NOME: .... **MATRICOLA:** ....

Corso di Laurea in Matematica, A.A. 2011/2012
Analisi Reale e Complessa, Esame del 18.06.2012

1) Calcolando l'integrale doppio

$$\iint\limits_{[0,+\infty)\times[0,+\infty)} e^{-x^4-y^4}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

in due modi diversi: usando direttamente il teorema di Fubini ed usando il teorema di Fubini dopo il passaggio alle coordinate polari, si verifichi l'ugualità

$$\left(\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^4}\,\mathrm{d}x\right)^2 = \frac{\sqrt{\pi}}{4}\int\limits_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+u^4}}\,\mathrm{d}u\ .$$

Indicazione: Si ricordi che

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\ .$$

2) Siano f e g funzioni intere con $|f(z)| \leq |g(z)|$ per ogni $z \in \mathbb{C}$. Mostrare che esiste un elemento w_o del disco unitario chiuso tale che

$$f(z) = w_o\,g(z)\,, \qquad z \in \mathbb{C}\ .$$

3) Si calcoli l'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{x \sin x}{1+x^2} \, \mathrm{d}x = \lim_{r \to +\infty} \int_0^r \frac{x \sin x}{1+x^2} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \lim_{r \to +\infty} \int_{-r}^r \frac{x \sin x}{1+x^2} \, \mathrm{d}x$$

usando il teorema dei residui per una curva chiusa regolare a tratti adatta nel semipiano superiore.

Soluzioni:

1) **:** Siccome la funzione

$$[0,+\infty) \times [0,+\infty) \ni (x\,,y) \longmapsto e^{-x^4-y^4}$$

è continua, quindi misurabile, e positiva, possiamo applicare il teorema di Fubini-Tonelli, ottenendo

$$\begin{aligned}\iint\limits_{[0,+\infty)\times[0,+\infty)} e^{-x^4-y^4}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int\limits_0^{+\infty}\Big(\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^4-y^4}\,\mathrm{d}x\Big)\mathrm{d}y \\ &= \int\limits_0^{+\infty}\Big(\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^4}\mathrm{d}x\Big)e^{-y^4}\mathrm{d}y \\ &= \Big(\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^4}\mathrm{d}x\Big)\int\limits_0^{+\infty} e^{-y^4}\mathrm{d}y \\ &= \Big(\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^4}\mathrm{d}x\Big)^2 .\end{aligned}$$

D'altro canto, passando alle coordinate polari, cioè svolgendo la sostituzione

$$\begin{aligned}&x = \rho\,\cos t\,, \quad y = \rho\,\sin t\,, \\ &\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \left|\det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \rho} & \dfrac{\partial x}{\partial t} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \rho} & \dfrac{\partial y}{\partial t}\end{pmatrix}\right|\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}t = \left|\det\begin{pmatrix}\cos t & -\rho\,\sin t \\ \sin t & \rho\,\cos t\end{pmatrix}\right|\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}t \\ &\qquad = \rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

risulta

$$\iint\limits_{[0,+\infty)\times[0,+\infty)} e^{-x^4-y^4}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_{[0,+\infty)\times[0,\pi/2]} e^{-\rho^4(\cos^4 t+\sin^4 t)}\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}t\ .$$

Possiamo ora applicare il teorema di Fubini-Tonelli anche all'integrale alla parte destra, ottenendo

$$\iint\limits_{[0,+\infty)\times[0,+\infty)} e^{-x^4-y^4}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y =$$

$$\iint\limits_{[0,+\infty)\times[0,\pi/2]} e^{-\rho^4(\cos^4 t+\sin^4 t)}\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}t =$$

$$\int\limits_0^{\pi/2}\Bigg(\int\limits_0^{+\infty} e^{-\rho^4(\cos^4 t+\sin^4 t)}\rho\,\mathrm{d}\rho\Bigg)\mathrm{d}t =$$

$$\int\limits_0^{\pi/2}\frac{1}{2\sqrt{\cos^4 t+\sin^4 t}}\Bigg(\int\limits_0^{+\infty} e^{-\left(\rho^2\sqrt{\cos^4 t+\sin^4 t}\right)^2}\mathrm{d}\Big(\rho^2\sqrt{\cos^4 t+\sin^4 t}\Big)\Bigg)\mathrm{d}t =$$

