NOME: .... **MATRICOLA:** ....

Corso di Laurea in Matematica, A.A. 2012/2013
Analisi Reale e Complessa, Esame del 17.06.2013

1) Siano $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0\,,+\infty)$ una funzione sommabile e $\varepsilon > 0$. Poniamo

$$E_k := \big\{ x \in \mathbb{R}^n \,;\, (1+\varepsilon)^k < f(x) \leq (1+\varepsilon)^{k+1} \big\}\,, \qquad k \in \mathbb{Z}$$

e

$$g := \sum_{k\in\mathbb{Z}} (1+\varepsilon)^k \chi_{E_k}\,, \quad h := \sum_{k\in\mathbb{Z}} (1+\varepsilon)^{k+1} \chi_{E_k}$$

dove χ_{E_k} indica la funzione caratteristica di E_k. Si verifichi :

a) $g\,,h : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0\,,+\infty)$ sono funzioni sommabili tali che $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$.

b) Abbiamo

$$0 \leq \int\limits_{\mathbb{R}^n} h(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_{\mathbb{R}^n} g(x)\,\mathrm{d}x \leq \varepsilon \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Suggerimento: Si osservi che h è un multiplo costante di g.

2) a) Si verifichi che per ogni numeri reali r e $a < b$ abbiamo

$$\int\limits_a^b \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{|x-r|}} \leq 4\sqrt{b-a}\,.$$

b) Si dimostri che per ogni successione di numeri reali $\big(r_k\big)_{k\geq 1}$ la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{1}{\sqrt{|x-r_k|}}$$

converge per quasi ogni $x \in \mathbb{R}$.

3) A) Sia $D \subset \mathbb{C}$ un sottoinsieme discreto e sia $g : \mathbb{C} \setminus D \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa. Sia n un intero e sia $U \subset \mathbb{C}$ un aperto non vuoto tale che $g^{-1}(p)$ consista al più di n punti per ogni $p \in U$. Dimostrare che g non ha nessuna singolarità essenziale.

Suggerimento: Si usi la densità in $\mathbb{C}$ dell'immagine di ogni funzione olomorfa con almeno una singolarità essenziale (teorema di Casorati-Weierstrass).

B) Dimostrare lo stesso risultato nell'ipotesi in cui $g^{-1}(p)$ sia solo un insieme finito per ogni $p \in U$.

Suggerimento: Si usi la seguente forma del teorema di Baire: *Per ogni aperto non vuoto $U \subset \mathbb{C}$, qualsiasi intersezione numerabile di aperti densi in U è non vuota.*

C) Dedurre che se $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ è olomorfa ed esiste un aperto $U \in \mathbb{C}$ tale che $g^{-1}(p)$ è un insieme finito per ogni $p \in U$, allora f è una funzione polinomiale.

D) Esiste una funzione olomorfa $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ non polinomiale, tale che $h^{-1}(p)$ sia un insieme finito non vuoto per un qualche $p \in \mathbb{C}$?

4) Usando il teorema dei residui, calcolare i seguenti integrali

$$i) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\, dx}{(x^2+2x+5)^2} \, ,$$

$$ii) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+6x+10} \, .$$

Soluzioni:

1) **:** Poiché gli insiemi E_k sono a due a due disgiunti e

$$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} E_k = \big\{x\in\mathbb{R}^n\,;\,f(x)>0\big\}\,,$$

abbiamo

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} f\,\chi_{E_k} = f\,\chi_{\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} E_k} = f\ .$$

Cosicché

$$(1+\varepsilon)^k\chi_{E_k} \le f\,\chi_{E_k} \le (1+\varepsilon)^{k+1}\chi_{E_k}\,,\qquad k\in\mathbb{Z}$$

implica

$$g=\sum_{k\in\mathbb{Z}}(1+\varepsilon)^k\chi_{E_k} \le \underbrace{\sum_{k\in\mathbb{Z}} f\,\chi_{E_k}}_{=f} \le \sum_{k\in\mathbb{Z}}(1+\varepsilon)^{k+1}\chi_{E_k} = h\,.$$

