NOME: .... **MATRICOLA:** ....

Corso di Laurea in Fisica, A.A. 2009/2010
Calcolo 1, Esame scritto del 19.01.2010

1) Data la funzione

$$f(x) = e^{1/x}\,\frac{x^2}{x+1}\,,$$

a) determinare il dominio (massimale) di f ;

b) trovare tutti gli asintoti di f ;

c) trovare tutti i massimi e minimi locali di f ;

d) tracciare un grafico qualitativo per f .

2) Calcolare una primitiva della funzione

$$f(x) = \frac{\ln(\sqrt{x})}{(x-1)^2}\ .$$

3) Studiare convergenza assoluta e semplice della serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x-4)^k}{4^k\, k}$$

e si giustifichi la risposta.

4) Calcolare i massimi e minimi locali della funzione sul piano tramite la formula

$$f(x,y) = x^3 + xy + y^2 \ .$$

5) Data la forma differenziale

$$\omega = \left(\frac{y}{1+(xy)^2} + \frac{1}{x} \right) \mathrm{d}x + \left(\frac{x}{1+(xy)^2} \right) \mathrm{d}y \ ,$$

calcolare l'integrale $\displaystyle\int_\gamma \omega$ dove

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} 2+\cos(t) \\ \frac{1}{4}\big(1+\sin(t)\big) \end{pmatrix} \ , \quad t \in \Big[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \Big] \ .$$

Soluzioni:

1) **:** a) $f(x)$ è definito per ogni $x \in \mathbb{R}$ per quale hanno senso $\dfrac{1}{x}$ e $\dfrac{1}{x+1}$, cioè per $x \neq 0$ e $x \neq -1$. Perciò il dominio di f è

$$\mathbb{R} \setminus \big\{ -1\,,0 \big\} = \big(-\infty, -1 \big) \cup \big(-1, 0 \big) \cup \big(0, +\infty \big) .$$

b) Per trovare gli asimtoti verticali calcoliamo i seguenti limiti :

$$\lim_{x \to -1-0} f(x) = e^{-1} \lim_{x \to -1-0} \frac{1}{x+1} = -\infty \ ,$$

$$\lim_{x \to -1+0} f(x) = e^{-1} \lim_{x \to -1+0} \frac{1}{x+1} = +\infty \ ,$$

$$\lim_{x \to 0-0} f(x) = \lim_{x \to 0-0} e^{1/x} x^2 \overset{t=1/x}{=} \lim_{t \to -\infty} \frac{e^t}{t^2} = 0 \ ,$$

$$\lim_{x \to 0+0} f(x) = \lim_{x \to 0+0} e^{1/x} x^2 \overset{t=1/x}{=} \lim_{t \to +\infty} \frac{e^t}{t^2} = +\infty \ .$$

Cosicché la retta $x = -1$ è un asintoto verticale di f sia da sinistra che da destra, mentre in $x = 0$ è un asintoto verticale solo da destra. Rimarchiamo che f ha in $x = 0$ limite sinistro 0 e la sua estensione per continuità a $\big(-1\,, 0 \big]$ ha anche derivata sinistro $= 0$ in $x = 0$:

$$\lim_{x \to 0-0} \frac{f(x) - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0-0} e^{1/x} \frac{x}{x+1} \overset{t=1/x}{=} \lim_{t \to -\infty} e^t \frac{1}{1+t} = 0 \ .$$

La prima condizione per l'esistenza di un asintoto obliquo per $x \to \pm\infty$ è l'esistenza del limite finito

$$m_{\pm} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} e^{1/x} \frac{x}{x+1} = 1 \, .$$

La seconda condizione perché esisti un asintoto obliquo per $x \to \pm\infty$, necessariamente di forma

$$y = m_{\pm} x + n_{\pm} = x + n_{\pm} \ ,$$

è l'esistenza del limite finito

$$n_{\pm} = \lim_{x \to \pm\infty} \big(f(x) - m_{+} x \big) = \lim_{x \to \pm\infty} \big(f(x) - x \big) \, .$$

Verifichiamo che anche questo limite esiste :

$$
\begin{aligned}
n_\pm &= \lim_{x\to\pm\infty} e^{1/x}\,\frac{x^2}{x+1} - x = \lim_{x\to\pm\infty} \Big(e^{1/x}\,x - \big(x+1\big)\Big)\frac{x}{x+1} \\
&= \lim_{x\to\pm\infty} \Big(\big(e^{1/x} - 1\big)\,x - 1\Big) \overset{t=1/x}{=} \lim_{t\to 0\pm 0} \left(\frac{e^t - 1}{t} - 1\right) \\
&= 1 - 1 = 0\,.
\end{aligned}
$$

