NOME: .... **MATRICOLA:** ....

Corso di Laurea in Fisica, A.A. 2015/2016
Calcolo 1, Esame scritto del 17.02.2016

1) Data la funzione

$$f(x) = \sqrt{|x|} + \ln|x-1|\,,$$

a) determinare il dominio (massimale) di f ;

b) trovare tutti gli asintoti di f ;

c) trovare tutti i massimi e minimi locali di f ;

d) studiare la convessità di f ;

e) tracciare un grafico qualitativo per f .

2) Discutere la convergenza della serie

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right)^p \ln\frac{k-1}{k+1}$$

al variare del parametro reale $p \in \mathbb{R}$.

3) a) Dire se converge o no l'integrale improprio

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \sin\Big(x + \frac{1}{x}\Big)\, \mathrm{d}x\,.$$

b) Dire se converge o no l'integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \sin\Big(x + \frac{1}{x}\Big)\, \mathrm{d}x\,.$$

Suggerimento: si ricorda la formula di addizione del seno :

$$\sin(x+y) = (\sin x)(\cos y) + (\cos x)(\sin y)\,.$$

4) Sia data la funzione

$$f(x\,,y) = \sqrt{3}\cos x + (\sin x)\cos\Big(y - \frac{\pi}{2}\Big)\,, \qquad (x\,,y) \in \mathbb{R}^2.$$

a) Trovare i massimi e minimi locali della restrizione di f al rettangolo aperto $(-\pi\,,\pi)^2$.

b) Trovare i massimi e minimi globali della restrizione di f al rettangolo chiuso $[-\pi\,,\pi]^2$.

5) Calcolare la lunghezza dell'arco definito nel piano tramite le relazioni

$$x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2}}\,, \quad x \geq 0\,, y \geq 0\,.$$

Soluzioni:

1) : a) $f(x)$ è definito per ogni $x \in \mathbb{R}$ per quale $\ln|x-1|$ ha senso in $\mathbb{R}$, cioè per $x \neq 1$. Perciò il dominio di f è $\mathbb{R} \setminus \{1\} = \big(-\infty, 1\big) \cup \big(1, +\infty\big)$.

b) Per vedere se f ha asintoto verticale in $x = 1$, calcoliamo i limiti

$$\lim_{x \to 1-0} f(x) = \lim_{1 > x \to 1} \big(\sqrt{|x|} + \ln|x-1|\big) = 1 + \ln 0 = -\infty\,,$$
$$\lim_{x \to 1+0} f(x) = \lim_{1 < x \to 1} \big(\sqrt{|x|} + \ln|x-1|\big) = 1 + \ln 0 = -\infty\,.$$

Risulta che la retta $x = 1$ è un asintoto verticale di f sia da destra che da sinistra.

La prima condizione per l'esistenza di un asintoto obliquo per $x \to +\infty$ o per $x \to -\infty$ è l'esistenza del limite finito

$$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\sqrt{|x|} + \ln|x-1|}{x} = 0\,.$$

La seconda condizione perché esisti un asintoto obliquo per $x \to +\infty$ o per $x \to -\infty$, necessariamente di forma

$$y = mx + n = 0x + n = n\,,$$

è l'esistenza del limite finito

$$n = \lim_{x \to \pm\infty} \big(f(x) - mx\big) = \lim_{x \to \pm\infty} \big(\sqrt{|x|} + \ln|x-1|\big)\,.$$

Ma siccome

$$\lim_{x \to \pm\infty} \big(\sqrt{|x|} + \underbrace{\ln|x-1|}_{>0 \text{ per } |x|>2}\big) = +\infty\,,$$

non esistono asintoti obliqui.

c) La funzione f è continua sull'intero dominio $\big(-\infty, 1\big) \cup \big(1, +\infty\big)$. Poi, siccome

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x} + \ln(1-x) & \text{se } x < 0\,, \\ 0 & \text{se } x = 0\,, \\ \sqrt{x} + \ln(1-x) & \text{se } 0 < x < 1\,, \\ \sqrt{x} + \ln(x-1) & \text{se } x > 1\,, \end{cases}$$

f è derivabile in $\big(-\infty\,,0\big)\cup\big(0\,,1\big)\cup\big(1\,,+\infty\big)$.

In $\big(-\infty\,,0\big)$:

$$f'(x) = -\,\frac{1}{2\sqrt{-x}} - \frac{1}{1-x} < 0\,,$$

perciò f è strettamente decrescente, da $+\infty$ a 0. In $x=0$ la derivata sinistra è

$$\begin{aligned} f'_s(0) &= \lim_{0>x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{0>x\to 0}\frac{f(x)}{x} \\ &= \lim_{0>x\to 0}\frac{\sqrt{-x}+\ln(1-x)}{x} = \lim_{0>x\to 0}\frac{\sqrt{|x|}+\ln(1+|x|)}{-|x|} \\ &= \lim_{0>x\to 0}\Big(-\frac{1}{\sqrt{|x|}}\Big) - \lim_{0>x\to 0}\frac{\ln(1+|x|)}{|x|} = -\infty - 1 \\ &= -\,\infty\,, \end{aligned}$$

ossia il grafico di f ha nel punto $(0\,,0)$ tangente verticale a sinistra.

In $\big(0\,,1\big)$:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{1-x} = \frac{1-x-2\sqrt{x}}{2\,(1-x)\sqrt{x}} = -\,\frac{x+2\sqrt{x}-1}{2\,(1-x)\sqrt{x}}\,.$$

I zeri della derivata soddisfano l'equazione di secondo grado in $\sqrt{x}$

$$\big(\sqrt{x}\big)^2 + 2\sqrt{x} - 1 = 0\,.$$

Le radici dell'equazione $u^2+2\,u-1=0$ sono $-1\pm\sqrt{2}$, perciò

$$u^2+2\,u-1\begin{cases} >0 & \text{se } u<-1-\sqrt{2}\,,\\ <0 & \text{se } -1-\sqrt{2}<u<-1+\sqrt{2}\,,\\ >0 & \text{se } u>-1+\sqrt{2}\,. \end{cases}$$

In particolare

$$u^2+2\,u-1\begin{cases} <0 & \text{se } 0<u<-1+\sqrt{2}\,,\\ >0 & \text{se } -1+\sqrt{2}<u<1\,, \end{cases}$$

e così

$$\big(\sqrt{x}\big)^2+2\sqrt{x}-1\begin{cases} <0 & \text{se } 0<x<(-1+\sqrt{2})^2 = 3-2\sqrt{2}\,,\\ >0 & \text{se } 3-2\sqrt{2}<x<1\,. \end{cases}$$

Risulta che $f'(x) > 0$ per $0 < x < 3 - 2\sqrt{2}$ e quinsi f è strettamente cerscente in $\big(0\,, 3 - 2\sqrt{2}\big)$, poi $f'(x) < 0$ per $3 - 2\sqrt{2} < x < 1$ e quindi f è strettamente decrescente in $\big(3 - 2\sqrt{2}\,, 1\big)$. Il punto $3 - 2\sqrt{2} = 0,17157...$ è un punto di massimo locale.

Siccome tra $3 - 2\sqrt{2}$ e 1 il grafico di f scende da $f(3 - 2\sqrt{2}) > 0$ a $-\infty$, f si annulla esattamente in un punto $3 - 2\sqrt{2} < a < 1$.

Finalmente, in $x = 0$ la derivata destra è

$$
\begin{aligned}
f'_s(0) &= \lim_{0<x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{0<x\to 0} \frac{f(x)}{x} \\
&= \lim_{0<x\to 0} \frac{\sqrt{x} + \ln(1-x)}{x} \\
&= \lim_{0<x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x}} - \lim_{0<x\to 0} \frac{\ln(1-x)}{-x} = +\infty - 1 \\
&= +\infty\,,
\end{aligned}
$$

ossia il grafico di f ha nel punto $(0\,,0)$ tangente verticale anche a destra. 0 è quindi un punto di cuspide di f.

