NOME: .... **MATRICOLA:** ....

Corso di Laurea in Matematica, A.A. 2010/2011
Analisi Reale e Complessa, Esame del 18.03.2011

1) Si verifichi che la funzione $F : \big(0\,,+\infty\big) \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$F(s) := \int_0^{+\infty} e^{-sx}\,\frac{\sin^2 x}{x^2}\,\mathrm{d}x\ , \qquad s > 0$$

è due volte derivabile. Si calcoli la seconda derivata e si trovino i valori di $F'(s)$ e di $F(s)$ per ogni $s > 0$.

2) Siano $D \subset \mathbb{C}$ un dominio e $u : D \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione armonica.
Se u^2 ammette un punto di massimo locale, deve allora essere costante in tutti i casi?
È la funzione u^2 sempre armonica?

3) Indicheremo con ln la funzione olomorfa (ramo olomorfo del logaritmo che è una funzione multivalente) definita nel dominio

$$\left\{ \rho e^{i\theta}\,;\ \rho > 0\,, -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2} \right\}$$

tramite $\ln\left(\rho e^{i\theta}\right) := \ln\rho + i\theta$ $\left(\text{per esempio, } \ln(-1) = i\pi \text{ e } \ln i = \dfrac{i\pi}{2}\right)$.

Si calcoli l'integrale improprio

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\left(\ln x\right)^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{\substack{r\to+\infty \\ 0<\varepsilon\to 0}} \left(\int\limits_{-r}^{-\varepsilon} \frac{\left(\ln x\right)^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x + \int\limits_{\varepsilon}^{r} \frac{\left(\ln x\right)^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \right)$$

usando il teorema dei residui per una famiglia adatta di curve chiuse regolari a tratti nel semipiano superiore. Poi, confrontando gli integrali

$$\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{\left(\ln x\right)^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \quad \text{e} \quad \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\left(\ln x\right)^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

e sapendo che

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = 0 \quad \left(\textit{vedi:} \ \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \overset{t=\frac{1}{s}}{=} -\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\ln t}{s^2+1}\,\mathrm{d}s \right),$$

si calcoli

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\left(\ln x\right)^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

Soluzioni:

1) **:** Siccome

$$0 \le e^{-sx}\frac{\sin^2 x}{x^2} = e^{-sx}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \le e^{-sx}\,, \qquad x > 0\,,\ s > 0\,,$$

la funzione F è ben definita.

La derivabilità di $F(s)$ sotto il segno dell'integrale è possibile in ogni $s \in (0, +\infty)$. Infatti, esiste la derivata parziale

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(e^{-sx}\frac{\sin^2 x}{x^2}\right) = -\,e^{-sx}\frac{\sin^2 x}{x}\,, \qquad x > 0\,,\ s > 0$$

e, per $x > 0\,, s \ge \varepsilon > 0$, abbiamo la maggiorazione

$$\left|\frac{\partial}{\partial s}\left(e^{-sx}\frac{\sin^2 x}{x^2}\right)\right| = \left|e^{-sx}\,\frac{\sin x}{x}\,\sin x\right| \le e^{-sx} \le e^{-\varepsilon x} \qquad (*)$$

dove la funzione $e^{-\varepsilon x}$ è integrabile su $(0, +\infty)$. Così F risulta derivabile in ogni $s \in (0, +\infty)$ ed abbiamo

$$F'(s) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial s}\left(e^{-sx}\frac{\sin^2 x}{x^2}\right) \mathrm{d}x\,.$$

Ora possiamo derivare anche $F'(s)$ sotto il segno dell'integrale perché esiste la derivata parziale

$$\frac{\partial^2}{\partial s^2}\left(e^{-sx}\frac{\sin^2 x}{x^2}\right) = \frac{\partial}{\partial s}\left(-\,e^{-sx}\frac{\sin^2 x}{x}\right) = e^{-sx}\sin^2 x$$

e, per $x > 0\,, s \ge \varepsilon > 0$, abbiamo la maggiorazione

$$\left|\frac{\partial^2}{\partial s^2}\left(e^{-sx}\frac{\sin^2 x}{x^2}\right)\right| \le e^{-sx} \le e^{-\varepsilon x}$$

dove la funzione $e^{-\varepsilon x}$ è integrabile su $(0, +\infty)$. Di conseguenza F è due volte derivabile in ogni $s \in (0, +\infty)$ ed abbiamo

$$F''(s) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial^2}{\partial s^2}\left(e^{-sx}\frac{\sin^2 x}{x^2}\right) \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} e^{-sx}\sin^2 x\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-sx} \frac{1-\cos(2x)}{2} \,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-sx} \,\mathrm{d}x - \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-sx} \cos(2x) \,\mathrm{d}x \,.$$