Cosicché

$$
\begin{aligned}
&y = x \ \text{ è un asintoto obliquo di } f \text{ per } x \to +\infty\,, \\
&y = x \ \text{ è un asintoto obliquo di } f \text{ per } x \to -\infty\,.
\end{aligned}
$$

c) Per trovare gli intervalli di monotonia e gli extremi locali di f, dobbiamo prima calcolare la sua derivata :

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= e^{1/x}\left(-\frac{1}{x^2}\right)\frac{x^2}{x+1} + e^{1/x}\,\frac{2\,x\,(x+1) - x^2}{(x+1)^2} \\
&= \ - e^{1/x}\,\frac{1}{x+1} + e^{1/x}\,\frac{x^2 + 2\,x}{(x+1)^2} \\
&= e^{1/x}\,\frac{x^2 + x - 1}{(x+1)^2}\,.
\end{aligned}
$$

Risulta che i zeri di f' sono le radici dell'equazione $x^2 + x - 1 = 0$:

$$
x_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\,, \quad x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\,.
$$

Inoltre, f' è > 0 in $\big(-\infty\,, x_1\big)\cup\big(x_2\,, +\infty\big)$ ed è < 0 in $\big(x_1\,, x_2\big)\setminus\big\{-1, 0\big\}$, perciò f risulta ad essere

$$
\begin{aligned}
&\text{strettamente crescente in } \big(-\infty\,, x_1\big)\,, \\
&\text{strettamente decrescente in } \big(x_1\,, -1\big)\,, \\
&\text{strettamente decrescente in } \big(-1\,, 0\big)\,, \\
&\text{strettamente decrescente in } \big(0\,, x_2\big)\,, \\
&\text{strettamente crescente in } \big(x_2\,, +\infty\big)\,.
\end{aligned}
$$

In particolare, x_1 è un punto di massimo locale e x_2 è un punto di minimo locale. Rimarchiamo che

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \approx -1,618\,,\\
f(x_1) &= -\frac{2+\sqrt{5}}{\exp\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)} \approx -2,28\,,\\
x_2 &= \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \approx 0,618\,,\\
f(x_2) &= \exp\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\big(\sqrt{5}-2\big) \approx 1,19\,.
\end{aligned}
$$

Possiamo trovare anche gli intervalli di convessità e di concavità di f , e quindi anche i suoi punti di flesso, calcolando la seconda derivata :

$$
\begin{aligned}
&f''(x)\\
&= e^{1/x}\left(-\frac{1}{x^2}\right)\frac{x^2+x-1}{(x+1)^2}\\
&\qquad\qquad + e^{1/x}\,\frac{(2x+1)(x+1)^2-2\,(x+1)(x^2+x-1)}{(x+1)^4}\\
&= \frac{e^{1/x}}{(x+1)^2}\left(-\frac{x^2+x-1}{x^2}+\frac{(2x+1)(x+1)-2\,(x^2+x-1)}{x+1}\right)\\
&= e^{1/x}\,\frac{x^2+1}{x^2\,(x+1)^3}\;.
\end{aligned}
$$

Cosicché f'' non ha zeri e

$$
\begin{aligned}
&f''(x) < 0 \ \text{ per } \ x \in \big(-\infty, -1\big)\,,\\
&f''(x) > 0 \ \text{ per } \ x \in \big(-1, 0\big) \cup \big(0, +\infty\big)\,.
\end{aligned}
$$

Di conseguenza f

$$
\begin{aligned}
\text{è concava in } &\big(-\infty, -1\big)\,,\\
\text{è convessa in } &\big(-1, 0\big)\,,\\
\text{è convessa in } &\big(0, +\infty\big)
\end{aligned}
$$

e non ha punti di flesso.