In $\big(1\,,+\infty\big)$:

$$
f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{x-1} > 0\,,
$$

perciò f è strettamente crescente, da $-\infty$ a $+\infty$. In particolare f ha a destra di 1 un solo zero b. Siccome

$$
f\Big(1 + \frac{1}{e}\Big) = \underbrace{\sqrt{1 + \frac{1}{e}}}_{>1} + \underbrace{\ln\frac{1}{e}}_{=-1} > 0\,,
$$

abbiamo $1 < b < 1 + \dfrac{1}{e} = 1,367879...$

d) Per la convessità di f guardiamo il segno della seconda derivata :

In $\big(-\infty\,,0\big)$

$$
f''(x) = \Big(-\frac{1}{2\sqrt{-x}} - \frac{1}{1-x}\Big)' = -\frac{1}{4\,(-x)^{3/2}} - \frac{1}{(1-x)^2} < 0\,.
$$

In $\big(0\,,1\big)$

$$f''(x) = \Big(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{1-x}\Big)' = -\,\frac{1}{4\,x^{3/2}} - \frac{1}{(1-x)^2} < 0\,.$$

In $\big(1\,,+\infty\big)$

$$f''(x) = \Big(\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{x-1}\Big)' = -\,\frac{1}{4\,x^{3/2}} - \frac{1}{(x-1)^2} < 0\,.$$

Di conseguenza f è ovunque concava. In particolare non esistono punti di flesso.

e) Riportiamo il comportamento di $f'\,, f''$ e f nella seguente tabella :

x	$-\infty$		0		$3-2\sqrt{2}$		a		1		b		$+\infty$
f'	$-$		$-\infty \mid +\infty$	$+$	0		$-$		$\mid$		$+$		
f''		$-$	$\mid$			$-$			$\mid$		$-$		
f	$+\infty$	↘	0	↗	max	↘	0	↘	$-\infty \mid -\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

Usando le informazioni di cui sopra, tracciamo ora il grafico di f :

Il grafico di f scende da $+\infty$ fino al punto di cuspide $(0\,,0)$.

Poi sale fino al punto di minimo locale $\big(3-2\sqrt{2}\,, f(3-2\sqrt{2}\,)\big)$, nel quale ha tangente orizzontale. Da questo punto comincia a scendere, attraversa l'asse delle ascisse in un $0 < a < 1$ e si precipita a $-\infty$ a sinistra dell'asintoto verticale $x = 1$.

Nell'ultimo tratto sale da $-\infty$ a destra dell'asintoto verticale $x = 1$, attraversa l'asse delle ascisse in un $1 < b < 1 + \dfrac{1}{e}$ e va a $+\infty$ in $+\infty$.

Durante l'intero percorso il grafico è concavo.

2) : Siccome, per ogni $k \geq 2$,

$$0 < \frac{k-1}{k+1} < 1 \Longrightarrow \ln\frac{k-1}{k+1} < 0\,,$$

si tratta di una serie a termini strettamente negativi. Per convenienza la sostituiamo con la serie opposta

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \big(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\big)^p \underbrace{\ln\frac{k+1}{k-1}}_{=\,-\,\ln\frac{k-1}{k+1}} \qquad (1)$$

che è a termini positivi e converge per i stessi valori del parametro p che la serie originale.

Cerchiamo di comprendere il comportamento asintotico del termine

$$\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right)^p \ln\frac{k+1}{k-1}\,.$$

Anzitutto

$$\sqrt{k+1}-\sqrt{k} = \frac{\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right)\left(\sqrt{k+1}+\sqrt{k}\right)}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$$

implica

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty}\sqrt{k}\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right) &= \lim_{k\to\infty}\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}\\ &= \lim_{k\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\dfrac{k+1}{k}}+1} = \frac{1}{2}\,.\end{aligned}$$

Poi, siccome

$$\ln\frac{k+1}{k-1} = \ln\left(1+\frac{2}{k-1}\right),$$

usando il limite noto

$$\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t} = 1$$

deduciamo anche

$$\lim_{k\to\infty} k\ln\frac{k+1}{k-1} = \lim_{k\to\infty}\frac{2\,k}{k-1}\cdot\frac{\ln\left(1+\dfrac{2}{k-1}\right)}{\dfrac{2}{k-1}} = 2\,.$$

Di conseguenza

$$\lim_{k\to\infty} k\,(\sqrt{k}\,)^p\left(\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right)^p\ln\frac{k+1}{k-1}\right) = \frac{2}{2^p} = 2^{1-p},$$

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right)^p\ln\dfrac{k+1}{k-1}}{\dfrac{1}{k^{1+\frac{p}{2}}}} = 2^{1-p}\left\{\begin{array}{l} >0\\ <+\infty\end{array}\right.\,.$$

Per il criterio del confronto asintotico risulta che la serie (1) converge per i stessi $p\in\mathbb{R}$ per quali converge la serie

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^{1+\frac{p}{2}}}\,,$$

cioè esattamente per

$$1+\frac{p}{2} > 1 \Longleftrightarrow p > 0\,.$$

3) : a) Anzitutto osserviamo che la funzione integranda non è positiva, perciò il criterio del confronto ci può servire solo per verificare una eventuale convergenza assoluta!

Ma siccome $\left|\frac{1}{\sqrt{x}}\sin\Big(x+\frac{1}{x}\Big)\right| \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$ e l'integrale improprio

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \lim_{0<\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \lim_{0<\varepsilon\to 0} 2\sqrt{x}\,\Bigg|_{x=\varepsilon}^{x=1} = 2$$

converge, risulta la convergenza assoluta dell'integrale improprio

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\sin\Big(x+\frac{1}{x}\Big)\,\mathrm{d}x\,.$$

b) Per decidere sulla convergenza dell'integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\sin\Big(x+\frac{1}{x}\Big)\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty}\int_1^b \frac{1}{\sqrt{x}}\sin\Big(x+\frac{1}{x}\Big)$$

il criterio del confronto non può essere applicata (almeno direttamente), perché la disuguaglianza $\left|\frac{1}{\sqrt{x}}\sin\Big(x+\frac{1}{x}\Big)\right| \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$ e la divergenza

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty}\int_1^b \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty} 2\sqrt{x}\,\Bigg|_{x=1}^{x=b} = +\infty$$

non portano a nessuna conclusione.

Cerchiamo perciò di trasformare l'integrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\sin\Big(x+\frac{1}{x}\Big)\mathrm{d}x$ in una combinazione di integrali a quali si possa applicare il criterio del confronto!

Per la formula di addizione del seno abbiamo

$$\sin\Big(x+\frac{1}{x}\Big) = (\sin x)\cos\frac{1}{x} + (\cos x)\sin\frac{1}{x}$$

e risulta

$$\begin{aligned} &\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\sin\Big(x+\frac{1}{x}\Big)\mathrm{d}x \\ &= \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}(\sin x)\cos\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x + \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}(\cos x)\sin\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\,. \end{aligned} \tag{2}$$

Ora il secondo integrale alla parte destra di (2) converge assolutamente. Infatti, siccome

$$\left|\frac{1}{\sqrt{x}}(\cos x)\sin\frac{1}{x}\right| = \left|\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}(\cos x)\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\right| \leq \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$$

e l'integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty}\int_1^{b} \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty}\Big(-\frac{2}{x^{\frac{1}{2}}}\Big)\Big|_{x=1}^{x=b} = 2$$

converge, possiamo applicare il criterio del confronto.

Al primo integrale alla parte destra di (2) il criterio del confronto non ci serve direttamente. Osserviamo però che tramite la derivazione dei fattori $\frac{1}{\sqrt{x}}$ e $\cos\frac{1}{x}$ appaiono fattori della forma $\frac{1}{x^\alpha}$ con $\alpha > 0$ che migliorano al convergenza all'infinito. Perciò tramite integrazione per parti "produciamo" tali fattori : per ogni $b > 1$ abbiamo

$$\int_1^{b} \frac{1}{\sqrt{x}}(\sin x)\cos\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \int_1^{b} \frac{1}{\sqrt{x}}\cos\frac{1}{x}\,\mathrm{d}(-\cos x)$$

$$= -\frac{\cos x}{\sqrt{x}}\cos\frac{1}{x}\Big|_{x=1}^{x=b} + \int_1^{b}(\cos x)\Big(\frac{1}{\sqrt{x}}\cos\frac{1}{x}\Big)'\mathrm{d}x$$

$$= (\cos 1)^2 - \frac{\cos b}{\sqrt{b}} \cos\frac{1}{b} + \int\limits_1^b \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\Big(-\frac{\cos x}{2}\cos\frac{1}{x} + \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}\Big)\mathrm{d}x$$

Inoltre

$$\lim_{b\to+\infty}\Big((\cos 1)^2 - \frac{\cos b}{\sqrt{b}}\cos\frac{1}{b}\Big) = (\cos 1)^2$$

e l'integrale improprio

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\Big(-\frac{\cos x}{2}\cos\frac{1}{x} + \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}\Big)\mathrm{d}x$$

converge assolutamente perché

$$\left|\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\Big(-\frac{\cos x}{2}\cos\frac{1}{x} + \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}\Big)\right| \leq \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} \text{ per } x \geq 1$$

e l'inegrale improprio $\int\limits_1^{+\infty}\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x$ converge. Risulta la convergenza (non necessariamente assoluta) dell'integrale improprio

$$\int\limits_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}(\sin x)\cos\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_1^{b}\frac{1}{\sqrt{x}}(\sin x)\cos\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

$$= (\cos 1)^2 + \int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\Big(-\frac{\cos x}{2}\cos\frac{1}{x} + \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}\Big)\mathrm{d}x$$

Per (2) concludiamo che l'integrale improprio $\int\limits_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}\sin\Big(x+\frac{1}{x}\Big)\mathrm{d}x$ converge semplicemente.

