NOME: .... **MATRICOLA:** ....

Corso di Laurea in Fisica, A.A. 2013/2014
Calcolo 2, Esame scritto del 19.02.2014

1) a) Si trovi la soluzione generale dell'equazione differenziale

$$y''' + 2\,y'' - 3\,y = e^x \,. \tag{*}$$

b) Si trovino tutte le soluzioni dell'equazione (*) che soddisfano la condizione

$$\lim_{x \to +\infty} y(x) = 0 \,.$$

2) Si calcoli il volume dell'intersezione dell'ellissoide

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + z^2 \leq 1$$

con il cono

$$z \geq \sqrt{x^2 + y^2} \,.$$

3) Si calcoli il flusso uscente del campo vettoriale piano

$$V(x\,,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{x}{y} \\ \dfrac{y}{x} \end{pmatrix}$$

dalla regione descritta tramite le disuguaglianze

$$x > 0\,,\ y > 0\,,\ xy \geq 1\,,\ x + y \leq \frac{5}{2}\,.$$

4) Consideriamo la funzione periodica di periodo 2π

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

che nell'intervallo $(\,0\,,2\pi\,]$ è data tramite la formula

$$f(x) = \frac{\pi - x}{2}\,, \qquad x \in (\,0\,,2\pi\,]\,.$$

a) Si calcolino i coefficienti di Fourier $c_k(f)\,, k \in \mathbb{Z}\,,$ di f e si studi la convergenza puntuale della serie di Fourier

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(f)\,e^{ikx}\,.$$

b) Si calcoli la somma della serie

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \big|c_k(f)\big|^2\,.$$

Soluzioni:

1) **:** a) L'equazione differenziale da risolvere è lineare ed a coefficienti costanti. Risolviamo prima l'equazione omogenea :

Un zero del polinomio caratteristico $\lambda^3+2\,\lambda^2-3$ si vede subito: $\lambda_1 = 1$. Dividendo $\lambda^3 + 2\,\lambda^2 - 3$ con $\lambda - \lambda_1 = \lambda - 1$ si trova

$$\lambda^3 + 2\,\lambda^2 - 3 = (\lambda - 1)(\lambda^2 + 3\,\lambda + 3)\,.$$

Perciò gli altri due zeri del polinomio caratteristico sono

$$\lambda_{2,3} = \frac{-3 \pm i\sqrt{3}}{2}\,.$$

Risulta che

$$e^x\,, \quad e^{\frac{-3+i\sqrt{3}}{2}\,x}\,, \quad e^{\frac{-3-i\sqrt{3}}{2}\,x}\,,$$

oppure, nell'ambito reale,

$$e^x\,, \quad e^{-\frac{3}{2}\,x}\cos\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}\,x\Big)\,, \quad e^{-\frac{3}{2}\,x}\sin\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}\,x\Big)$$

sono tre soluzioni linearmente indipendenti.

Cosicché la soluzione generale dell'equazione omogenea

$$y''' + 2\,y'' - 3\,y = 0$$

è

$$y(x) = k_1\,e^x + k_2\,e^{\frac{-3+i\sqrt{3}}{2}\,x} + k_3\,e^{\frac{-3-i\sqrt{3}}{2}\,x}\,,$$

oppure

$$y(x) = c_1\,e^x + c_2\,e^{-\frac{3}{2}\,x}\cos\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}\,x\Big) + c_3\,e^{-\frac{3}{2}\,x}\sin\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}\,x\Big),$$

dove $k_1\,,k_2\,,k_3$ rispettivamente $c_1\,,c_2\,,c_3$ sono costanti arbitrari. C'è da notare che la forma complessa è strutturalmente più semplice (per esempio, le derivate successive si calcolano in modo più semplice), mentre la forma "reale" fornisce le soluzioni reali per le costanti $c_1\,,c_2\,,c_3$ reali.

Per trovare una soluzione particolare dell'equazione non omogenea, il modo più semplice è di usare il metodo degli annichilatori:

La non-omogeneità e^x essendo (multiplo costante di) una esponenziale con il coefficiente 1 di x nell'esponente uguale ad un zero semplice del polinomio caratteristico, esiste una soluzione particolare dell'equazione differenziale non omogenea della forma $c\,x\,e^x$ con c una costante. Per la sostituzione di $y(x) = c\,e^x$ in l'equazione non omogenea si ottiene

$$\big(3\,c\,e^x + c\,x\,e^x\big) + 2\big(2\,c\,e^x + c\,x\,e^x\big) - 3\big(c\,x\,e^x\big) = e^x$$

e risulta $c = \dfrac{1}{7}$. Perciò $\dfrac{1}{7}\,x\,e^x$ è una soluzione particolare dell'equazione non omogenea.