$$\Big(\text{con } s=\rho^2\sqrt{\cos^4 t+\sin^4 t}\Big)\int\limits_0^{\pi/2}\frac{1}{2\sqrt{\cos^4 t+\sin^4 t}}\underbrace{\Bigg(\int\limits_0^{+\infty} e^{-s^2}\mathrm{d}s\Bigg)}_{=\sqrt{\pi}/2}\mathrm{d}t\ ,$$

cioè

$$\iint\limits_{[0,+\infty)\times[0,+\infty)} e^{-x^4-y^4}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{\sqrt{\pi}}{4}\int\limits_0^{\pi/2}\frac{1}{\sqrt{\cos^4 t+\sin^4 t}}\,\mathrm{d}t\ .$$

Ma

$$\begin{aligned}\int\limits_0^{\pi/2}\frac{1}{\sqrt{\cos^4 t+\sin^4 t}}\,\mathrm{d}t &= \int\limits_0^{\pi/2}\frac{1}{\cos^2 t\sqrt{1+\dfrac{\sin^4 t}{\cos^4 t}}}\,\mathrm{d}t\\ &= \int\limits_0^{\pi/2}\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^4 t}}\,\mathrm{d}\big(\mathrm{tg}\,t\big)\\ \big(\text{con } u=\mathrm{tg}\,t\big) &= \int\limits_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+u^4}}\,\mathrm{d}u\end{aligned}$$

e così concludiamo :

$$\iint\limits_{[0,+\infty)\times[0,+\infty)} e^{-x^4-y^4}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{\sqrt{\pi}}{4}\int\limits_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+u^4}}\,\mathrm{d}u\,.$$

2) : Se $g\equiv 0$, allora $|f(z)|\leq|g(z)|$ implica $f\equiv 0$, perciò abbiamo

$$f(z)=w_o\,g(z)\,,\qquad z\in\mathbb{C}$$

per non importa che w_o nel disco unitario chiuso.

Supponiamo adesso che g non è identicamente zero. Allora l'insieme $\mathcal{Z}$ degli zeri di g è un insieme discreto, cioè per ogni $z_o\in\mathcal{Z}$ esiste un $r_{z_o}>0$ tale che $U_{r_{z_o}}(z_o)=\{z\in\mathbb{C}\,;\,|z-z_o|<r_{z_o}\}$ non contiene nessun punto di $\mathcal{Z}$ diverso da z_o. In particolare $\mathbb{C}\setminus\mathcal{Z}\subset\mathbb{C}$ è un insieme aperto.

Poniamo

$$F(z):=\frac{f(z)}{g(z)}\,,\qquad z\in\mathbb{C}\setminus\mathcal{Z}\,.$$

La funzione $F:\mathbb{C}\setminus\mathcal{Z}\longrightarrow\mathbb{C}$ è olomorfa e

$$|F(z)|=\frac{|f(z)|}{|g(z)|}\leq 1\,,\qquad z\in\mathbb{C}\setminus\mathcal{Z}\,.$$

Perciò se $z_o\in\mathcal{Z}$ e $r_{z_o}>0$ è tale che

$$U_{r_{z_o}}(z_o)\setminus\{z_o\}\subset\mathbb{C}\setminus\mathcal{Z}\,,$$

allora F è limitata in $U_{r_{z_o}}(z_o)\setminus\{z_o\}$ e per il teorema di prolungamento di Riemann risulta che la restrizione di F su $U_{r_{z_o}}(z_o)\setminus\{z_o\}$ ammette una estensione olomorfa su $U_{r_{z_o}}(z_o)$. Di conseguenza F si estende ad una funzione olomorfa su $(\mathbb{C}\setminus\mathcal{Z})\cup\{z_o\}$.

Concludiamo che F si estende ad una funzione olomorfa su tutto

$$(\mathbb{C}\setminus\mathcal{Z})\cup\mathcal{Z}=\mathbb{C}\,,$$

cioè ad una funzione intera, che continuamo ad indicare con F.