Riportiamo il comportamento di f' e di f nella seguente tabella :

x	$-\infty$		x_1		-1		0		x_2		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	$*$	$-$	$0\ *$	$-$	0	$+$	
f''			$-$		$*$	$+$	$*$		$+$		
f	$-\infty$	$\nearrow$	max	$\searrow$	$-\infty * +\infty$	$\searrow$	$0 * +\infty$	$\searrow$	min	$\nearrow$	$+\infty$

d) Usando le informazioni di cui sopra, è facile tracciare il grafico di f :

$y = x$ è asintoto obliquo di f per $x \to -\infty$. Il grafico di f sale da $-\infty$ fino a $\big(x_1, f(x_1)\big)$, dove ha tangente orizzontale, poi scende a $-\infty$ lungo l'asintoto verticale $x = -1$, restando sempre sotto l'asintoto :

> Infatti, per $x < -1$ la disuguaglianza $f(x) < x$ è equivalente a $e^{1/x} > 1 + \dfrac{1}{x}$ che si verifica facilmente usando il sviluppo della funzione esponenziale in serie di potenze.

Poi il grafico di f scende da $+\infty$ lungo l'asintoto verticale $x = -1$ fino al punto $(0, 0)$, dove ha semiretta tangente orizzontale a sinistra.

Finalmente, il grafico scende da $+\infty$ lungo l'asintoto verticale a destra $x = 0$ fino a $\big(x_2, f(x_2)\big)$, nel quale ha tangente orizzontale, poi sale a $+\infty$ avvicinando sempre di più l'asintoto obliquo $y = x$, restando però sempre sopra l'asintoto:

> Infatti, per $x > 0$ la disuguaglianza $f(x) > x$ è equivalente a $e^{1/x} > 1 + \dfrac{1}{x}$ che si verifica facilmente usando il sviluppo della funzione esponenziale in serie di potenze.

2) : Tramite integrazione per parti si ottiene

$$\int \frac{\ln\big(\sqrt{x}\big)}{(x-1)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \ln x\,\mathrm{d}\frac{1}{1-x} = \frac{1}{2}\,\frac{\ln x}{1-x} - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}x\ .$$

Ora, usando il sviluppo in fratti semplici

$$\frac{1}{x\,(1-x)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}\,,$$

risulta

$$\int \frac{\ln\left(\sqrt{x}\right)}{(x-1)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,\frac{\ln x}{1-x} - \frac{1}{2}\,\ln x + \frac{1}{2}\,\ln|1-x| + C$$
$$= \frac{1}{2}\,\frac{x\ln x}{1-x} + \frac{1}{2}\,\ln|1-x| + C\ .$$

3) : Il raggio di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4^k\,k}\,z^k$$

è

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\dfrac{1}{4^k\,k}}{\dfrac{1}{4^{k+1}\,(k+1)}} = \lim_{k\to\infty} \frac{4\,(k+1)}{k} = 4\,,$$

perciò la serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x-4)^k}{4^k\,k}$ converge assolutamente per

$$|x-4| < 4 \iff x \in \big(0\,,8\big)$$

e non converge nemmeno in modo semplice per

$$|x-4| > 4 \iff x \in \big(-\infty\,,0\big) \cup \big(8\,,+\infty\big)\,.$$

Resta ad esaminare il caso

$$|x-4| = 4 \iff x = 8 \ \text{ oppure } \ x = 0\ \ :$$

Per $x = 8$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x-4)^k}{4^k\,k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

è la serie armonica, quindi diverge, mentre per $x = 0$ la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x-4)^k}{4^k\,k} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k\,\frac{1}{k}$$

è la serie armonica a termini di segno alterno e converge semplicemente secondo il criterio di Leibniz.

4) : I massimi e minimi locali di f sono *punti stazionari*, cioè annullano le derivate parziali di

$$f(x,y) = x^3 + xy + y^2 \,.$$

Per trovarli, calcoliamo le derivate parziali di f :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3\,x^2 + y \,,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = x + 2\,y \,.$$

Risulta che i punti stazionari di f sono le soluzioni del sistema di equazioni

$$\begin{cases} 3\,x^2 + y = 0 \\ x + 2\,y = 0 \end{cases} .$$

Sottraendo la seconda equazione dal doppio della prima, si ottiene

$$6\,x^2 - x = 0 \iff x = 0 \text{ oppure } x = \frac{1}{6} \,.$$

Poiché $y = -\dfrac{x}{2}$, risulta che i punti stazionari di f sono

$$(0,0) \text{ e } \left(\frac{1}{6}\,, -\frac{1}{12}\right) .$$

Per poter dire se il punto stazionario $(0,0)$ è massimo o minimo locale, calcoliamo anche le derivate parziali di secondo ordine :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6\,x \,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 1 \,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2 \,.$$

Perciò

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 0 \,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = 1 \,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = 2$$

e la matrice hessiana di f in $(0,0)$ è

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} .$$

Poiché il determinante della matrice hessiana è

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \cdot 2 - 1^2 = -1 < 0 \,,$$

il punto $(0,0)$ è un punto di sella.