Concludiamo che

$$y(x) = c_1\,e^x + c_2\,e^{-\frac{3}{2}\,x}\cos\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}\,x\Big) + c_3\,e^{-\frac{3}{2}\,x}\sin\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}\,x\Big) + \frac{1}{7}\,x\,e^x\,, \qquad c_1\,,c_2\,,c_3 \text{ costanti}$$

è la soluzione generale dell'equazione differenziale

$$y''' + 2\,y'' - 3\,y = e^x\,.$$

Osservazione.

È possibile trovare una soluzione particolare dell'equazione differenziale non omogenea anche usando il metodo della variazione delle costanti :

A questo fine ci conviene usare la forma complessa, cioè di cercare una soluzione particolare sotto la forma

$$y(x) = k_1(x)\,e^x + k_2(x)\,e^{\frac{-3+i\sqrt{3}}{2}\,x} + k_3(x)\,e^{\frac{-3-i\sqrt{3}}{2}\,x}\,.$$

Per ragioni di trasparenza, useremo nei calcoli le notazioni

$$\lambda_1 = 1\,,\quad \lambda_2 = \frac{-3+i\sqrt{3}}{2}\,,\quad \lambda_3 = \frac{-3-i\sqrt{3}}{2}\,,\quad f(x) = e^x\,.$$

Con queste notazioni cercheremo una soluzione particolare di forma

$$y(x) = k_1(x)\,e^{\lambda_1\,x} + k_2(x)\,e^{\lambda_2\,x} + k_3(x)\,e^{\lambda_3\,x}$$

dell'equazione non-omogenea

$$y''' + 2\,y'' - 3\,y = f(x)\,.$$

Per avere

$$y'(x) = \lambda_1 k_1(x)\,e^{\lambda_1\,x} + \lambda_2 k_2(x)\,e^{\lambda_2\,x} + \lambda_3 k_3(x)\,e^{\lambda_3\,x}$$

dobbiamo richiedere

$$k_1'(x)\,e^{\lambda_1 x} + k_2'(x)\,e^{\lambda_2 x} + k_3'(x)\,e^{\lambda_3 x} = 0\,, \tag{1}$$

e per avere poi

$$y''(x) = \lambda_1^2 k_1(x)\,e^{\lambda_1 x} + \lambda_2^2 k_2(x)\,e^{\lambda_2 x} + \lambda_3^2 k_3(x)\,e^{\lambda_3 x}$$

dobbiamo richiedere anche

$$\lambda_1 k_1'(x)\,e^{\lambda_1 x} + \lambda_2 k_2'(x)\,e^{\lambda_2 x} + \lambda_3 k_3'(x)\,e^{\lambda_3 x} = 0\,. \tag{2}$$

Risulta

$$\begin{aligned} y'''(x) = {} & \lambda_1^2 k_1'(x)\,e^{\lambda_1 x} + \lambda_2^2 k_2'(x)\,e^{\lambda_2 x} + \lambda_3^2 k_3'(x)\,e^{\lambda_3 x} \\ & + \lambda_1^3 k_1(x)\,e^{\lambda_1 x} + \lambda_2^3 k_2(x)\,e^{\lambda_2 x} + \lambda_3^3 k_3(x)\,e^{\lambda_3 x} \end{aligned}$$

e tramite sostituzione in l'equazione non omogenea si ottiene

$$\begin{aligned} & \lambda_1^2 k_1'(x)\,e^{\lambda_1 x} + \lambda_2^2 k_2'(x)\,e^{\lambda_2 x} + \lambda_3^2 k_3'(x)\,e^{\lambda_3 x} \\ & + \lambda_1^3 k_1(x)\,e^{\lambda_1 x} + \lambda_2^3 k_2(x)\,e^{\lambda_2 x} + \lambda_3^3 k_3(x)\,e^{\lambda_3 x} \\ & + 2\left(\lambda_1^2 k_1(x)\,e^{\lambda_1 x} + \lambda_2^2 k_2(x)\,e^{\lambda_2 x} + \lambda_3^2 k_3(x)\,e^{\lambda_3 x}\right) \\ & - 3\left(k_1(x)\,e^{\lambda_1 x} + k_2(x)\,e^{\lambda_2 x} + k_3(x)\,e^{\lambda_3 x}\right) = f(x)\,, \end{aligned}$$