Commento 1.

Studiamo la convergenza dell'integrale improprio

$$\int\limits_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\sin\Big(x+\frac{1}{x}\Big)\,\mathrm{d}x = \lim_{0<\varepsilon\to 0}\int\limits_\varepsilon^1 \frac{1}{x^\alpha}\sin\Big(x+\frac{1}{x}\Big)\,\mathrm{d}x$$

dove α è un parametro reale.

Si vede subito che quest'integrale converge assolutamente per $\alpha < 1$: siccome $\left| \dfrac{1}{x^\alpha} \sin\Big(x + \dfrac{1}{x}\Big) \right| \leq \dfrac{1}{x^\alpha}$, si può usare confronto con $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\, \mathrm{d}x$.

Ma che accade per $\alpha \geq 1$?

Per la formula di addizione del seno abbiamo

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} \sin\Big(x + \frac{1}{x}\Big)\, \mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} (\sin x) \cos\frac{1}{x}\, \mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} (\cos x) \sin\frac{1}{x}\, \mathrm{d}x\,. \end{aligned} \tag{3}$$

Il primo integrale alla parte destra di (3) converge assolutamente per

$$\alpha - 1 < 1 \Longleftrightarrow \alpha < 2$$

perché

$$\left| \frac{1}{x^\alpha} (\sin x) \cos\frac{1}{x} \right| = \left| \frac{1}{x^{\alpha-1}}\, \frac{\sin x}{x}\, \cos\frac{1}{x} \right| \leq \frac{1}{x^{\alpha-1}}$$

e si può applicare il criterio del confronto.

Il secondo integrale alla parte destra di (3) lo trasformiamo tramite integrazione per parti : per ogni $0 < \varepsilon < 1$ abbiamo

$$\begin{aligned} &\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^\alpha} (\cos x) \sin\frac{1}{x}\, \mathrm{d}x = \int_\varepsilon^1 \frac{\cos x}{x^{\alpha-2}}\, \mathrm{d}\cos\frac{1}{x} \\ &= \frac{\cos x}{x^{\alpha-2}}\, \cos\frac{1}{x} \Bigg|_{x=\varepsilon}^{x=1} - \int_\varepsilon^1 \Big(\cos\frac{1}{x}\Big) \Big(\frac{\cos x}{x^{\alpha-2}}\Big)' \mathrm{d}x \\ &= (\cos 1)^2 - \varepsilon^{2-\alpha} (\cos\varepsilon) \cos\frac{1}{\varepsilon} - \int_\varepsilon^1 \Big(\cos\frac{1}{x}\Big) \frac{(2-\alpha)\cos x - x \sin x}{x^{\alpha-1}}\, \mathrm{d}x \end{aligned}$$

Per $2 - \alpha > 0 \Longleftrightarrow \alpha < 2 \Longleftrightarrow \alpha - 1 < 1$ abbiamo

$$\lim_{0<\varepsilon\to 0} \Big((\cos 1)^2 - \varepsilon^{2-\alpha} (\cos\varepsilon) \cos\frac{1}{\varepsilon} \Big) = (\cos 1)^2$$

e la convergenza assoluta dell'integrale improprio

$$\int_0^1 \left(\cos\frac{1}{x}\right)\frac{(2-\alpha)\cos x - x\sin x}{x^{\alpha-1}}\,\mathrm{d}x$$

perché

$$\left|\left(\cos\frac{1}{x}\right)\frac{(2-\alpha)\cos x - x\sin x}{x^{\alpha-1}}\right| \leq \frac{3-\alpha}{x^{\alpha-1}} \text{ per } 0 < x \leq 1\,.$$

Risulta la convergenza semplice dell'integrale impropriio

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}(\cos x)\sin\frac{1}{x}\,\mathrm{d} = \lim_{0<\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^\alpha}(\cos x)\sin\frac{1}{x}\,\mathrm{d}$$

$$= (\cos 1)^2 - \int_0^1 \left(\cos\frac{1}{x}\right)\frac{(2-\alpha)\cos x - x\sin x}{x^{\alpha-1}}\,\mathrm{d}x\,.$$

Per (3) concludiamo che l'integrale improprio $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$ converge semplicemente anche per $1 \leq \alpha < 2$.

Riassunto finale :

> L'integrale improprio
>
> $$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$$
>
> converge assolutamente per $\alpha < 1$
> e converge semplicemente per $1 \leq \alpha < 2$.

Commento 2.

Studiamo adesso la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\beta}\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty}\int_1^b \frac{1}{x^\beta}\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$$

dove β è un parametro reale.

Si può ragionare similmente come l'abbiamo fatto nella soluzione del punto b) dell'esercizio 3), ma qui riduciamo la discussione dell'integrale improprio di cui sopra alla discussione dell'integrale nel Comento 1.

Infatti, tramite la sostituzione

$$x = \frac{1}{y}\,, \quad \mathrm{d}x = -\frac{1}{y^2}\,\mathrm{d}x$$

si ottiene

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\beta} \sin\Big(x + \frac{1}{x}\Big)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{y^{2-\beta}} \sin\Big(\frac{1}{y} + y\Big)\,\mathrm{d}y\,.$$

Sapendo che l'integrale alla parte destra converge assolutamente per

$$2 - \beta < 1 \Longleftrightarrow \beta > 1$$

e converge ancora semplicemente per

$$1 \leq 2 - \beta < 2 \Longleftrightarrow 0 < \beta \leq 1$$

deduciamo :

L'integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\beta} \sin\Big(x + \frac{1}{x}\Big)\,\mathrm{d}x$$

converge assolutamente per $\beta > 1$

e converge semplicemente per $0 < \beta \leq 1$.

Commento 3.

Consideriamo finalmente l'integrale improprio sia in 0 che all'infinito

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} \sin\Big(x + \frac{1}{x}\Big)\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} \sin\Big(x + \frac{1}{x}\Big)\mathrm{d}x + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} \sin\Big(x + \frac{1}{x}\Big)\mathrm{d}x$$

$$= \lim_{\substack{0<\varepsilon\to 0\\ b\to+\infty}} \int\limits_{\varepsilon}^{b} \frac{1}{x^\alpha}\sin\Big(x+\frac{1}{x}\Big)\,\mathrm{d}x$$

dove α è un parametro reale. Raccogliendo i risultati dai Commenti 1 e 2 deduciamo :

> L'integrale improprio
> $$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\sin\Big(x+\frac{1}{x}\Big)\,\mathrm{d}x$$
> converge semplicemente per ogni $0<\alpha<2$.

