NOME: ....   **MATRICOLA:** ....

Corso di Laurea in Matematica, A.A. 2007/2008
Analisi Matematica 2, Esame scritto del 15.09.2008

1) Determinare gli intervalli in cui la funzione $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definita tramite la formula

$$f(x) = x \log(\operatorname{arctg} x)$$

è uniformamente continua e quelli in cui è lipschitziana.

2) Dire per quali valori del parametro $\alpha \geq 0$ la seguente serie converge:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(\alpha n + \dfrac{1}{n}\right)^{n}} .$$

3) Determinare una primitiva della funzione

$$f(x) = e^{2x} \cos x \ .$$

4) Calcolare l'area della regione piana compresa fra le curve

$$y^2 = 2\,x \,, \qquad x^2 + y^2 = 8 \,.$$

5) Dire se converge l'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{\log(1+x)}{x^2}\, \mathrm{d}x$$

e si giustifichi la risposta.

Soluzioni:

1) **:** f è derivabile e la sua derivata

$$\begin{aligned} f'(x) &= \log(\operatorname{arctg} x) + \frac{x}{\operatorname{arctg} x} \cdot \frac{1}{1+x^2} \\ &= \log(\operatorname{arctg} x) + \frac{1}{\operatorname{arctg} x} \cdot \frac{x}{1+x^2} \end{aligned}$$

è limitata su ogni intervallo della forma $\big(a\,,+\infty\big)$ con $a > 0$, ma non sull'intero $\big(0\,,+\infty\big)$. Infatti, esiste il limite finito

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = \log\frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi}\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{1+x^2} = \log\frac{\pi}{2}\,,$$

mentre

$$\begin{aligned} \lim_{0<x\to 0} f'(x) &= \lim_{0<x\to 0}\log(\operatorname{arctg} x) + \left(\lim_{0<x\to 0}\frac{x}{\operatorname{arctg} x}\right)\left(\lim_{0<x\to 0}\frac{1}{1+x^2}\right) \\ &= -\infty + 1 = -\infty\,. \end{aligned}$$

Risulta che f è lipschitziana sugli intervalli con estremità inferiore > 0, ma non sul tutto $\big(0\,,+\infty\big)$.

Riguardante la continuità uniforma, poiché

$$\begin{aligned} \lim_{0<x\to 0} f(x) &= \lim_{0<x\to 0} x\log(\operatorname{arctg} x) \overset{t=\operatorname{arctg} x}{=} \lim_{0<t\to 0}\operatorname{tg} t\cdot\log t \\ &= \lim_{0<t\to 0}\frac{\operatorname{tg} t}{t}\cdot\big(t\log t\big) = \lim_{0<t\to 0}\frac{\log t}{\dfrac{1}{t}} \overset{\text{de L'Hospital}}{=} \lim_{0<t\to 0}\frac{\dfrac{1}{t}}{-\dfrac{1}{t^2}} \\ &= \lim_{0<t\to 0}\big(-t\big) = 0\,, \end{aligned}$$

f è uniformamente continua su ogni intervallo della forma $\big(0\,,b\big)$. Ma abbiamo già visto che f è lipschitziana e quindi uniformamente continua sugli intervalli della forma $\big(a\,,+\infty\big)$ con $a > 0$. Di conseguenza f è uniformamente continua sul suo intero dominio $\big(0\,,+\infty\big)$.

2) **:** Verifichiamo se il termine generale della serie converge a 0.