Ora la misurabilità di f implica la misurabilità degli insiemi E_k, quindi la misurabilità delle funzioni g ed h. Mettendo in conto che $0\le g\le f$ e $h=(1+\varepsilon)\,g$, dalla sommabilità di f risulta che g ed h sono addirittura sommabili. Per di più,

$$0\le\int\limits_{\mathbb{R}^n} g(x)\,\mathrm{d}x \le \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\,\mathrm{d}x\,,\quad \int\limits_{\mathbb{R}^n} h(x)\,\mathrm{d}x \le (1+\varepsilon)\int\limits_{\mathbb{R}^n} g(x)\,\mathrm{d}x$$

e di conseguenza

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} h(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_{\mathbb{R}^n} g(x)\,\mathrm{d}x = \varepsilon\int\limits_{\mathbb{R}^n} g(x)\,\mathrm{d}x = \left\{\begin{array}{l} \ge 0 \\ \le \varepsilon\displaystyle\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\,\mathrm{d}x \end{array}\right. .$$

2) **:** a) Discutiamo separatamente i tre casi

$$r<a\,,\quad a\le r\le b\,,\quad b<r\,.$$

Caso $r<a$ **:**

$$\int\limits_a^b \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{|x-r|}} = \int\limits_a^b \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x-r}} = 2\sqrt{x-r}\,\Big|_{x=a}^{x=b}$$

$$= 2\Big(\sqrt{b-r}-\sqrt{a-r}\Big) < 2\sqrt{b-a}\,.$$

Caso $b < r$ **:**

$$\int\limits_a^b \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{|x-r|}} = \int\limits_a^b \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{r-x}} = -2\sqrt{r-x}\,\Bigg|_{x=a}^{x=b}$$
$$= 2\Big(\sqrt{r-a} - \sqrt{r-b}\Big) < 2\sqrt{b-a}\,.$$

Caso $a \leq r \leq b$ **:**

$$\int\limits_a^b \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{|x-r|}} = \int\limits_a^r \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{r-x}} + \int\limits_r^b \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x-r}}$$
$$= -\,2\sqrt{r-x}\,\Bigg|_{x=a}^{x=r} + 2\sqrt{x-r}\,\Bigg|_{x=r}^{x=b}$$
$$= 2\Big(\sqrt{r-a} + \sqrt{b-r}\Big) \leq 4\sqrt{b-a}\,.$$

Osservazione:

Nel caso $a \leq r \leq b$ vale in realtà una stima più precisa:

Applicando la disuguaglianza di Buniakovski-Cauchy-Schwarz

$$\big|\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2\big| \leq \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}\,\sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2}\,, \qquad \alpha_1\,,\alpha_2\,,\beta_1\,,\beta_2 \in \mathbb{R}$$

con $\alpha_1 = \alpha_2 = 1\,, \beta_1 = \sqrt{r-a}\,, \beta_2 = \sqrt{b-r}$ si ottiene

$$\int\limits_a^b \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{|x-r|}} \leq 2\Big(\sqrt{r-a} + \sqrt{b-r}\Big) \leq 2\sqrt{2}\,\sqrt{b-a}\,.$$

Perciò vale per ogni r e $a < b$ addirittura

$$\int\limits_a^b \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{|x-r|}} \leq 2\sqrt{2}\,\sqrt{b-a}\,.$$

b) Consideriamo per ogni $k \geq 1$ la funzione continua

$$f_k : \mathbb{R} \ni x \longmapsto \frac{1}{2^k}\,\frac{1}{\sqrt{|x-r_k|}} \in [\,0\,,+\infty\,]\,.$$

Per il teorema di Beppo-Levi e per a) di cui sopra abbiamo per ogni numero naturale $n \geq 1$

$$
\begin{aligned}
\int_{-n}^{n}\left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\right)\mathrm{d}x &= \sum_{k=1}^{\infty}\int_{-n}^{n} f_k(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\int_{-n}^{n}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{|x-r_k|}} \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\,4\sqrt{2n} = 4\sqrt{2n} < +\infty\,.
\end{aligned}
$$