4) : a) I massimi e minimi locali di f sono *punti stazionari*, cioè annullano le derivate parziali di

$$f(x,y)=\sqrt{3}\cos x+(\sin x)\cos\Big(y-\frac{\pi}{2}\Big).$$

Per trovarli, calcoliamo le derivate parziali di f :

$$\frac{\partial f}{\partial x}=-\sqrt{3}\sin x+(\cos x)\cos\Big(y-\frac{\pi}{2}\Big),$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}=-(\sin x)\sin\Big(y-\frac{\pi}{2}\Big).$$

Risulta che i punti stazionari di f sono le soluzioni del sistema di equazioni

$$\begin{cases} -\sqrt{3}\sin x+(\cos x)\cos\Big(y-\dfrac{\pi}{2}\Big)=0\,,\\ -(\sin x)\sin\Big(y-\dfrac{\pi}{2}\Big)=0\,. \end{cases} \tag{4}$$

Dalla seconda equazione si ottiene

$$\sin x=0 \ \text{ oppure } \ \sin\Big(y-\frac{\pi}{2}\Big)=0\,.$$

Caso $\sin x=0$**:**

Nel rettangolo aperto $(-\pi\,,\pi)^2$ abbiamo $\sin x=0$ solo se $x=0$. Allora dalla prima equazione del sistema (4) otteniamo

$\cos\Big(y - \dfrac{\pi}{2}\Big) = 0 \Longleftrightarrow y - \dfrac{\pi}{2} = (2\,k - 1)\,\dfrac{\pi}{2}\,,$ cioè $y = k\,\pi$ per un $k \in \mathbb{Z}\,.$

Ma il solo punto di forma $\begin{pmatrix} 0 \\ k\,\pi \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{Z}\,$, contenuto nel rettangolo $(-\pi\ ,\pi)^2$, è $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Perciò questo è il solo punto stazionario di f in $(-\pi\,,\pi)^2$ che soddisfa $\sin x = 0\,.$

Per stabilire se questo punto è un punto di massimo o minimo locale di f, calcoliamo le derivate parziali di secondo ordine :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= -\sqrt{3}\cos x - (\sin x)\cos\Big(y - \frac{\pi}{2}\Big)\,, \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= -(\cos x)\sin\Big(y - \frac{\pi}{2}\Big)\,, \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= -(\sin x)\cos\Big(y - \frac{\pi}{2}\Big)\,.
\end{aligned} \tag{5}$$

Perciò nel punto $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ le derivate parziali di secondo ordine sono

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = -\sqrt{3}\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = 1\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = 0$$

e quindi la matrice hessiana è

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Siccome $\det H_f(0,0) = -1 < 0\,$, la matrice $H_f(0,0)$ ha due autovalori non zeri e di segni opposti. Di conseguenza $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ è un punto sella di f.

Caso $\sin\Big(y - \dfrac{\pi}{2}\Big) = 0$:

Risulta che $y - \dfrac{\pi}{2} = k'\pi\,$, cioè $y = k'\pi + \dfrac{\pi}{2}$ per un $k' \in \mathbb{Z}\,$. Questo può accadere nel rettangolo aperto $(-\pi\,,\pi)^2$ solo per $k' = 0$ e $k' = -1\,$, cioè per $y = \pm\dfrac{\pi}{2}\,$. Sostituendo nella prima equazione del sistema (4) otteniamo :

Per $y = \dfrac{\pi}{2}$ **(primo sottocaso) :** $-\sqrt{3}\sin x + \cos x = 0\,$, cioè

$$\operatorname{tg} x = \frac{1}{\sqrt{3}} \Longleftrightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{6} \text{ per un } k \in \mathbb{Z}\,.$$

Ma il punto $\begin{pmatrix} k\pi + \pi/6 \\ \pi/2 \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{Z}$ è contenuto nel rettangolo $(-\pi\,,\pi)^2$ solo per $k = 0$ e $k = -1$. Perciò $\begin{pmatrix} \pi/6 \\ \pi/2 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} -5\pi/6 \\ \pi/2 \end{pmatrix}$ sono i soli punti stazionari di f in $(-\pi\,,\pi)^2$ che soddisfano $y = \dfrac{\pi}{2}$.

Da (5) otteniamo

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Big(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\Big) = -2\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\Big(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\Big) = 0\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\Big(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\Big) = -\frac{1}{2}\,,$$

e

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Big(-\frac{5\pi}{6},\frac{\pi}{2}\Big) = 2\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\Big(-\frac{5\pi}{6},\frac{\pi}{2}\Big) = 0\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\Big(-\frac{5\pi}{6},\frac{\pi}{2}\Big) = \frac{1}{2}$$

e risultano le hessiane

$$H_f\Big(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\Big) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}, \quad H_f\Big(-\frac{5\pi}{6},\frac{\pi}{2}\Big) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Siccome $\det H_f\Big(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{2}\Big) = 1 > 0$, la matrice hessiana $H_f\Big(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{2}\Big)$ ha due autovalori non zeri dello stesso segno. Poi, siccome la traccia della hessiana è < 0, gli autovalori sono strettamente negativi. Risulta che $\begin{pmatrix} \pi/6 \\ \pi/2 \end{pmatrix}$ è un punto di massimo locale.

Similmente, siccome $\det H_f\Big(-\dfrac{5\pi}{6},\dfrac{\pi}{2}\Big) = 1 > 0$, anche $H_f\Big(-\dfrac{5\pi}{6},\dfrac{\pi}{2}\Big)$ ha due autovalori non zeri dello stesso segno. Ma, siccome la traccia di $H_f\Big(-\dfrac{5\pi}{6},\dfrac{\pi}{2}\Big)$ è > 0, questi autovalori sono strettamente positivi e risulta che $\begin{pmatrix} -5\pi/6 \\ \pi/2 \end{pmatrix}$ è un punto di minimo locale.

Per $y = -\dfrac{\pi}{2}$ (secondo sottocaso) : $-\sqrt{3}\sin x - \cos x = 0$, cioè

$$\operatorname{tg} x = -\frac{1}{\sqrt{3}} \Longleftrightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{6} \text{ per un } k \in \mathbb{Z}\,.$$

Ma il punto $\begin{pmatrix} k\pi - \pi/6 \\ -\pi/2 \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{Z}$ è contenuto nel rettangolo $(-\pi\,,\pi)^2$

solo per $k = 1$ e $k = 0$. Perciò $\begin{pmatrix} 5\pi/6 \\ -\pi/2 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} -\pi/6 \\ -\pi/2 \end{pmatrix}$ sono i soli punti stazionari di f in $(-\pi\,,\pi)^2$ che soddisfano $y = -\dfrac{\pi}{2}$.

Da (5) otteniamo

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Big(\frac{5\pi}{6}\,,-\frac{\pi}{2}\Big) = 2\,,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\Big(\frac{5\pi}{6}\,,-\frac{\pi}{2}\Big) = 0\,,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\Big(\frac{5\pi}{6}\,,-\frac{\pi}{2}\Big) = \frac{1}{2}\,,$$

e

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Big(-\frac{\pi}{6}\,,-\frac{\pi}{2}\Big) = -2\,,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\Big(-\frac{\pi}{6}\,,-\frac{\pi}{2}\Big) = 0\,,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\Big(-\frac{\pi}{6}\,,-\frac{\pi}{2}\Big) = -\frac{1}{2}$$

e risultano le hessiane

$$H_f\Big(\frac{5\pi}{6}\,,-\frac{\pi}{2}\Big) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}\ ,\quad H_f\Big(-\frac{\pi}{6}\,,-\frac{\pi}{2}\Big) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

Siccome $\det H_f\Big(\dfrac{5\pi}{6}\,,-\dfrac{\pi}{2}\Big) = 1 > 0$, la matrice hessiana $H_f\Big(\dfrac{5\pi}{6}\,,-\dfrac{\pi}{2}\Big)$ ha due autovalori non zeri dello stesso segno. Poi, siccome la traccia della hessiana è > 0, gli autovalori sono strettamente positivi. Risulta che $\begin{pmatrix} 5\pi/6 \\ -\pi/2 \end{pmatrix}$ è un punto di minimo locale.

Similmente, siccome det $H_f\Big(-\dfrac{\pi}{6}\,,-\dfrac{\pi}{2}\Big) = 1 > 0$, anche la matrice hessiana $H_f\Big(-\dfrac{\pi}{6}\,,-\dfrac{\pi}{2}\Big)$ ha due autovalori non zeri dello stesso segno. Ma, siccome la traccia di $H_f\Big(-\dfrac{\pi}{6}\,,\dfrac{\pi}{2}\Big)$ è < 0, questi autovalori sono strettamente negativi e risulta che $\begin{pmatrix} -\pi/6 \\ -\pi/2 \end{pmatrix}$ è un punto di massimo locale.