Per $\alpha = 0$ abbiamo chiaramente

$$\frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(0n+\dfrac{1}{n}\right)^n} = n^{2n+\frac{1}{n}} \longrightarrow +\infty \,.$$

D'altro canto, se $\alpha > 0$ allora possiamo scrivere

$$\frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(\alpha n+\dfrac{1}{n}\right)^n} = \frac{n^n\, n^{\frac{1}{n}}}{(\alpha n)^n\left(1+\dfrac{1}{\alpha n^2}\right)^n} = \frac{1}{\alpha^n}\cdot\frac{n^{\frac{1}{n}}}{\left(1+\dfrac{1}{\alpha n^2}\right)^{n^2\frac{1}{n}}}$$

e, siccome

$$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1\,, \qquad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\alpha n^2}\right)^{n^2} = e^{\frac{1}{\alpha}}\,,$$

risulta che

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(\alpha n+\dfrac{1}{n}\right)^n} = \left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\alpha^n}\right)\cdot\frac{1}{(e^{\frac{1}{\alpha}})^0} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\alpha^n}$$

è uguale a 0 se e soltanto se $\alpha > 1$.

In particolare la serie diverge per ogni $0 \leq \alpha \leq 1$. Per $\alpha > 1$ sappiamo finora soltanto che il termine generale dela serie converge a zero. Per trovare i casi di convergenza, applichiamo il criterio della radice :

$$\sqrt[n]{\frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(\alpha n+\dfrac{1}{n}\right)^n}} = \frac{n^{1+\frac{1}{n^2}}}{\alpha n+\dfrac{1}{n}} = \frac{n^{\frac{1}{n^2}}}{\alpha+\dfrac{1}{n^2}} \longrightarrow \frac{1}{\alpha}$$

implica che la serie converge per ogni $\alpha > 1$.

3) **:** Usando integrazione per parti si ottiene

$$\begin{aligned}\int e^{2x}\cos x\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int \cos x\,\mathrm{d}e^{2x}\\ &= \frac{e^{2x}}{2}\cos x + \frac{1}{2}\int e^{2x}\sin x\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{e^{2x}}{2}\cos x + \frac{1}{4}\int \sin x\,\mathrm{d}e^{2x}\\ &= \frac{e^{2x}}{2}\cos x + \frac{e^{2x}}{4}\sin x - \frac{1}{4}\int e^{2x}\cos x\,\mathrm{d}x\,,\end{aligned}$$

e poi

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{4}\right)\int e^{2x}\cos x\,\mathrm{d}x &= \frac{e^{2x}}{2}\cos x + \frac{e^{2x}}{4}\sin x + C\,,\\ \int e^{2x}\cos x\,\mathrm{d}x &= \frac{e^{2x}}{5}\big(2\cos x + \sin x\big) + C\,.\end{aligned}$$

Rimarco. Più generalmente abbiamo per ogni $a\,,b\in\mathbb{R}$, almeno uno dei quali non è uguale a zero, cioè con $a^2+b^2>0$,

$$\int e^{ax}\cos\big(bx\big)\,\mathrm{d}x = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\Big(a\cos\big(bx\big) + b\sin\big(bx\big)\Big) + C\,.$$

Supponiamo prima che $a\neq 0$. Usando integrazione per parti si ottiene

$$\begin{aligned}&\int e^{ax}\cos\big(bx\big)\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{a}\int \cos\big(bx\big)\,\mathrm{d}e^{ax}\\ &= \frac{e^{ax}}{a}\cos\big(bx\big) + \frac{b}{a}\int e^{ax}\sin\big(bx\big)\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{e^{ax}}{a}\cos\big(bx\big) + \frac{b}{a^2}\int \sin\big(bx\big)\,\mathrm{d}e^{ax}\\ &= \frac{e^{ax}}{a}\cos\big(bx\big) + \frac{e^{ax}}{a^2}\,b\sin\big(bx\big) - \frac{b^2}{a^2}\int e^{ax}\cos\big(bx\big)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

e risultano successivamente

$$\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)\int e^{ax}\cos\big(b\,x\big)\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{e^{ax}}{a}\cos\big(b\,x\big)+\frac{e^{ax}}{a^2}\,b\sin\big(b\,x\big)+C\,,$$

$$\int e^{ax}\cos\big(b\,x\big)\,\mathrm{d}x=\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\Big(a\cos\big(b\,x\big)+b\sin\big(b\,x\big)\Big)+C\,.$$

Se invece $a=0$ e quindi $b\neq 0$, l'ugualità da dimostrare è

$$\int\cos\big(b\,x\big)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{b}\sin\big(b\,x\big)+C\,,$$

che vale ovviamente.