cioè, tenendo conto che $\lambda_j^3 + 2\,\lambda_j^2 - 3 = 0$ per $j = 1\,,2\,,3\,,$

$$\lambda_1^2 k_1'(x)\,e^{\lambda_1 x} + \lambda_2^2 k_2'(x)\,e^{\lambda_2 x} + \lambda_3^2 k_3'(x)\,e^{\lambda_3 x} = f(x)\,. \tag{3}$$

Per trovare $k_1'\,,k_2'\,,k_3'$ dobbiamo quindi risolvere il sistema di equazioni lineari costituito da (1), (2), (3) :

$$\left\{ \begin{array}{r} k_1'(x)\,e^{\lambda_1 x} + k_2'(x)\,e^{\lambda_2 x} + k_3'(x)\,e^{\lambda_3 x} = 0 \\ \lambda_1 k_1'(x)\,e^{\lambda_1 x} + \lambda_2 k_2'(x)\,e^{\lambda_2 x} + \lambda_3 k_3'(x)\,e^{\lambda_3 x} = 0 \\ \lambda_1^2 k_1'(x)\,e^{\lambda_1 x} + \lambda_2^2 k_2'(x)\,e^{\lambda_2 x} + \lambda_3^2 k_3'(x)\,e^{\lambda_3 x} = f(x) \end{array} \right. . \tag{4}$$

Consideriamo in sistema $k_j'(x)\,e^{\lambda_j x}$ con $j = 1\,,2\,,3$ come sconosciuti ed usiamo per la soluzione la formula di Cramer :

Poiché

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{vmatrix} = (\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)\,,$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ f(x) & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{vmatrix} = f(x)(\lambda_3 - \lambda_2)\,,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \lambda_1 & 0 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & f(x) & \lambda_3^2 \end{vmatrix} = f(x)(\lambda_1 - \lambda_3)\,,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & 0 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & f(x) \end{vmatrix} = f(x)(\lambda_2 - \lambda_1)\,,$$

otteniamo

$$\begin{aligned} k_1'(x)\,e^{\lambda_1 x} &= \frac{f(x)}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_1)}\,, \\ k_2'(x)\,e^{\lambda_2 x} &= \frac{f(x)}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_3-\lambda_2)}\,, \\ k_3'(x)\,e^{\lambda_3 x} &= \frac{f(x)}{(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_3)}\,. \end{aligned}$$

Di conseguenza

$$\begin{aligned} k_1(x) &= \frac{1}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_1)} \int f(x)\,e^{-\lambda_1 x}\mathrm{d}x\,, \\ k_2(x) &= \frac{1}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_3-\lambda_2)} \int f(x)\,e^{-\lambda_2 x}\mathrm{d}x\,, \\ k_3(x) &= \frac{1}{(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_3)} \int f(x)\,e^{-\lambda_3 x}\mathrm{d}x \end{aligned}$$

e troviamo la soluzione particolare dell'equazione non omogenea

$$\begin{aligned} y(x) = {} & \frac{e^{\lambda_1 x}}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_1)} \int f(x)\,e^{-\lambda_1 x}\mathrm{d}x \\ & + \frac{e^{\lambda_2 x}}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_3-\lambda_2)} \int f(x)\,e^{-\lambda_2 x}\mathrm{d}x \\ & + \frac{e^{\lambda_3 x}}{(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_3)} \int f(x)\,e^{-\lambda_3 x}\mathrm{d}x\,. \end{aligned}$$