Ora le derivate parziali di secondo ordine in $\left(\frac{1}{6}\,,-\frac{1}{12}\right)$ sono

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{1}{6}\,,-\frac{1}{12}\right) = 1\,,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\left(\frac{1}{6}\,,-\frac{1}{12}\right) = 1\,,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{1}{6}\,,-\frac{1}{12}\right) = 2$$

e risulta la matrice hessiana

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Poiché il determinante della matrice hessiana è

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - 1^2 = 1 > 0\,,$$

mentre l'elemento nell'angolo sinistro superiore è

$$1 > 0$$

la hessiana è definita positiva e quindi il punto $\left(\frac{1}{6}\,,-\frac{1}{12}\right)$ è un punto di minimo locale.

Rimarchiamo che il valore di f in questo punto è $-\frac{1}{432}$ e, siccome f prende (per esempio) anche il valore $-1 = f(-1,0)\,$, $\left(\frac{1}{6}\,,-\frac{1}{12}\right)$ non è un punto di minimo assoluto (che quindi non esiste).

5) : Ricordiamo che una forma differenziale

$$P(x\,,y)\,\mathrm{d}x + Q(x\,,y)\,\mathrm{d}y$$

si chiama *chiusa* se

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

e si chiama *esatta* se ammette una *primitiva*, cioè una funzione $F(x\,,y)$ definita sullo stesso dominio che soddisfa

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P\,, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = Q\,. \tag{*}$$

Se una forma differenziale

$$P(x\,,y)\,\mathrm{d}x + Q(x\,,y)\,\mathrm{d}y$$

e esatta e le funzioni P e Q sono continuamente differenziabili, allora la forma è necessariamente chiusa. L'implicazione reciproca non è in generale vera, ma una forma differenziale chiusa, definita su un dominio stellato (un dominio convesso è stellato!), è automaticamente esatta.

La nostra forma ω è esatta sul semipiano destro aperto che contiene la curva γ. Infatti,

$$\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{y}{1+(xy)^2} + \frac{1}{x}\Big) = \frac{1+(xy)^2 - 2\,x^2y\,y}{\big(1+(xy)^2\big)^2} = \frac{1-(xy)^2}{\big(1+(xy)^2\big)^2}$$

è uguale a

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{1+(xy)^2} = \frac{1+(xy)^2 - 2\,y^2x\,x}{\big(1+(xy)^2\big)^2} = \frac{1-(xy)^2}{\big(1+(xy)^2\big)^2}\,,$$

perciò ω è chiusa. Poiché ogni semipiano è convesso, la forma risulta esatta sul semipiano destro aperto.

Per trovare una primitiva, dobbiamo risolvere il sistema (*) . A questa fine integriamo Q rispetto ad y ottenendo

$$F(x\,,y) = \int \frac{x}{1+(xy)^2}\,\mathrm{d}y = \mathrm{arctg}\,(xy) + C(x)\,,$$

ove $C(x)$ è un valore costante rispetto ad y, ossia una funzione solo di x. Ora scegliamo $C(x)$ tale che anche la prima equazione del sistema (*) sia soddisfatta : poiché

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x\,,y) = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\mathrm{arctg}\,(xy) + C(x)\Big) = \frac{y}{1+(xy)^2} + C'(x)$$

sia uguale a

$$P(x,y) = \frac{y}{1+(xy)^2} + \frac{1}{x}\,,$$

deve valere $C'(x) = \dfrac{1}{x} \iff C(x) = \ln x + C$. Di conseguenza le primitive di ω sono

$$F(x\,,y) = \operatorname{arctg}(xy) + \ln x + C\ .$$

Usando le primitive di ω è facile calcolare l'integrale di ω lungo la curva γ con estremità

$$\gamma\Big(-\frac{\pi}{2}\Big) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}\,, \quad \gamma\Big(\frac{\pi}{2}\Big) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1/2 \end{pmatrix}\ :$$

$$\begin{aligned}\int_\gamma \omega &= F(2\,,1/2) - F(2\,,0) \\ &= \Big(\operatorname{arctg}(1) + \ln 2\Big) - \Big(\operatorname{arctg}(0) + \ln 2\Big) \\ &= \frac{\pi}{4}\quad .\end{aligned}$$