Il primo integrale si calcola facilmente:

$$\int_0^{+\infty} e^{-sx} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{s} \,.$$

Per calcolare il secondo integrale, calcoliamo l'integrale indefinito

$$\int e^{-sx} \cos(2x) \,\mathrm{d}x \,.$$

Tramite integrazione ripetuta per parti si ottiene

$$\begin{aligned}
&\int e^{-sx} \cos(2x) \,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{s} \int \cos(2x) \,\mathrm{d}e^{-sx} \\
&= -\frac{1}{s} e^{-sx} \cos(2x) - \frac{2}{s} \int e^{-sx} \sin(2x) \,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{s} e^{-sx} \cos(2x) + \frac{2}{s^2} \int \sin(2x) \,\mathrm{d}e^{-sx} \\
&= -\frac{1}{s} e^{-sx} \cos(2x) + \frac{2}{s^2} e^{-sx} \sin(2x) - \frac{4}{s^2} \int e^{-sx} \cos(2x) \,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

da dove deduciamo che

$$\begin{aligned}
\int e^{-sx} \cos(2x) \,\mathrm{d}x &= \frac{1}{1+\frac{4}{s^2}} e^{-sx} \Big(-\frac{1}{s} \cos(2x) + \frac{2}{s^2} \sin(2x) \Big) \\
&= \frac{e^{-sx}}{s^2+4} \Big(2 \sin(2x) - s \cos(2x) \Big) \,.
\end{aligned}$$

Risulta

$$\int_0^{+\infty} e^{-sx} \cos(2x) \,\mathrm{d}x = \frac{s}{s^2+4}$$

e così

$$F''(s) = \frac{1}{2\,s} - \frac{s}{2\,(s^2+4)} = \frac{1}{2\,s} - \frac{(s^2+4)'}{4\,(s^2+4)}\,,$$
$$F'(s) = \frac{1}{2}\ln s - \frac{1}{4}\ln(s^2+4) + C_1 = \frac{1}{4}\ln\frac{s^2}{s^2+4} + C_1\,.$$

Per determinare la costante C_1, rimarchiamo che

$$|F'(s)| = \left|\int\limits_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial s}\left(e^{-sx}\frac{\sin^2 x}{x^2}\right)\mathrm{d}x\right| \le \int\limits_0^{+\infty}\left|\frac{\partial}{\partial s}\left(e^{-sx}\frac{\sin^2 x}{x^2}\right)\right|\mathrm{d}x$$
$$\overset{(*)}{\le} \int\limits_0^{+\infty} e^{-sx}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{s}\,, \qquad s > 0$$

implica $\lim\limits_{s\to+\infty} F'(s) = 0$. Poiché anche $\lim\limits_{s\to+\infty}\ln\dfrac{s^2}{s^2+4} = 0$, risulta che $C_1 = 0$ e così

$$F'(s) = \frac{1}{4}\ln\frac{s^2}{s^2+4}\,, \qquad s > 0\,.$$

Per trovare una formula esplicita anche per $F(s)$, calcoliamo l'integrale indefinito

$$\int \ln\big(s^2+\alpha^2\big)\,\mathrm{d}s\,, \qquad \alpha \ge 0\ :$$

tramite itegrazione per parti si ottiene

$$\begin{aligned}
\int \ln\big(s^2+\alpha^2\big)\,\mathrm{d}s &= s\,\ln\big(s^2+\alpha^2\big) - \int s\,\frac{2\,s}{s^2+\alpha^2}\,\mathrm{d}s \\
&= s\,\ln\big(s^2+\alpha^2\big) - \int \frac{2\,(s^2+\alpha^2) - 2\,\alpha^2}{s^2+\alpha^2}\,\mathrm{d}s \\
&= s\,\ln\big(s^2+\alpha^2\big) - 2\,s + 2\,\alpha\int\frac{1}{\left(\dfrac{s}{\alpha}\right)^2+1}\,\mathrm{d}\left(\frac{s}{\alpha}\right) \\
&= s\,\ln\big(s^2+\alpha^2\big) - 2\,s + 2\,\alpha\,\mathrm{arctg}\frac{s}{\alpha} + C\,.
\end{aligned}$$