Ora, tenendo conto che $|F(z)|\leq 1$, il teorema di Liouville implica che F è costante, cioè uguale in ogni $z\in\mathbb{C}$ ad un elemento w_o del disco unitario chiuso. Chiaramente, avendo

$$f(z)=F(z)\,g(z)=w_o\,g(z)$$

per ogni z nell'insieme denso $\mathbb{C}\setminus\mathcal{Z}$, abbiamo la stessa relazione per ogni $z \in \mathbb{C}$.

3) : La funzione

$$f(z) := \frac{z\,e^{iz}}{1+z^2}$$

è meromorfa sul piano complesso, con poli semplici in i e $-i$. Il residuo di f in i è

$$\begin{aligned}\operatorname*{Res}_i(f) &= \lim_{z\to i}(z-i)\,f(z)\\ &= \lim_{z\to i}(z-i)\,\frac{z\,e^{iz}}{(z-i)(z+i)} = \lim_{z\to i}\frac{z\,e^{iz}}{z+i}\\ &= \frac{i\,e^{-1}}{2i} = \frac{1}{2\,e}\;.\end{aligned}$$

Indichiamo, per $w \in \mathbb{C}$ e $r > 0$, con $\partial^+ U_r^+(w)$ e $\partial^- U_r^+(w)$ le curve con lo stesso sostegno uguale al semicerchio superiore

$$\big\{z \in \mathbb{C}\,;\, |z-w| = r\,, \mathrm{Im} z \geq 0\big\}\;,$$

la prima orientata in senso antiorario (positivo), mentre la seconda in senso orario (negativo) :

$$\begin{gathered}\partial^+ U_r^+(w) \text{ è la curva } [0\,,\pi] \ni t \longmapsto w + r\,e^{it} \in \mathbb{C}\,,\\ \partial^- U_r^+(w) \text{ è la curva } [0\,,\pi] \ni t \longmapsto w + r\,e^{i(\pi-t)} = w - r\,e^{-it} \in \mathbb{C}\,.\end{gathered}$$

Sia adesso $r > 1$ e consideriamo la curva chiusa regolare a tratti γ_r nel semipiano superiore chiuso che si ottiene componendo

$$\begin{gathered}\text{il segmento } [-r\,,r] \text{ con}\\ \text{il semicerchio } \partial^+ U_r^+(0)\,.\end{gathered}$$

Poiché γ_r aggira il solo polo i, per il teorema dei residui otteniamo

$$\begin{aligned}\int_{-r}^{r} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\partial^+ U_r^+(0)} f(z)\,\mathrm{d}z &= \int_{\gamma_r} f(z)\,\mathrm{d}z\\ &= 2\pi i\,\operatorname*{Res}_i(f)\\ &= \frac{\pi i}{e}\;,\end{aligned}$$

quindi

$$\int_{-r}^{r} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi i}{e} - \int_{\partial^+ U_r^+(0)} f(z)\,\mathrm{d}z\ .$$

Ora, poiché

$$f(z) = \frac{z}{1+z^2} \cdot e^{i\,z}$$

e

$$\varlimsup_{r\to+\infty} \sup_{z\in\partial^+ U_r^+(0)} \left|\frac{z}{1+z^2}\right| \le \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{r}{r^2-1} = 0\ ,$$

per il lemma di Jordan abbiamo

$$\lim_{r\to+\infty} \int_{\partial^+ U_r^+(0)} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

e risulta

$$\lim_{r\to+\infty} \int_{-r}^{r} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi i}{e}\ .$$

In particolare

$$\begin{aligned}\lim_{r\to+\infty} \int_{-r}^{r} \frac{x\,\sin x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x &= \lim_{r\to+\infty} \int_{-r}^{r} \operatorname{Im} f(x)\,\mathrm{d}x = \operatorname{Im}\left(\lim_{r\to+\infty} \int_{-r}^{r} f(x)\,\mathrm{d}x\right)\\ &= \frac{\pi}{e}\end{aligned}$$

e di conseguenza

$$\begin{aligned}\int_{0}^{+\infty} \frac{x\,\sin x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x &= \lim_{r\to+\infty} \int_{0}^{r} \frac{x\,\sin x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \lim_{r\to+\infty} \int_{-r}^{r} \frac{x\,\sin x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{\pi}{2\,e}\ .\end{aligned}$$