Cosicché la funzione $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ è sommabile in $[-n\,,n]$ per ogni $n \geq 1$ ed in particolare

$$
\left\{x \in [-n\,,n]\,;\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = +\infty\right\}
$$

è di misura 0 per ogni $n \geq 1$. Risulta che anche l'unione numerabile

$$
\left\{x \in \mathbb{R}\,;\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = +\infty\right\} = \bigcup_{n\geq 1}\left\{x \in [-n\,,n]\,;\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = +\infty\right\}
$$

è di misura 0 , cioè la serie $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ converge per quasi ogni $x \in \mathbb{R}$.

Osservazione:

Supponiamo che la successione $\left(r_k\right)_{k\geq 1}$ è densa in $\mathbb{R}$. Allora, indicando con E l'insieme di misura 0

$$
\left\{x \in \mathbb{R}\,;\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = +\infty\right\},
$$

la funzione $g : \mathbb{R} \longrightarrow [0\,,+\infty)$ definita tramite la formula

$$
g(x) := \begin{cases} \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\right)^2 & \text{per } x \notin E \\ 0 & \text{per } x \in E \end{cases}
$$

è misurabile, ma non sommabile in qualsiasi intervallo non degenere.

3) : A) Sia per assurdo $p \in D$ una singolarità essenziale per g e sia Δ_0 un disco aperto centrato in p e tale che $\Delta_0 \cap D = p$. Usando una delle caratterizzazioni delle singolarità essenziali viste a lezione (Teorema di Casorati-Weierstrass) sappiamo che $g(\Delta_0 \setminus \{p\})$ è denso in $\mathbb{C}$. In particolare esiste un disco aperto più piccolo $\Delta_1 \subset \Delta_0$ centrato in p tale che $g(\Delta_0 \setminus \overline{\Delta_1})$ interseca $U_0 := U$ e per il teorema della mappa aperta $U_1 := g(\Delta_0 \setminus \overline{\Delta_1}) \cap U$ è un aperto non vuoto contenuto in U.

In modo analogo si riesce a trovare un disco aperto $\Delta_2 \subset \Delta_1$ centrato in p tale che $U_2 := g(\Delta_1 \setminus \overline{\Delta_2}) \cap U_1$ è un aperto non vuoto contenuto in U_1 (si noti che ogni punto in U_2 ha almeno una controimmagine tramite g in ognuna delle due corone circolari disgiunte $\Delta \setminus \overline{\Delta_1}$ e $\Delta_1 \setminus \overline{\Delta_2}$).

Iterando questa costruzione $n+1$ volte, si trova una catena

$$\Delta_{n+1} \subset \Delta_n \subset \cdots \subset \Delta_2 \subset \Delta_1 \subset \Delta_0$$

di dischetti aperti centrati in p e una catena di aperti non vuoti

$$U_{n+1} \subset U_n \subset \cdots \subset U_2 \subset U_1 \subset U_0 = U$$

tali che, per ogni naturale $i \leq n+1$, si ha $U_i = g(\Delta_{i-1} \setminus \overline{\Delta_i}) \cap U_{i-1}$. In particolare, per ogni $q \in U_{n+1}$ la controimmagine $g^{-1}(q)$ ha almeno un elemento in ciascuna delle $n+1$ corone circolari disgiunte della forma $\Delta_{i-1} \setminus \overline{\Delta_i}$. Ne segue che $g^{-1}(q)$ consiste di almeno $n+1$ punti contraddicendo la nostra ipotesi.

B) Sia per assurdo $p \in D$ una singolarità essenziale per g. Sia Δ un disco aperto centrato in p e tale che $\Delta \cap D = p$ e sia r il raggio di Δ. Sia $\Delta_{1/n}$ il disco aperto centrato in p e di raggio r/n. Come nel punto B) l'immagine $g(\Delta_{1/n} \setminus \{p\})$ è un aperto denso in $\mathbb{C}$ per ogni naturale n. Per il teorema della mappa aperta abbiamo inoltre che $U_{1/n} := g(\Delta_{1/n} \setminus \{p\}) \cap U$ è un aperto denso contenuto in U.