Nel nostro caso, con $f(x) = e^{\lambda_1 x}$, abbiamo

$$\begin{aligned}
\int f(x)\, e^{-\lambda_1 x} \mathrm{d}x &= \int \mathrm{d}x = x\,, \\
\int f(x)\, e^{-\lambda_2 x} \mathrm{d}x &= \int e^{(\lambda_1 - \lambda_2) x} \mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\, e^{(\lambda_1 - \lambda_2) x}\,, \\
\int f(x)\, e^{-\lambda_3 x} \mathrm{d}x &= \int e^{(\lambda_1 - \lambda_3) x} \mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_3}\, e^{(\lambda_1 - \lambda_3) x}\,,
\end{aligned}$$

perciò

$$\begin{aligned}
y(x) = &\quad \frac{x\, e^{\lambda_1 x}}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)} \\
&+ \frac{e^{\lambda_1 x}}{(\lambda_1 - \lambda_2)^2 (\lambda_3 - \lambda_2)} + \frac{e^{\lambda_1 x}}{(\lambda_1 - \lambda_3)^2 (\lambda_2 - \lambda_3)}
\end{aligned}$$

è una soluzione particolare dell'equazione non omogenea. Ma

$$\frac{e^{\lambda_1 x}}{(\lambda_1 - \lambda_2)^2 (\lambda_3 - \lambda_2)} + \frac{e^{\lambda_1 x}}{(\lambda_1 - \lambda_3)^2 (\lambda_2 - \lambda_3)}$$

è una soluzione dell'equazione omogenea, quindi già

$$y(x) = \frac{x\, e^{\lambda_1 x}}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)}$$

è una soluzione particolare dell'equazione non omogenea. Poiché

$$\begin{aligned}
(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1) &= \left(\frac{-3 + i\sqrt{3}}{2} - 1 \right) \left(\frac{-3 - i\sqrt{3}}{2} - 1 \right) \\
&= \frac{-5 + i\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{-5 + i\sqrt{3}}{2} = \frac{25 + 3}{4} \\
&= 7\,,
\end{aligned}$$

abbiamo così riottenuto la soluzione particolare $\dfrac{1}{7}\, x\, e^x$ dell'equazione non omogenea.

b) Poiché la soluzione generale dell'equazione differenziale (*) è

$$y(x) = c_1\, e^x + c_2\, e^{-\frac{3}{2} x} \cos\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}\, x \Big) + c_3\, e^{-\frac{3}{2} x} \sin\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}\, x \Big) + \frac{1}{7}\, x\, e^x\,,$$

e

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-\frac{3}{2}x}\cos\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}\,x\Big) = \lim_{x\to+\infty} e^{-\frac{3}{2}x}\sin\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}\,x\Big) = 0\,,$$

la condizione $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x) = 0$ è soddisfatta se e soltanto se

$$\lim_{x\to+\infty}\Big(c_1\,e^x + \frac{1}{7}\,x\,e^x\Big) = 0\,.$$

Ma questo non accade mai, perché per qualsiasi costante c_1 abbiamo

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\Big(c_1\,e^x + \frac{1}{7}\,x\,e^x\Big) &= \lim_{x\to+\infty}\Big(c_1 + \frac{1}{7}\,x\Big)e^x \\ &= \underbrace{\lim_{x\to+\infty}\Big(c_1 + \frac{1}{7}\,x\Big)}_{=+\infty}\cdot\lim_{x\to+\infty} e^x \\ &= +\infty\,.\end{aligned}$$

Pertanto l'equazione (*) non ha nessuna soluzione $y(x)$ che soddisfi la condizione $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x) = 0\,.$

2) : **Soluzione usando il fatto che l'intersezione in questione è un dominio normale rispetto all'asse delle z :**

C'è da calcolare il volume della regione $S\subset\mathbb{R}^3$ situata tra i grafici delle funzioni

$$f:(x\,,y)\longmapsto\sqrt{1-\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}}$$

e

$$g:(x\,,y)\longmapsto\sqrt{x^2+y^2}$$

definite sull'insieme D dei punti $(x\,,y)\in\mathbb{R}^2$ per quali è soddisfatta la conditione $g(x\,,y)\leq f(x\,,y)$:

Poiché

$$\begin{aligned}g(x\,,y)\leq f(x\,,y) &\iff x^2+y^2\leq 1-\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4} \\ &\iff x^2+y^2\leq\frac{4}{5}\,,\end{aligned}$$