Risulta per $F(s)$, $s > 0$, una primitiva di

$$\frac{1}{4}\ln\frac{s^2}{s^2+4} = \frac{1}{4}\ln s^2 - \frac{1}{4}\ln\bigl(s^2+4\bigr)\,,$$

la formula

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{1}{4}\Bigl(s\ln s^2 - 2\,s\Bigr) - \frac{1}{4}\Bigl(s\ln\bigl(s^2+4\bigr) - 2\,s + 4\,\mathrm{arctg}\,\frac{s}{2}\Bigr) + C_2 \\ &= \frac{1}{4}\,s\ln s^2 - \frac{1}{4}\,s\ln\bigl(s^2+4\bigr) - \mathrm{arctg}\,\frac{s}{2} + C_2 \\ &= \frac{1}{4}\,s\ln\frac{s^2}{s^2+4} - \mathrm{arctg}\,\frac{s}{2} + C_2\,. \end{aligned}$$

Per determinare la costante C_2, usiamo la stima

$$\begin{aligned} |F(s)| = \left|\int_0^{+\infty} e^{-sx}\frac{\sin^2 x}{x^2}\,\mathrm{d}x\right| &\le \int_0^{+\infty}\left|e^{-sx}\frac{\sin^2 x}{x^2}\right|\mathrm{d}x \\ &\le \int_0^{+\infty} e^{-sx}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{s}\,, \qquad s>0 \end{aligned}$$

che implica $\lim\limits_{s\to+\infty} F(s) = 0$. Poiché

$$\lim_{s\to+\infty} s\ln\frac{s^2}{s^2+4} = \lim_{s\to+\infty}\frac{1}{s}\ln\frac{1}{\left(1+\dfrac{4}{s^2}\right)^{s^2}} = 0\cdot\ln\frac{1}{e^4} = 0$$

e

$$\lim_{s\to+\infty}\mathrm{arctg}\,\frac{s}{2} = \frac{\pi}{2}\,,$$

risulta $0 = 0 - \dfrac{\pi}{2} + C_2$, cioè $C_2 = \dfrac{\pi}{2}$. Di conseguenza

$$\int_0^{+\infty} e^{-sx}\frac{\sin^2 x}{x^2}\,\mathrm{d}x = F(s) = \frac{\pi}{2} - \mathrm{arctg}\,\frac{s}{2} + \frac{s}{4}\ln\frac{s^2}{s^2+4}\,, \qquad s>0\,.$$

Rimarco. La funzione F possiamo definire con la stessa formula su tutto $\bigl[0\,,+\infty\bigr)$ e risultera continua : infatti, abbiamo

$$\left|e^{-sx}\frac{\sin^2 x}{x^2}\right| \le g(x) := \begin{cases} 1 & \text{per } x\in[0,1] \\ \dfrac{1}{x^2} & \text{per } x\in[1,+\infty) \end{cases}\,, \qquad x\ge 0\,, s\ge 0$$

ove la funzione $g : \big[\,0\,,+\infty\big) \longrightarrow \big[\,0\,,1\,\big]$ è integrabile, perciò possiamo applicare il teorema sulla dipendenza continua da parametri reali.

Risulta che l'ugualità

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-sx}\,\frac{\sin^2 x}{x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{s}{2} + \frac{s}{4}\,\ln\frac{s^2}{s^2+4}$$

vale anche per $s = 0$, cioè abbiamo

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\,.$$

2) : Anzitutto mostriamo che u^2 è armonica se e soltanto se u (quindi anche u^2) è costante.