Conclusione:

La funzione f ha nel rettangolo $(-\pi\,,\pi)^2$ due punti di massimo locale,

$$\begin{pmatrix} \pi/6 \\ \pi/2 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} -\pi/6 \\ -\pi/2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \pi/6 \\ \pi/2 \end{pmatrix},$$

e due punti di minimo locale,

$$\begin{pmatrix} -5\pi/6 \\ \pi/2 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} 5\pi/6 \\ -\pi/2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -5\pi/6 \\ \pi/2 \end{pmatrix}.$$

I valori di f nei punti di massimo locale sono

$$f\Big(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\Big)=\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\cdot 1=2\,,$$
$$f\Big(-\frac{\pi}{6},-\frac{\pi}{2}\Big)=\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\Big(-\frac{1}{2}\Big)\cdot(-1)=2\,,$$

mentre i valori nei punti di minimo locale sono

$$f\Big(-\frac{5\pi}{6},\frac{\pi}{2}\Big)=\sqrt{3}\cdot\Big(-\frac{\sqrt{3}}{2}\Big)+\Big(-\frac{1}{2}\Big)\cdot 1=-2\,,$$
$$f\Big(\frac{5\pi}{6},-\frac{\pi}{2}\Big)=\sqrt{3}\cdot\Big(-\frac{\sqrt{3}}{2}\Big)+\frac{1}{2}\cdot(-1)=-2\,.$$

b) La funzione f è continua ed il rettangolo $[-\pi,\pi]^2$ è chiuso e limitato, perciò il teorema di Weierstrass ci garantisce l'esistenza di almeno un punto di massimo ed uno di minimo della restrizione di f a $[-\pi,\pi]^2$.

Se un punto di massimo si trova nel rettangolo aperto $(-\pi,\pi)^2$, allora dev'essere uguale ad uno dei due punti di massimo locale trovati nel punto a) dell'esercizio, cioè a $\pm\begin{pmatrix}\pi/6\\ \pi/2\end{pmatrix}$, dove il valore di f è 2.

Similmente, se un punto di minimo è elemento del rettangolo aperto $(-\pi,\pi)^2$, allora dev'essere uguale ad uno dei due punti $\pm\begin{pmatrix}-5\pi/6\\ \pi/2\end{pmatrix}$, nei quali f prende il valore -2.

Altrimenti il punto di massimo o minimo in questione si trova sulla frontiera di $[-\pi,\pi]^2$, che si compone da quattro segmenti :

$$\Big\{\begin{pmatrix}x\\ \pi\end{pmatrix};\,-\pi\le x\le\pi\Big\},\quad \Big\{\begin{pmatrix}x\\ -\pi\end{pmatrix};\,-\pi\le x\le\pi\Big\},$$
$$\Big\{\begin{pmatrix}\pi\\ y\end{pmatrix};\,-\pi\le y\le\pi\Big\},\quad \Big\{\begin{pmatrix}-\pi\\ y\end{pmatrix};\,-\pi\le y\le\pi\Big\}.$$

Siccome

$$f(x,\pm\pi)=-\sqrt{3}\cos x\,,\quad f(\pm\pi,y)=-\sqrt{3}\,,$$

per ogni $\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ appartenente alla frontiera di $[-\pi,\pi]^2$ abbiamo

$$-2<-\sqrt{3}\le f(x,y)\le\sqrt{3}<2\,.$$

Di conseguenza nessun punto di massimo o minimo della restrizione di f al rettangolo $[-\pi\,,\pi]^2$ può appartenere alla frontiera e concludiamo che i punti di massimo della restrizione di f a $[-\pi\,,\pi]^2$ sono $\pm\begin{pmatrix}\pi/6\\ \pi/2\end{pmatrix}$, mentre i punti di minimo sono $\pm\begin{pmatrix}-5\pi/6\\ \pi/2\end{pmatrix}$. Inoltre, il valore massimo è 2, ed il valore minimo -2.

Commenti.

Consideriamo il caso più generale di una funzione della forma

$$f(x\,,y) = a\cos x + b(\sin x)\cos(y-\beta)\,, \qquad (x\,,y)\in\mathbb{R}^2$$

dove $a\,,b\,,\beta\in\mathbb{R}$. Eliminando il caso banale $b=0$, supponiamo che $b\neq 0$.

Chi sono i punti di massimo e di minimo di f, se esistono? Per trovarli useremo pura algebra lineare.

Per convenienza riscriviamo f scrivendo il vettore $\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}$ in coordinate polari :

$$\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\rho\cos\alpha\\ \rho\sin\alpha\end{pmatrix}$$

dove $\rho=\sqrt{a^2+b^2}$ ed $\alpha\in\mathbb{R}$ è scelto tale che

$$\cos\alpha = \frac{a}{\rho}\,, \quad \sin\alpha = \frac{b}{\rho}\,.$$

Allora $\rho>0, \sin\alpha\neq 0$ e

$$\begin{aligned} f(x\,,y) &= \rho\Big((\cos\alpha)(\cos x) + (\sin\alpha)(\sin x)\cos(y-\beta)\Big)\\ &= \rho\left\langle \begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\cos x\\ (\sin x)\cos(y-\beta)\end{pmatrix}\right\rangle, \quad (x\,,y)\in\mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

In cerca dei punti di massimo di f osserviamo che per la disuguaglianza di Schwarz abbiamo

$$\begin{aligned} f(x\,,y) &= \rho\left\langle \begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\cos x\\ (\sin x)\cos(y-\beta)\end{pmatrix}\right\rangle\\ &\leq \rho\cdot\left\|\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix}\right\|\cdot\left\|\begin{pmatrix}\cos x\\ (\sin x)\cos(y-\beta)\end{pmatrix}\right\| \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \rho\sqrt{\cos^2 x + (\sin^2 x)\cos^2(y-\beta)} \\
&\leq \rho\sqrt{\cos^2 x + \sin^2 x} = \rho\,.
\end{aligned}
$$

Perciò f non può prendere valori $> \rho$ e quindi se esistono punti nei quali il valore di f è uguale a ρ, allora questi sono i punti di massimo di f.

Siccome $\sin^2 x > 0$, la seconda disuguaglianza di cui sopra diventa una uguaglianza se e soltanto se $\cos^2(y-\beta) = 1$, cioè se

$$\cos(y-\beta) = 1 \Longleftrightarrow y = \beta + k'\pi \text{ per un } k' \in \mathbb{Z} \text{ pari} \tag{6}$$

oppure

$$\cos(y-\beta) = -1 \Longleftrightarrow y = \beta + k'\pi \text{ per un } k' \in \mathbb{Z} \text{ dispari.} \tag{7}$$

Assumendo ora che (6) o (7) sia soddisfatta, vale la stima

$$
\begin{aligned}
f(x\,,y) &= \rho\left\langle \begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\cos x\\ \pm\,\sin x\end{pmatrix}\right\rangle \\
&\leq \rho\cdot\left\|\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix}\right\|\cdot\left\|\begin{pmatrix}\cos x\\ \pm\,\sin x\end{pmatrix}\right\| = \rho\,.
\end{aligned}
\tag{8}
$$

A questo punto ricordiamo dall'algebra lineare che per due versori (cioè vettori di lunghezza unità) $\mathbf{u}\,,\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ abbiamo

$$
\begin{aligned}
\langle\mathbf{u}\,,\mathbf{v}\rangle = 1 &\Longleftrightarrow \mathbf{u} = \mathbf{v}\,, \\
\langle\mathbf{u}\,,\mathbf{v}\rangle = -1 &\Longleftrightarrow \mathbf{u} = \;-\mathbf{v}\;:
\end{aligned}
$$

Le implicazioni $\Longleftarrow$ sono ovvie.
Supponiamo adesso che $\langle\mathbf{u}\,,\mathbf{v}\rangle = 1$. Allora

$$
\begin{aligned}
\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2 &= \langle\mathbf{u}-\mathbf{v}\,,\mathbf{u}-\mathbf{v}\rangle \\
&= \langle\mathbf{u}\,,\mathbf{u}\rangle - \langle\mathbf{u}\,,\mathbf{v}\rangle - \langle\mathbf{v}\,,\mathbf{u}\rangle + \langle\mathbf{v}\,,\mathbf{v}\rangle \\
&= \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2 - 2\,\langle\mathbf{u}\,,\mathbf{v}\rangle \\
&= 1 + 1 - 2 = 0
\end{aligned}
$$

implica $\mathbf{u} = \mathbf{v}$.

