \cos\big((2\,j)\,x\big) & \text{per } m \text{ dispari.} \end{cases}$$

Usando l'identità di Parseval si può dedurre anche l'uguaglianza

$$\int_0^\pi \frac{\sin^2(m\,x)}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = m\,\pi\,,$$

valida sia per m pari che per m dispari.