D è il disco

$$D=\left\{(x\,,y)\in\mathbb{R}^2\,;\;x^2+y^2\leq\frac{4}{5}\right\}.$$

Risulta

$$\begin{aligned}
\mathrm{Volume}\,(S)&=\int\limits_S \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\int\limits_{(x\,,y\,,z)\in D\,;\,g(x\,,y)\leq z\leq f(x\,,y)}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\\
&=\int\limits_D\Bigg(\int\limits_{g(x\,,y)}^{f(x\,,y)}\mathrm{d}z\Bigg)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int\limits_D\big(f(x\,,y)-g(x\,,y)\big)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\
&=\int\limits_D\left(\sqrt{1-\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}}-\sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.
\end{aligned}$$

Ci conviene ora passare alle coordinate polari. Poiché

$$x^2+y^2\leq\frac{4}{5}\iff\rho=\sqrt{x^2+y^2}\leq\frac{2}{\sqrt{5}}\,,$$

abbiamo

$$D=\left\{(\rho\cos\theta\,,\rho\sin\theta)\in\mathbb{R}^2\,;\;0\leq\theta\leq 2\,\pi\,,0\leq\rho\leq\frac{2}{\sqrt{5}}\right\}.$$

Di conseguenza

$$\begin{aligned}
\mathrm{Volume}\,(S)&=\int\limits_0^{2/\sqrt{5}}\int\limits_0^{2\,\pi}\left(\sqrt{1-\frac{\rho^2}{4}}-\rho\right)\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\\
&=2\,\pi\int\limits_0^{2/\sqrt{5}}\left(\sqrt{1-\frac{\rho^2}{4}}-\rho\right)\rho\,\mathrm{d}\rho\\
&=\pi\int\limits_0^{2/\sqrt{5}}\rho\sqrt{4-\rho^2}\,\mathrm{d}\rho-2\,\pi\int\limits_0^{2/\sqrt{5}}\rho^2\,\mathrm{d}\rho\\
&=-\frac{\pi}{2}\int\limits_0^{2/\sqrt{5}}\sqrt{4-\rho^2}\,\mathrm{d}\big(4-\rho^2\big)-2\,\pi\int\limits_0^{2/\sqrt{5}}\rho^2\,\mathrm{d}\rho
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{\pi}{2}\,\frac{2}{3}\big(4-\rho^2\big)^{3/2}\Big|_{\rho=0}^{\rho=2/\sqrt{5}} - 2\pi\,\frac{\rho^3}{3}\Big|_{\rho=0}^{\rho=2/\sqrt{5}} \\
&= \frac{\pi}{3}\left(8-\frac{64}{5\sqrt{5}}\right) - 2\pi\frac{8}{15\sqrt{5}} \\
&= \frac{8\pi}{3}\left(1-\frac{2}{\sqrt{5}}\right).
\end{aligned}
$$

Soluzione usando il fatto che l'intersezione in questione è un solido di rotazione, quindi si può applicare la formula nota per il volume dei solidi di rotazione :

Ricordiamo che, per $\varphi : [\,a\,,b\,] \longrightarrow [\,0\,,+\infty)$ una funzione continua, il volume del solido di rotazione

$$E = \left\{(x\,,y\,,z) \in \mathbb{R}^3\,; a \leq z \leq b\,, \sqrt{x^2+y^2} \leq \varphi(z)\right\}$$

(che si ottiene ruotando la figura

$$\left\{(y\,,z) \in \mathbb{R}^2\,; a \leq z \leq b\,, 0 \leq y \leq \varphi(z)\right\} \subset \text{piano } yz$$

attorno all'asse z) è

$$\text{Volume}\,(E) = \pi \int_a^b \varphi(z)^2\,\mathrm{d}z\,. \tag{**}$$

Infatti, per ogni $z \in [\,a\,,b\,]$ la sezione

$$E_z = \left\{(x\,,y) \in \mathbb{R}^2\,; (x\,,y\,,z) \in E\right\}$$

è il disco

$$\left\{(x\,,y) \in \mathbb{R}^2\,; \sqrt{x^2+y^2} \leq \varphi(z)\right\}$$

e quindi l'area di E_z è uguale a $\pi\,\varphi(z)^2$. Per il teorema di riduzione (Teorema di Fubini) risulta

$$\text{Volume}\,(E) = \int_a^b \text{Area}\,(E_z)\,\mathrm{d}z = \int_a^b \pi\,\varphi(z)^2\,\mathrm{d}z\,.$$