Similmente, se $\langle \mathbf{u}\,,\mathbf{v}\rangle = -1$ allora

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 &= \langle \mathbf{u}+\mathbf{v}\,,\mathbf{u}+\mathbf{v}\rangle \\ &= \langle \mathbf{u}\,,\mathbf{u}\rangle + \langle \mathbf{u}\,,\mathbf{v}\rangle + \langle \mathbf{v}\,,\mathbf{u}\rangle + \langle \mathbf{v}\,,\mathbf{v}\rangle \\ &= \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2 + 2\,\langle \mathbf{u}\,,\mathbf{v}\rangle \\ &= 1+1-2 = 0\end{aligned}$$

e quindi $\mathbf{u} = \ -\mathbf{v}\,.$

Perciò, assumendo (6), la disuguaglianza in (8) diventa uguaglianza se e soltanto se

$$\begin{pmatrix}\cos x\\ \sin x\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix} \Longleftrightarrow x = \alpha + k\,\pi \text{ per un } k\in\mathbb{Z} \text{ pari}\,,$$

mentre assumendo (7), la disuguaglianza in (8) diventa uguaglianza se e soltanto se

$$\begin{pmatrix}\cos x\\ \sin x\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\alpha\\ -\sin\alpha\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos(-\alpha)\\ \sin(-\alpha)\end{pmatrix} \Longleftrightarrow x = -\alpha + k\,\pi \text{ con } k\in\mathbb{Z} \text{ pari}\,.$$

Concludiamo che f ha punti di massimo (globale) e questi sono :

assumendo (6), cioè $y = \beta + k'\pi$ con $k'\in\mathbb{Z}$ pari,

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha + k\,\pi\\ \beta + k'\pi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(-1)^{k'}\alpha + k\,\pi\\ \beta + k'\pi\end{pmatrix}, k\in\mathbb{Z} \text{ pari}, \ k'\in\mathbb{Z} \text{ pari},$$

mentre assumendo (7), cioè $y = \beta + k'\pi$ con $k'\in\mathbb{Z}$ dispari,

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\alpha + k\,\pi\\ \beta + k'\pi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(-1)^{k'}\alpha + k\,\pi\\ \beta + k'\pi\end{pmatrix}, k\in\mathbb{Z} \text{ pari}, \ k'\in\mathbb{Z} \text{ dispari}.$$

I due casi possiamo riunire concludendo :

I punti di massimo di f sono

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(-1)^{k'}\alpha + k\,\pi\\ \beta + k'\pi\end{pmatrix}, \qquad k\,,k'\in\mathbb{Z}\,, k \text{ pari}$$

ed il valore massimo di f è $\rho\,.$

Per trovare i punti di minimo di f osserviamo che la disuguaglianza di Schwarz si applica anche per ottenere

$$\begin{aligned} f(x\,,y) &= \rho\left\langle \begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\cos x\\ (\sin x)\cos(y-\beta)\end{pmatrix}\right\rangle \\ &\geq\ -\,\rho\cdot\left\|\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix}\right\|\cdot\left\|\begin{pmatrix}\cos x\\ (\sin x)\cos(y-\beta)\end{pmatrix}\right\| \\ &=\ -\,\rho\sqrt{\cos^2 x+(\sin^2 x)\cos^2(y-\beta)} \\ &\geq\ -\,\rho\sqrt{\cos^2 x+\sin^2 x} = -\,\rho\,. \end{aligned}$$

Qui la seconda disuguaglianza diventa uguaglianza se e soltanto se $\cos^2(y-\beta)=1$, cioè se (6) o (7) è soddisfatta.

Analizzando ora in ambi casi, quando diventa anche la prima disuguaglianza uguaglianza, si arriva al risultato :

I punti di minimo di f sono

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(-1)^{k'}\alpha+k\,\pi\\ \beta+k'\pi\end{pmatrix}, \qquad k\,,k'\in\mathbb{Z}\,,k \text{ dispari}$$

ed il valore minimo di f è $-\rho$.

Da qui si ottiene subito la soluzione del punto b) dell'esercizio 4) :

Nell'esercizio 4) $a=\sqrt{3}\,,b=1\,,\beta=\dfrac{\pi}{2}$ e risultano $\rho=2\,,\alpha=\dfrac{\pi}{6}$.
Perciò i punti di massimo di f sono

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(-1)^{k'}\pi/6+k\,\pi\\ \pi/2+k'\pi\end{pmatrix}, \qquad k\,,k'\in\mathbb{Z}\,,k \text{ pari}$$

,

mentre i punti di minimo sono

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(-1)^{k'}\pi/6+k\,\pi\\ \pi/2+k'\pi\end{pmatrix}, \qquad k\,,k'\in\mathbb{Z}\,,k \text{ dispari}$$

.

Quattro di questi punti si trovano nel rettangolo $[\,-\pi\,,\pi]^2$: due punti di massimo, per $k'=0\,,k=0$ e per $k'=-1\,,k=0$, e due punti di minimo, per $k'=0\,,k=-1$ e per $k'=-1\,,k=1$.

Per trovare i punti di massimo e di minimo locale non possiamo però evitare la strada dell'analisi, come l'abbiamo fatto nella soluzione del punto a) dell'esercizio 4).

Calcoliamo quindi le derivate parziali di f:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \rho\Big(-(\cos\alpha)\sin x + (\sin\alpha)(\cos x)\cos(y-\beta)\Big)\,,\\ \frac{\partial f}{\partial y} &= -\,\rho(\sin\alpha)(\sin x)\sin(y-\beta)\,.\end{aligned}$$

Risulta che i punti stazionari di f sono le soluzioni del sistema di equazioni

$$\begin{cases} -(\cos\alpha)\sin x + (\sin\alpha)(\cos x)\cos(y-\beta) = 0\,,\\ \qquad\qquad\quad -(\sin\alpha)(\sin x)\sin(y-\beta) = 0\,.\end{cases} \tag{9}$$

Dalla seconda equazione si ottiene

$$\sin x = 0 \ \text{ oppure } \ \sin(y-\beta) = 0\,.$$

Caso $\sin x = 0$**:**

Abbiamo $\sin x = 0$ se e soltanto se $x = k\pi$ per un $k\in\mathbb{Z}$. Allora dalla prima equazione del sistema (9) otteniamo

$$\cos(y-\beta) = 0 \Longleftrightarrow y = \beta + (2k'-1)\,\frac{\pi}{2} = \beta + \big(k'-1/2\big)\pi \ \text{con } k'\in\mathbb{Z}\,.$$

Perciò i punti stazionari di f soddisfacenti $\sin x = 0$ sono

$$\begin{pmatrix} k\pi \\ \beta + \big(k'-1/2\big)\pi \end{pmatrix}\,, \qquad k\,,k'\in\mathbb{Z}\,.$$

Per stabilire la natura di questi punti stazionari, calcoliamo le derivate parziali di secondo ordine :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \rho\Big(-(\cos\alpha)\cos x - (\sin\alpha)(\sin x)\cos(y-\beta)\Big)\,,\\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} &= -\,\rho(\sin\alpha)(\cos x)\sin(y-\beta)\,,\\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= -\,\rho(\sin\alpha)(\sin x)\cos(y-\beta)\end{aligned}$$

Perciò nel punto $\begin{pmatrix} k\pi \\ \beta + \big(k'-1/2\big)\pi \end{pmatrix}$ con $k\,,k' \in \mathbb{Z}$ le derivate parziali di secondo ordine sono

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Big(k\pi\,,\beta+\big(k'-1/2\big)\pi\Big) &= -\,(-1)^k\rho\cos\alpha = (-1)^{k+1}\rho\cos\alpha\,,\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\Big(k\pi\,,\beta+\big(k'-1/2\big)\pi\Big) &= -\,(-1)^k(-1)^{k'+1}\rho\sin\alpha = (-1)^{k+k'}\rho\sin\alpha\,,\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\Big(k\pi\,,\beta+\big(k'-1/2\big)\pi\Big) &= 0
\end{aligned}$$

e quindi la matrice hessiana in questo punto è

$$H_f\Big(k\pi\,,\beta+\big(k'-1/2\big)\pi\Big) = \begin{pmatrix} (-1)^{k+1}\rho\cos\alpha & (-1)^{k+k'}\rho\sin\alpha \\ (-1)^{k+k'}\rho\sin\alpha & 0 \end{pmatrix}.$$

Siccome $\det H_f\Big(k\,\pi\,,\beta+\big(k'-1/2\big)\pi\Big) = -\rho^2\sin^2\alpha < 0$, la matrice $H_f\Big(k\pi\,,\beta+\big(k'-1/2\big)\pi\Big)$ ha due autovalori non zeri e di segni opposti. Di conseguenza tutti i punti stazionari $\begin{pmatrix} k\pi \\ \beta + \big(k'-1/2\big)\pi \end{pmatrix}$ con $k\,,k' \in \mathbb{Z}$ sono punti sella di f.