4) : Calcoliamo prima i punti di intersezione della parabola $y^2=2\,x$ con la circonferenza $x^2+y^2=8$, cioè le soluzione del sistema di equazioni

$$\begin{cases} \quad y^2=2\,x \\ x^2+y^2=8 \end{cases}.$$

Tramite la sostituzione $y^2=2\,x$ nella seconda equazione si ottiene

$$x^2+2\,x-8=0\,,\qquad x=-1\pm 3\,.$$

Poiché $x=\dfrac{y^2}{2}\geq 0$, risulta $x=2$ e poi $y=\pm\sqrt{2\,x}=\pm 2$. Quindi i punti di intersezione ricercati sono

$$\big(2\,,2\big)\,,\quad\big(2\,,-2\big)\,.$$

Tra questi due punti la parabola $y^2=2\,x$ si trova nell'interno della circonferenza $x^2+y^2=8$, mentre per $x>2$ esce dal disco circondato dalla circonferenza. Cosicché la regione in questione è composta da due pezzi :

1) Il primo pezzo è la regione compresa fra il segmento verticale che riunisce $\big(2\,,-2\big)$ con $\big(2\,,2\big)$ e l'arco della parabola $y^2=2\,x$ tra questi

due punti. Questa regione è simmetrica rispetto all'asse delle ascisse e la sua area è

$$2\int_0^2 \sqrt{2\,x}\,\mathrm{d}x \overset{t=\sqrt{2x}}{=} 2\int_0^2 t^2\,\mathrm{d}t = 2\,\frac{t^3}{3}\Bigg|_0^2 = \frac{16}{3}\,.$$

2) Il secondo pezzo è la regione a destra del segmento verticale che riunisce $\big(2\,,-2\big)$ con $\big(2\,,2\big)$, compresa fra questo segmento e l'arco della circonferenza $x^2+y^2=8$ che riunisce i due punti. Anche questa regione è simmetrica rispetto all'asse delle ascisse e la sua area è

$$\begin{aligned}2\int_2^{2\sqrt{2}} \sqrt{8-x^2}\,\mathrm{d}x &\overset{x=2\sqrt{2}\,\sin s}{=} 2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{8(1-\sin^2 s)}\,2\sqrt{2}\,\cos s\,\mathrm{d}s \\ &= 16\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 s\,\mathrm{d}s = 8\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \Big(1+\cos\big(2\,s\big)\Big)\,\mathrm{d}s \\ &= 2\,\pi + 4\,\sin\big(2\,s\big)\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = 2\,\pi - 4\,.\end{aligned}$$

Concludiamo che l'area della regione compresa fra la parabola $y^2=2\,x$ e la circonferenza $x^2+y^2=8$ è uguale a

$$2\int_0^2 \sqrt{2\,x}\,\mathrm{d}x + 2\int_2^{2\sqrt{2}} \sqrt{8-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{16}{3} + 2\,\pi - 4 = 2\,\pi + \frac{4}{3}\,.$$

5) : **Prima soluzione: usando il criterio del confronto.**

L'integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\log\,(1+x)}{x^2}\,\mathrm{d}x \qquad (*)$$

è improprio sia in 0 che all'infinito. Esaminiamo separatamente la convergenza in 0 ed all'infinito.