Il nostro solido di rotazione S è descritto dalle disuguaglianze

$$\begin{aligned} & z^2 \le 1\,, \quad x^2+y^2 \le 4\,(1-z^2)\,, \quad \sqrt{x^2+y^2} \le z \\ \Longleftrightarrow \quad & z \in [\,0\,,1\,]\,, \quad \sqrt{x^2+y^2} \le 2\sqrt{1-z^2}\,, \quad \sqrt{x^2+y^2} \le z \\ \Longleftrightarrow \quad & z \in [\,0\,,1\,]\,, \quad \sqrt{x^2+y^2} \le \min\Big(2\sqrt{1-z^2}\,,z\Big)\,. \end{aligned}$$

Perciò possiamo applicare (**) con

$$a = 0\,, \quad b = 1\,, \quad \varphi(z) = \min\Big(2\sqrt{1-z^2}\,,z\Big)\,.$$

Per il svolgimento dei calcoli osserviamo che

$$\varphi(z) = \begin{cases} z & \text{per } \ x \in [\,0\,,2/\sqrt{5}\,]\,, \\ 2\sqrt{1-z^2} & \text{per } \ x \in [\,2/\sqrt{5}\,,1\,]\,. \end{cases}$$

Applicando ora (**) otteniamo :

$$\begin{aligned} \text{Volume}\,(S) &= \pi \int\limits_0^{2/\sqrt{5}} z^2\,\mathrm{d}z + \pi \int\limits_{2/\sqrt{5}}^{1} 4\,(1-z^2)\,\mathrm{d}z \\ &= \pi\left(\frac{z^3}{3}\,\Bigg|_{z=0}^{z=2/\sqrt{5}} + 4\Big(z - \frac{z^3}{3}\Big)\,\Bigg|_{z=2/\sqrt{5}}^{z=1}\right) \\ &= \pi\bigg(\frac{8}{15\sqrt{5}} + 4\Big(1-\frac{1}{3}\Big) - 4\Big(\frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{8}{15\sqrt{5}}\Big)\bigg) \\ &= \pi\bigg(\frac{8}{15\sqrt{5}} + \frac{8}{3} - \frac{88}{15\sqrt{5}}\bigg) \\ &= \frac{8\,\pi}{3}\bigg(1 - \frac{2}{\sqrt{5}}\bigg)\,. \end{aligned}$$

3) : Per applicare il teorema della divergenza, calcoliamo la divergenza del campo $V(x\,,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{x}{y} \\ \dfrac{y}{x} \end{pmatrix}$: poiché

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{x}{y}\Big) = \frac{1}{y}\,, \quad \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{y}{x}\Big) = \frac{1}{x}\,,$$

risulta

$$(\operatorname{div} V)(x\,,y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}\,.$$

Usando il teorema della divergenza (Teorema di Gauss-Green) risulta che il flusso uscente del campo $V(x\,,y)$ dalla regione D descritta dalle disuguaglianze

$$x > 0\,,\ y > 0\,,\ xy \geq 1\,,\ x + y \leq \frac{5}{2}$$

è uguale all'integrale doppio

$$I := \int\limits_D (\operatorname{div} V)(x\,,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int\limits_D \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

Per calcolare I osserviamo che D è normale rispatto all'asse delle y:

$$(x\,,y) \in D \iff x > 0\,,\ \frac{1}{x} \leq y \leq \frac{5}{2} - x\,.$$

Ma non per ogni $x > 0$ esiste y con $\dfrac{1}{x} \leq y \leq \dfrac{5}{2} - x$, solo per quelli che soddisfano la disuguaglianza

$$\frac{1}{x} \leq \frac{5}{2} - x \iff x^2 - \frac{5}{2}x + 1 \leq 0\,,$$

cioè per $\dfrac{1}{2} \leq x \leq 2$. Perciò D è la regione tra i grafici delle funzioni

$$\left[\frac{1}{2}\,,2\right] \ni x \longmapsto \frac{1}{x}$$

e

$$\left[\frac{1}{2}\,,2\right] \ni x \longmapsto \frac{5}{2} - x\,.$$

Ora per il teorema di riduzione (Teorema di Fubini) risulta

$$I = \int\limits_D \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int\limits_{1/2}^{2}\left(\int\limits_{1/x}^{5/2-x}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$