Caso $\sin(y-\beta) = 0$:

Risulta che $y = \beta + k'\pi$ per un $k' \in \mathbb{Z}$. Sostituendo nella prima equazione del sistema (9) otteniamo

$$-(\cos\alpha)\sin x + (-1)^{k'}(\sin\alpha)(\cos x) = 0\,.$$

Tenendo conto che il coseno è pari ed il seno è dispari, per la formula di addizione del seno risulta

$$\begin{aligned}
0 &= (\cos\alpha)\sin x - (-1)^{k'}(\sin\alpha)(\cos x)\\
&= \cos\big(-\,(-1)^{k'}\alpha\big)\sin x + \sin\big(-\,(-1)^{k'}\alpha\big)\cos x\\
&= \sin\big(x - (-1)^{k'}\alpha\big)\,.
\end{aligned}$$

Di conseguenza $x = (-1)^{k'}\alpha + k\,\pi$ per un $k \in \mathbb{Z}$ e concludiamo che i punti stazionari di f soddisfacenti $\sin(y-\beta) = 0$ sono

$$\begin{pmatrix} (-1)^{k'}\alpha + k\,\pi \\ \beta + k'\pi \end{pmatrix}\,,\quad k\,,k' \in \mathbb{Z}\,.$$

Usando le matrici hessiane è facile verificare che questi punti sono punti di massimo locale per k pari e punti di minimo locale per k dispari.

Abbiamo però già visto che per k pari otteniamo punti di massimo globale e per k dispari punti di minimo globale, perciò a questo punto le matrici hessiane non ci servono più.

Chiudiamo quindi la discussione notificando :

$$\boxed{\text{I punti sella di } f \text{ sono} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k\pi \\ \beta + \big(k'-1/2\big)\,\pi \end{pmatrix}, \quad k\,,k' \in \mathbb{Z}\,.}$$

Oltre ai punti di massimo, i punti di minimo ed i punti sella non esistono altri punti stazionari di f.

5) **:** Più generalmente, calcoleremo la lunghezza dell'arco definito tramite

$$x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}\,, \quad x \geq 0\,, y \geq 0\,,$$

dove $a > 0$ è arbitrario. Nel nostro caso $a = 2$.

Soluzione tramite parametrizzazione con x:

L'arco in questione è il grafico della funzione

$$f(x) = \big(a^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}}\big)^2,$$

definita su $[\,0\,,a\,]$. La funzione f è chiaramente continua in $[\,0\,,a\,]$ ed è derivabile in $(\,0\,,a\,]$:

$$f'(x) = 2\big(a^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}}\big)\Big(-\frac{1}{2}\,x^{-\frac{1}{2}}\Big) = -\big(a^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}}\big)\,x^{-\frac{1}{2}}, \qquad 0 < x \leq a\,.$$

Risulta che f è di classe C^1 nell'intervallo $[\,\varepsilon\,,a\,]$ per ogni $\varepsilon > 0$.

Ora parametrizziamo il grafico di f tramite la variabile x:

$$\gamma_f : [\,0\,,a\,] \ni x \longmapsto \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2\,.$$

Siccome, per ogni $\varepsilon > 0$, f è di classe C^1 in $[\,\varepsilon\,,a\,]$, la lunghezza del grafico della sua restrizione a $[\,\varepsilon\,,a\,]$ è uguale à

$$\int_{\varepsilon}^{a} \|\gamma_f'(x)\| \,\mathrm{d}x = \int_{\varepsilon}^{a} \sqrt{1 + \big(f'(x)\big)^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

Risulta che la lunghezza L dell'intero grafico di f è uguale all'integrale improprio (improprio perché il grafico di f ha tangente verticale nel punto $(0\,,a)$, più precisamente, f' ha limite $-\infty$ in $x=0$) :

$$L = \int_{0}^{a} \sqrt{1 + \big(f'(x)\big)^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{0<\varepsilon\to 0} \int_{\varepsilon}^{a} \sqrt{1 + \big(f'(x)\big)^2}\,\mathrm{d}x$$

che calcoliamo nel seguito.

Poiché

$$\begin{aligned}\sqrt{1 + \big(f'(x)\big)^2} &= \sqrt{1 + \big(a^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}}\big)^2 \frac{1}{x}} = \sqrt{\frac{2\,x - 2\,a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} + a}{x}} \\ &= \sqrt{2\,x - 2\sqrt{a}\sqrt{x} + a}\,\frac{1}{\sqrt{x}}\end{aligned}$$

risulta

$$\begin{aligned}L = \;& \int_{0}^{a} \sqrt{1 + \big(f'(x)\big)^2}\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{a} \sqrt{2\,x - 2\sqrt{a}\sqrt{x} + a}\,\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} \\ = \;& 2\int_{0}^{a} \sqrt{2\,x - 2\sqrt{a}\sqrt{x} + a}\,\mathrm{d}\sqrt{x} \\ = \;& 2\,a \int_{0}^{a} \sqrt{2\,\frac{x}{a} - 2\,\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{a}} + 1}\,\mathrm{d}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{a}} \\ \overset{s=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{a}}}{=} \;& 2\,a \int_{0}^{1} \sqrt{2\,s^2 - 2\,s + 1}\,\mathrm{d}s = \sqrt{2}\,a \int_{0}^{1} \sqrt{4\,s^2 - 4\,s + 2}\,\mathrm{d}s \\ = \;& \frac{\sqrt{2}}{2}\,a \int_{0}^{1} \sqrt{1 + (2\,s-1)^2}\,\mathrm{d}(2\,s-1) \\ \overset{u=2s-1}{=} \;& \frac{\sqrt{2}}{2}\,a \int_{-1}^{1} \sqrt{1+u^2}\,\mathrm{d}u = \sqrt{2}\,a \int_{0}^{1} \sqrt{1+u^2}\,\mathrm{d}u\,.\end{aligned}$$

Resta quindi trovare una primitiva di $\sqrt{1+u^2}$. A questo fine useremo sostituzione con seno iperbolico :

$$u = \operatorname{sh} t\,, \quad \mathrm{d}u = (\operatorname{ch} t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Ricordiamo che la funzione inversa del seno iperbolico è

$$t = \operatorname{arsh} u = \ln\bigl(u + \sqrt{1+u^2}\,\bigr) = -\ln\bigl(-u + \sqrt{1+u^2}\,\bigr) \ :$$

> Infatti, da $u = \operatorname{sh} t = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2} \Longleftrightarrow 2\,u = e^t - e^{-t}$ risulta l'equazione di secondo grado in e^t
>
> $$(e^t)^2 - 2\,u\,e^t - 1 = 0\,,$$
>
> di cui la soluzione positiva (e^t è positivo!) è
>
> $$e^t = u + \sqrt{1+u^2}\,.\,,$$
>
> Perciò $t = \ln\bigl(u + \sqrt{1+u^2}\,\bigr)$.
> D'altro canto, siccome $\bigl(u + \sqrt{1+u^2}\,\bigr)\bigl(-u + \sqrt{1+u^2}\,\bigr) = 1\,,$ abbiamo $\ln\bigl(u + \sqrt{1+u^2}\,\bigr) + \ln\bigl(-u + \sqrt{1+u^2}\,\bigr) = 0\,,$ quindi $t = -\ln\bigl(-u + \sqrt{1+u^2}\,\bigr)$.