<u>Riguardante la convergenza all'infinito</u> :

Sappiamo che il logaritmo è dominato all'infinito da qualsiasi potenza strettamente positiva :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log(1+x)}{x^{\varepsilon}} = 0 \text{ per ogni } \varepsilon > 0\,.$$

Risulta che

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\dfrac{\log(1+x)}{x^2}}{\dfrac{1}{x^{2-\varepsilon}}} = 0 \text{ per ogni } \varepsilon > 0$$

e, poiché

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{2-\varepsilon}}\,\mathrm{d}x \text{ è convergente per } \varepsilon < 1\,,$$

il criterio del confronto asintotico implica la convergenza di

$$\int_1^{+\infty} \frac{\log(1+x)}{x^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

Se vogliamo lavorare con una stima esplicita (non asintotica), possiamo ragionare (per esempio) come segue:

Per ogni $x > 0$ abbiamo

$$e^{\sqrt{2x}} = 1 + \frac{\sqrt{2x}}{1!} + \frac{\left(\sqrt{2x}\right)^2}{2!} + \frac{\left(\sqrt{2x}\right)^3}{3!} + \ldots > 1 + \frac{2\,x}{2} = 1 + x\,,$$

$$\log(1+x) < \sqrt{2x}\,,$$

$$\frac{\log(1+x)}{x^2} < \frac{\sqrt{2\,x}}{x^2} = \sqrt{2}\,\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$$

e, poiché

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x \text{ è convergente },$$

il criterio del confronto implica la convergenza di

$$\int_1^{+\infty} \frac{\log(1+x)}{x^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

Riguardante la convergenza in 0 :

Poiché

$$\lim_{0<x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}\overset{\text{de L'Hospital}}{=}\lim_{0<x\to 0}\frac{\dfrac{1}{1+x}}{1}=1$$

e quindi

$$\lim_{0<x\to 0}\frac{\dfrac{\log(1+x)}{x^2}}{\dfrac{1}{x}}=1\,,$$

per il criterio del confronto asintotico la divergenza di

$$\int\limits_0^1\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

implica la divergenza di

$$\int\limits_0^1\frac{\log(1+x)}{x^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

Conclusione : l'integrale improprio (*) diverge.

Seconda soluzione: tramite calcolo diretto.

Calcoliamo una primitiva della funzione $\big(0\,,+\infty\big)\ni x\longmapsto\dfrac{\log(1+x)}{x^2}$:

$$\begin{aligned}\int\frac{\log(1+x)}{x^2}\,\mathrm{d}x&=\int\log(1+x)\,\mathrm{d}\Big(-\frac{1}{x}\Big)\\&=-\frac{\log(1+x)}{x}+\int\frac{1}{x\,(1+x)}\,\mathrm{d}x\\&=-\frac{\log(1+x)}{x}+\int\Big(\frac{1}{x}-\frac{1}{1+x}\Big)\,\mathrm{d}x\\&=-\frac{\log(1+x)}{x}+\log\frac{x}{1+x}\,.\end{aligned}$$

Risulta per ogni $0<a<b<+\infty$:

$$\int_a^b \frac{\log(1+x)}{x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\log(1+a)}{a} - \frac{\log(1+b)}{b} + \log\frac{b}{1+b} - \log\frac{a}{1+a}\,.$$

Poiché

$$\lim_{b\to+\infty} \frac{\log(1+b)}{b} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{b\to+\infty} \log\frac{b}{1+b} = \log 1 = 0\,,$$

l'integrale improprio

$$\begin{aligned}\int_a^{+\infty} \frac{\log(1+x)}{x^2}\,\mathrm{d}x &= \lim_{b\to+\infty} \int_a^b \frac{\log(1+x)}{x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\log(1+a)}{a} - \log\frac{a}{1+a}\end{aligned}$$

converge per ogni $a > 0$, ma l'integrale improprio

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{\log(1+x)}{x^2}\,\mathrm{d}x &= \lim_{0<a\to 0} \int_a^{+\infty} \frac{\log(1+x)}{x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \lim_{0<a\to 0} \frac{\log(1+a)}{a} - \lim_{0<a\to 0} \log\frac{a}{1+a} \\ &= 1 - (-\infty) = +\infty\end{aligned}$$

diverge.