$$= \int\limits_{1/2}^{2}\left(\frac{y}{x}\,\Bigg|_{y=1/x}^{y=5/2-x} + \ln y\,\Bigg|_{y=1/x}^{y=5/2-x}\right)\mathrm{d}x$$

$$
\begin{aligned}
&= \int\limits_{1/2}^{2} \left(\frac{5}{2x} - 1 - \frac{1}{x^2} + \ln\left(\frac{5}{2} - x\right) + \ln x \right) \mathrm{d}x \\
&= \frac{5}{2} \ln x \,\bigg|_{x=1/2}^{y=2} - x \,\bigg|_{x=1/2}^{y=2} + \frac{1}{x} \,\bigg|_{x=1/2}^{y=2} \\
&\quad + \left(\left(\frac{5}{2} - x\right) - \left(\frac{5}{2} - x\right) \ln\left(\frac{5}{2} - x\right) \right) \bigg|_{x=1/2}^{y=2} \\
&\quad + \big(x \ln x - x\big) \bigg|_{x=1/2}^{y=2} \\
&= 5 \ln 2 - \frac{3}{2} + \frac{1}{2} - 2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln \frac{1}{2} \right) - \big(2 - 2\ln 2\big) \\
&\quad + \big(2 \ln 2 - 2\big) - \left(\frac{1}{2} \ln \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) \\
&= -6 + 10 \ln 2 \,.
\end{aligned}
$$

4) : a) Chiaramente

$$
\begin{aligned}
c_o(f) &= \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{\pi - x}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\pi x}{2} - \frac{x^2}{4} \right) \bigg|_{x=0}^{x=2\pi} \\
&= 0 \,.
\end{aligned}
$$

Gli altri coefficienti di Fourier (complessi) di f sono

$$
\begin{aligned}
c_k(f) &= \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(x)\, e^{-ikx}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{\pi - x}{2}\, e^{-ikx}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\pi - x}{2}\, \frac{e^{-ikx}}{-ik} \bigg|_{x=0}^{x=2\pi} - \frac{1}{2ik} \int\limits_0^{2\pi} e^{-ikx}\,\mathrm{d}x \right) \\
&= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\pi}{ik} - \frac{1}{2ik} \underbrace{\frac{e^{-ikx}}{-ik} \bigg|_{x=0}^{x=2\pi}}_{=0} \right) \\
&= \frac{1}{2ki} \,.
\end{aligned}
$$

Risulta che la serie di Fourier di f è

$$\sum_{0\neq k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{2\,k\,i}\, e^{ikx}\,.$$

Poiché la funzione f è regolare a tratti, la sua serie di Fourier converge in ogni punto $x\in\mathbb{R}$ à

$$\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$$

che nel nostro caso è uguale ad $f(x)$ se x non è multiplo intero pari di π ed è uguale a $\dfrac{\pi/2-\pi/2}{2}=0$ se x è multiplo intero pari di π . Cosicché

$$\sum_{0\neq k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{2\,k\,i}\, e^{ikx} = \begin{cases} \dfrac{\pi-x}{2} & \text{per } \ x\in(0\,,2\pi) \\ 0 & \text{per } \ x=0\,,2\pi \end{cases}\,.$$

Calcoliamo anche i coefficienti di Fourier reali :

$$\begin{aligned} a_k(f) &= c_k(f)+c_{-k}(f)=0\,, & k\geq 0\,,\\ b_k(f) &= i\big(c_k(f)-c_{-k}(f)\big)=\frac{1}{k}\,, & k\geq 1\,. \end{aligned}$$

Con i coefficienti di Fourier reali risulta la convergenza

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\sin(kx) = \begin{cases} \dfrac{\pi-x}{2} & \text{per } \ x\in(0\,,2\pi) \\ 0 & \text{per } \ x=-0\,,2\pi \end{cases}\,.$$

b) Per l'identità di Parseval abbiamo

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \big|c_k(f)\big|^2 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \big|f(x)\big|^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Big(\frac{\pi-x}{2}\Big)^2 \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2\pi}\bigg(-\frac{2}{3}\Big(\frac{\pi-x}{2}\Big)^3\bigg)\bigg|_{x=0}^{x=2\pi} = \frac{\pi^2}{12}\,, \end{aligned}$$

cioè

$$\sum_{0\neq k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{4\,k^2} = \frac{\pi^2}{12} \iff \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}\,.$$