Infatti, poiché

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^2}{\partial x} &= 2\,u\,\frac{\partial u}{\partial x}\,, \quad & \frac{\partial^2 u^2}{\partial x^2} &= 2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2\,u\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,, \\ \frac{\partial u^2}{\partial y} &= 2\,u\,\frac{\partial u}{\partial y}\,, \quad & \frac{\partial^2 u^2}{\partial y^2} &= 2\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + 2\,u\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{aligned}$$

e così

$$\Delta\big(u^2\big) = 2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + 2\,u\,\underbrace{\Delta u}_{=\,0} = 2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2,$$

u^2 è armonica se e soltanto se

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} \equiv 0 \iff u \text{ è costante.}$$

Ciò nonostante, il principio del massimo vale per u^2 sempre, cioè se u^2 ammette un punto $z_o \in D$ di massimo locale, allora u (quindi anche u^2) dev'essere costante.

Per la dimostrazione scegliamo un intorno $W \subset D$ di z_o tale che

$$u(z)^2 \le u(z_o)^2, \qquad z \in W\,.$$

Se $u(z_o) = 0$, allora $u(z) = 0$ per ogni $z \in W$ ed applicando il principio d'identità per le funzioni armoniche risulta che $u \equiv 0$.

Se $u(z_o) > 0$, allora abbiamo

$$u(z) \leq u(z_o)$$

per z nell'intorno $\{z \in W\,;\, u(z) > 0\} \subset W \subset D$ di z_o e per il principio del massimo per le funzioni armoniche risulta che u è costante.

Finalmente, se $u(z_o) < 0$, allora

$$-\,u(z) = |u(z)| \leq |u(z_o)| = -\,u(z_o)$$

per z nell'intorno $\{z \in W\,;\, u(z) < 0\} \subset W \subset D$ di z_o e per il principio del massimo per le funzioni armoniche risulta che $-\,u$, cioè u è costante.

3) : Indichiamo

$$f(z) := \frac{\big(\ln z\big)^2}{1+z^2}\,, \qquad z \in \mathbb{C}\setminus\Big(\{i\} \cup \big(i\,(-\infty\,,0]\big)\Big)\,.$$

Allora f è una funzione meromorfa con un polo semplice in i ed il suo residuo in i è

$$\operatorname*{Res}_i(f) = \lim_{z\to i}(z-i)f(z) = \lim_{z\to i}\frac{(z-i)(\ln z)^2}{1+z^2} = \lim_{z\to i}\frac{(\ln z)^2}{z+i}$$

$$= \frac{\left(\dfrac{i\pi}{2}\right)^2}{2i} = -\,\frac{\pi^2}{8i}\,.$$

D'altro canto indichiamo, per ogni $\rho > 0$, con $\partial^+ U_\rho^+(0)$ e $\partial^- U_\rho^+(0)$ il semicerchio

$$\big\{z \in \mathbb{C}\,;\, |z| = \rho\,, \mathrm{Im} z \geq 0\big\}$$

orientato contro il senso delle lancette rispettivamente nel senso delle lancette :

$$\partial^+ U_\rho^+(0) \text{ è la curva } [0\,,\pi] \ni t \longmapsto \rho e^{it} \in \mathbb{C}\,,$$
$$\partial^- U_\rho^+(0) \text{ è la curva } [0\,,\pi] \ni t \longmapsto \rho e^{i(\pi-t)} = -\,\rho e^{-it} \in \mathbb{C}\,.$$

Siano adesso $0 < \varepsilon < 1 < r$ e consideriamo la curva chiusa $\gamma_{\varepsilon,r}$ nel semipiano superiore chiuso che si ottiene componendo

il segmento $[-r\,,-\varepsilon]$,
il semicerchio $\partial^- U_\varepsilon^+(0)$,
il segmento $[\varepsilon\,,r]$,

$$\text{il semicerchio } \partial^+ U_r^+(0)\,.$$

Per il teorema dei residui abbiamo

$$\int\limits_{\gamma_{\varepsilon,r}} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \operatorname*{Res}_i(f) = -\,\frac{\pi^3}{4}\ ,$$