Si ottiene

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{1+u^2}\,\mathrm{d}u &= \int \sqrt{1+\operatorname{sh}^2 t}\,(\operatorname{ch} t)\,\mathrm{d}t = \int (\operatorname{ch} t)^2 \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{4}\int \bigl(e^t + e^{-t}\bigr)^2 \mathrm{d}t = \frac{1}{4}\int \bigl(2 + e^{2t} + e^{-2t}\bigr)\mathrm{d}t \\
&= \frac{t}{2} + \frac{1}{8}\bigl(e^{2t} - e^{-2t}\bigr) + C \\
&= \frac{1}{2}\ln\bigl(u + \sqrt{1+u^2}\,\bigr) \\
&\quad + \frac{1}{8}\Bigl(\bigl(u + \sqrt{1+u^2}\,\bigr)^2 - \bigl(-u + \sqrt{1+u^2}\,\bigr)^2\Bigr) + C \\
&= \frac{1}{2}\ln\bigl(u + \sqrt{1+u^2}\,\bigr) + \frac{1}{2}\,u\sqrt{1+u^2} + C\,.
\end{aligned}$$

Cosicché

$$\int \sqrt{1+u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\Bigl(u\sqrt{1+u^2} + \ln\bigl(u + \sqrt{1+u^2}\,\bigr)\Bigr) + C\,. \qquad (10)$$

Ora, usando (10) possiamo concludere che

$$L = \sqrt{2}\,a\frac{1}{2}\Big(u\sqrt{1+u^2} + \ln\big(u+\sqrt{1+u^2}\big)\Big)\Big|_{u=0}^{u=1}$$
$$= \left(1 + \frac{\ln\big(1+\sqrt{2}\big)}{\sqrt{2}}\right)a.$$

Soluzione tramite una parametrizzazione simile all'uso delle coordinate polari :

Sfruttando il fatto che $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$, possiamo parametrizzare l'arco in questione come segue :

$$\gamma : \left[0\,,\frac{\pi}{2}\right] \ni t \longmapsto \begin{pmatrix} a\cos^4 t \\ a\sin^4 t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2\,.$$

Con questa parametrizzazione otteniamo

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} -\,4\,a\,(\cos^3 t)(\sin t) \\ 4\,a\,(\sin^3 t)(\cos t) \end{pmatrix}, \qquad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}\,,$$
$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{16\,a^2(\cos^6 t)(\sin^2 t) + 16\,a^2(\sin^6 t)(\cos^2 t)}$$
$$= \sqrt{16\,a^2(\cos^2 t)(\sin^2 t)\,(\cos^4 t + \sin^4 t)}$$
$$= 4\,a\,(\cos t)(\sin t)\sqrt{\cos^4 t + \sin^4 t}\,, \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}\,.$$

Ma $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ implica

$$1 = \big(\cos^2 t + \sin^2 t\big)^2 = \cos^4 t + \sin^4 t + 2\,(\cos t)^2(\sin t)^2$$

perciò

$$\cos^4 t + \sin^4 t = 1 - 2\,(\cos t)^2(\sin t)^2 = 1 - \frac{1}{2}\,\sin^2(2t) = \frac{1+\cos^2(2t)}{2}\,.$$

Di conseguenza

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{2}\,a\sin(2t)\,\sqrt{1+\cos^2(2t)}\,, \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$$

e risulta che la lunghezza di γ è

$$L = \int_0^{\pi/2} \sqrt{2}\,a\sin(2t)\,\sqrt{1+\cos^2(2t)}\,\mathrm{d}t \overset{u\,=\,\cos(2t)}{=} \frac{1}{\sqrt{2}}\,a\int_{-1}^{1}\sqrt{1+u^2}\,\mathrm{d}u$$

$$= \sqrt{2}\, a \int\limits_0^1 \sqrt{1+u^2}\, \mathrm{d}u\,.$$

Usando ora (10) si conclude che

$$\begin{aligned} L &= \sqrt{2}\, a \frac{1}{2} \Big(u \sqrt{1+u^2} + \ln\big(u + \sqrt{1+u^2}\big)\Big)\Big|_{u=0}^{u=1} \\ &= \left(1 + \frac{\ln\big(1+\sqrt{2}\big)}{\sqrt{2}} \right) a. \end{aligned}$$

Soluzione del compito :

Nel caso del compito $a = 2$, perciò risulta che la lunghezza dell'arco definito tramite

$$x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}\,, \quad x \geq 0\,, y \geq 0\,,$$

è uguale a $\left(1 + \dfrac{\ln\big(1+\sqrt{2}\big)}{\sqrt{2}} \right) \cdot 2 = 2 + \sqrt{2}\, \ln\big(1+\sqrt{2}\big)\,.$

Commento.

A confronto con l'esercizio 5) calcoliamo anche la lunghezza dell'arco di astroide (vedi https://it.wikipedia.org/wiki/Astroide)

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}\,, \quad x \geq 0\,, y \geq 0\,,$$

dove $a > 0$.

Soluzione tramite parametrizzazione con x :

L'arco in questione è il grafico della funzione

$$f(x) = \big(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\big)^{\frac{3}{2}},$$

definita su $[\,0\,, a\,]$. La funzione f è chiaramente continua in $[\,0\,, a\,]$ ed è derivabile in $(\,0\,, a\,]$:

$$f'(x) = \frac{3}{2}\big(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\big)^{\frac{1}{2}} \Big(-\frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} \Big) = -\big(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\big)^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{3}}, \qquad 0 < x \leq a\,.$$

Risulta che f è di classe C^1 nell'intervallo $[\,\varepsilon\,, a\,]$ per ogni $\varepsilon > 0$.

Ora parametrizziamo il grafico di f tramite la variabile x :

$$\gamma_f : [\,0\,, a\,] \ni x \longmapsto \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2\,.$$

Siccome, per ogni $\varepsilon > 0$, f è di classe C^1 in $[\,\varepsilon\,, a\,]$, la lunghezza del grafico della sua restrizione a $[\varepsilon, a]$ è uguale à

$$\int_{\varepsilon}^{a} \|\gamma_f'(x)\|\,\mathrm{d}x = \int_{\varepsilon}^{a} \sqrt{1+\big(f'(x)\big)^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

Risulta che la lunghezza L dell'intero grafico di f è uguale all'integrale improprio (improprio perché il grafico di f ha tangente verticale nel punto $(0, a)$, più precisamente, f' ha limite $-\infty$ in $x=0$) :

$$L = \int_{0}^{a} \sqrt{1+\big(f'(x)\big)^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{0<\varepsilon\to 0} \int_{\varepsilon}^{a} \sqrt{1+\big(f'(x)\big)^2}\,\mathrm{d}x$$

che calcoliamo nel seguito.

Poiché

$$\sqrt{1+\big(f'(x)\big)^2} = \sqrt{1+\big(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\big)x^{-\frac{2}{3}}} = \sqrt{a^{\frac{2}{3}}x^{-\frac{2}{3}}} = a^{\frac{1}{3}}x^{-\frac{1}{3}},$$

concludiamo che

$$L = \int_{0}^{a} \sqrt{1+\big(f'(x)\big)^2}\,\mathrm{d}x = a^{\frac{1}{3}} \int_{0}^{a} x^{-\frac{1}{3}}\mathrm{d}x = a^{\frac{1}{3}}\,\frac{3}{2}\,x^{\frac{2}{3}}\Big|_{x=0}^{x=a} = \frac{3}{2}\,a\,.$$

Soluzione tramite una parametrizzazione simile all'uso delle coordinate polari :

Sfruttando il fatto che $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$, possiamo parametrizzare l'arco in questione come segue :

$$\gamma : \Big[0, \frac{\pi}{2}\Big] \ni t \longmapsto \begin{pmatrix} a\cos^3 t \\ a\sin^3 t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2\,.$$

Con questa parametrizzazione otteniamo

$$\begin{aligned}
\gamma'(t) &= \begin{pmatrix} -\,3\,a\,(\cos^2 t)(\sin t) \\ 3\,a\,(\sin^2 t)(\cos t) \end{pmatrix}, \qquad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}\,, \\
\|\gamma'(t)\| &= \sqrt{9\,a^2(\cos^4 t)(\sin^2 t) + 9\,a^2(\sin^4 t)(\cos^2 t)} \\
&= \sqrt{9\,a^2(\cos^2 t)(\sin^2 t)\,(\cos^2 t + \sin^2 t)} \\
&= 3\,a\,(\cos t)(\sin t)\,, \qquad\qquad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}\,,
\end{aligned}$$

perciò la lunghezza di γ è

$$L = \int_0^{\pi/2} 3\,a\,(\cos t)(\sin t)\,\mathrm{d}t = 3\,a \int_0^{\pi/2} (\sin t)\,\mathrm{d}(\sin t) = 3\,a\,\frac{\sin^2 t}{2}\Bigg|_{t=0}^{t=\pi/2}$$

$$= \frac{3}{2}\,a\,.$$