Per il teorema di Baire ogni intersezione numerabile di aperti densi contenuti in U è non vuota, in particolare $\bigcap\limits_{i \in \mathbb{N}} U_{1/n}$ è non vuota. Sia $q \in \bigcap\limits_{i \in \mathbb{N}} U_{1/n}$, allora q appartiene all'immagine $g(\Delta_{1/n} \setminus \{p\})$ per ogni n. Ne segue che $g^{-1}(q)$ ha cardinalità infinita contreddicendo la nostra ipotesi (se $g^{-1}(q)$ fosse un insieme finito esisterebbe n tale che $g^{-1}(q) \cap \Delta_{1/n} = \emptyset$).

C) Applichiamo l'enunciato del punto B) alla funzione $g : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ definta da $g(z) = f(1/z)$. Siccome $1/z$ è iniettiva l'aperto U soddisfa l'ipotesi dell'enunciato del punto B). Per il punto B) possiamo quindi assumere che g abbia un polo di ordine $m \geq 0$ nell'origine.

Siccome f è olomorfa su $\mathbb{C}$, esiste una successione a valori complessi (a_i) tale che $f(z) = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i z^i$ per ogni $z \in \mathbb{C}$. Di conseguenza si ha $g(z) = f(1/z) = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i z^{-i}$ per ogni numero complesso $z \neq 0$. Siccome g ha un polo di ordine m in 0, dall'unicità dello sviluppo in serie bilaterale segue che $a_i = 0$ per ogni $i > m$ e quindi $f(z) = \sum_{i=0}^{m} a_i z^i$ è una funzione polinomiale.

Invece di usare l'unicità dello sviluppo in serie bilaterale si può anche argomentare direttamente osservando che se $j > m$ la funzione $z^{j-1}g(z)$ si estende ad una funzione olomorfa su $\mathbb{C}$: quindi se γ è il bordo orientato positivamente di un cerchio centrato in 0 deve essere

$$\int_\gamma z^{j-1} g(z)\, dz = 0\,.$$

Per la teoria delle serie di potenze la funzione

$$z^{j-1}g(z) = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i z^{-i+j-1}$$

converge uniformemente su ogni compatto contenuto in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ e in particolare su γ, quindi

$$\begin{aligned} 0 &= \int_\gamma z^{j-1} g(z)\, dz = \int_\gamma \sum_{i=0}^{+\infty} a_i z^{-i+j-1}\, dz \\ &= \sum_{i=0}^{+\infty} \int_\gamma a_i z^{-i+j-1}\, dz = \int_\gamma a_j z^{-1}\, dz = 2\pi\sqrt{-1}a_j \end{aligned}$$

(nella penultima disuguaglianza abbiamo usato l'esattezza di $z^k dz$ per ogni intero $k \neq -1$). Anche in questo modo si ottiene che $a_j = 0$ per $j > m$ e dunque che f è una funzione polinomiale di grado m.

D) La funzione definita da $h(z) := z\,e^z$ è una funzione, non polinomiale, olomorfa su $\mathbb{C}$ e $h^{-1}(0)$ consiste del solo punto 0.

4) **:** i) La funzione (di variabile reale) integranda è continua su $\mathbb{R}$ e asintotica a $1/x^3$ a $+\infty$ e a $+\infty$. Ne segue che l'integrale improprio proposto converge e

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\ dx}{(x^2+2x+5)^2} = \lim_{r\to+\infty} \int_{-R}^{+R} \frac{x\ dx}{(x^2+2x+5)^2}\,.$$

Per calcolare l'ultimo limite consideriamo la funzione f meromorfa su $\mathbb{C}$ definita da $f(z) = \dfrac{z}{(z^2+2z+5)^2}$. Il denominatore di f si annulla solo nei punti $p_1 = -1+2i$ e $p_2 = -1-2i$ e in entrambi questi punti si annulla con molteplicità pari a 2, ne segue che f è olomorfa ovunque tranne che in p_1 e p_2 e su questi punti ha dei poli di ordine pari a 2.