quindi

$$\int\limits_{-r}^{-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{\partial^- U_\varepsilon^+(0)} f(z)\,\mathrm{d}z + \int\limits_{\varepsilon}^{r} f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{\partial^+ U_r^+(0)} f(z)\,\mathrm{d}z = -\,\frac{\pi^3}{4}\ ,$$

$$\int\limits_{-r}^{-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{\varepsilon}^{r} f(x)\,\mathrm{d}x = -\,\frac{\pi^3}{4} + \int\limits_{\partial^+ U_\varepsilon^+(0)} f(z)\,\mathrm{d}z - \int\limits_{\partial^+ U_r^+(0)} f(z)\,\mathrm{d}z\ .$$

Ora la stima

$$\begin{aligned}
\Bigg|\int\limits_{\partial^+ U_r^+(0)} f(z)\,\mathrm{d}z\Bigg| &\le \int\limits_{\partial^+ U_r^+(0)} \big|f(z)\big|\,\mathrm{d}|z| = \int\limits_{\partial^+ U_r^+(0)} \left|\frac{(\ln z)^2}{1+z^2}\right|\mathrm{d}|z| \\
&\le \int\limits_{\partial^+ U_r^+(0)} \frac{(\ln r+\pi)^2}{r^2-1}\,\mathrm{d}|z| = \frac{\pi r(\ln r+\pi)^2}{r^2-1} \\
&\le \frac{\pi(\ln r+\pi)^2}{r-1}\,, \qquad r>1
\end{aligned}$$

implica

$$\lim_{r\to+\infty} \int\limits_{\partial^+ U_r^+(0)} f(z)\,\mathrm{d}z = 0\ .$$

Similmente, poiché

$$\begin{aligned}
\Bigg|\int\limits_{\partial^+ U_\varepsilon^+(0)} f(z)\,\mathrm{d}z\Bigg| &\le \int\limits_{\partial^+ U_\varepsilon^+(0)} \big|f(z)\big|\,\mathrm{d}|z| = \int\limits_{\partial^+ U_\varepsilon^+(0)} \left|\frac{(\ln z)^2}{1+z^2}\right|\mathrm{d}|z| \\
&\le \int\limits_{\partial^+ U_\varepsilon^+(0)} \frac{(-\ln\varepsilon+\pi)^2}{1-\varepsilon^2}\,\mathrm{d}|z| \\
&= \frac{\pi\varepsilon(-\ln\varepsilon+\pi)^2}{1-\varepsilon^2}\,, \qquad 0<\varepsilon<1\,,
\end{aligned}$$

abbiamo anche

$$\lim_{0<\varepsilon\to 0} \int\limits_{\partial^+ U_\varepsilon^+(0)} f(z)\,\mathrm{d}z = 0\,.$$

Risulta

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\ln x)^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{\substack{r\to+\infty\\ 0<\varepsilon\to 0}} \Bigg(\int\limits_{-r}^{-\varepsilon} \frac{(\ln x)^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x + \int\limits_{\varepsilon}^{r} \frac{(\ln x)^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \Bigg) \qquad (**)\\
&= -\,\frac{\pi^3}{4}\,.
\end{aligned}$$

Per calcolare

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{(\ln x)^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

facciamo presente che

$$\begin{aligned}
\int\limits_{-r}^{-\varepsilon} \frac{(\ln x)^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x &\overset{x=-t}{=} \int\limits_{\varepsilon}^{r} \frac{\big(\ln(-t)\big)^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int\limits_{\varepsilon}^{r} \frac{\big(\ln t + i\pi\big)^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \int\limits_{\varepsilon}^{r} \frac{(\ln t)^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t + 2\pi i \int\limits_{\varepsilon}^{r} \frac{\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x - \pi^2 \int\limits_{\varepsilon}^{r} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\,.
\end{aligned}$$

Usando ora (**) deduciamo

$$2\int\limits_0^{+\infty} \frac{(\ln x)^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x + 2\pi i \underbrace{\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x}_{=\,0} - \pi^2 \underbrace{\int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x}_{=\,\frac{\pi}{2}} = -\,\frac{\pi^3}{4}$$

e concludiamo che

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{(\ln x)^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^3}{8}\,.$$