Per calcolare il limite usiamo il metodo dei residui integrando la 1-forma $f(z)\ dz$ lungo il cammino

$$\gamma_R = \gamma_{1,R} + \gamma_{2,R}$$

dove

- $\gamma_{1,R}$ è il segmento che va da $-R$ a R,
- $\gamma_{2,R}$ è la semicirconferenza $\{x+iy\ : x^2+y^2 = R\ , y \geq 0\}$ percorsa in senso antiorario,

Se $R > |p_1| = \sqrt{5}$, l'unico polo di f contenuto nella parte limitata di piano delimitata da γ_R è p_1. Per il teorema dei residui abbiamo

$$\int_{\gamma_R} f(z)\ dz = \int_{\gamma_{1,R}} f(z)\ dz + \int_{\gamma_{2,R}} f(z)\ dz = 2\pi i\, Res(f, p_1)\,.$$

Siccome la differenza tra i gradi di denominatore e numeratore di f è pari a $3 \geq 2$ possiamo applicare il lemma del grande cerchio. Ne deduciamo che $\lim\limits_{r\to+\infty} \displaystyle\int_{\gamma_{2,R}} f(z)\ dz = 0$ e quindi

$$\lim_{r\to+\infty} \int_{-R}^{+R} \frac{x\ dx}{(x^2+2x+5)^2} = \lim_{r\to+\infty} \int_{\gamma_{1,R}} f(z)\ dz = 2\pi i\, Res(f, p_1)\,.$$

Rimane da calcolare il residuo di f in p_1. Siccome $p_1 = -1+2i$ è polo di ordine 2 per f abbiamo

$$
\begin{aligned}
Res(f,p_1) &= \lim_{z\to -1+2i} \big(f(z)(z-(-1+2i))^2\big)' \\
&= \lim_{z\to -1+2i} \left(\frac{z}{(z-(-1-2i))^2}\right)' \\
&= \lim_{z\to -1+2i} \left(\frac{z}{(z+1+2i))^2}\right)' \\
&= \lim_{z\to -1+2i} \frac{(z+1+2i)^2 - 2(z+1+2i)z}{(z+1+2i)^4} \\
&= \left(\frac{-z+1+2i}{(z+1+2i)^3}\right)_{|\,z=-1+2i} \\
&= \frac{i}{32}\,.
\end{aligned}
$$

In conclusione otteniamo

$$
\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\,dx}{(x^2+2x+5)^2} = \lim_{r\to+\infty} \int_{-R}^{+R} \frac{x\,dx}{(x^2+2x+5)^2} = 2\pi i \frac{i}{32} = -\frac{\pi}{16}\,.
$$

ii) Sia g la funzione meromorfa su $\mathbb{C}$ definita da $g(z) = \dfrac{1}{z^2+6z+10}$. Il denominatore di g si annulla solo nei punti $q_1 = -3+i$ e $q_2 = -3-i$ e in questi punti si annulla semplicemente. Quindi g ha solo 2 poli, q_1 e q_2, e questi poli sono semplici. Con gli stessi argomenti usati per il punto i) si ottiene

$$
\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+6x+10} = 2\pi i\, Res(g,q_1)\,.
$$

In questo caso, siccome $q_1 = -3+i$ è un polo semplice per g, si ha

$$
Res(g,q_1) = \lim_{z\to -3+i} g(z)\big(z-(-3+i)\big) = \lim_{z\to -3+i} \frac{1}{z-(-3-i)} = \frac{1}{2i}\,.
$$

Infine si conclude

$$
\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+6x+10} = 2\pi i\, Res(g,q_1) = \frac{2\pi i}{2i} = \pi\,.
$$