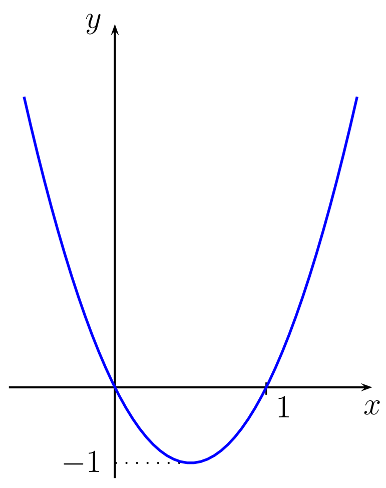
NOME: .... **MATRICOLA:** ....

Scienza dei Media e della Comunicazione, A.A. 2007/2008
Analisi Matematica 1, Esame scritto del 12.09.2008

1) Indicare per quali $x \in \mathbb{R}$ vale la seguente diseguaglianza :

$$\Big| |x| + 1 \Big| \cdot (x-2) \; < \; \Big| |x+3| - 4 \Big| \cdot (x-2) \qquad .$$

2) Se



è il grafico della funzione $y = f(x)$, quali sono i grafici delle funzioni

$$y = \big| f(x+1) + 1 \big| \, , \quad y = \big| f(x-1) \big| + 1 \, , \quad y = \big| f(|x|) \big| \quad ?$$

3) Trovare parte reale e parte immaginaria di

$$\frac{1}{2^9}\frac{(\sqrt{3}-i)^9}{(3-i)^2}-\frac{2+i}{3-i} \qquad .$$

4) Calcolare il limite

$$\lim_{n\to\infty}\log\left(\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n}\right).$$

5) Consideriamo la funzione

$$f(x)=x-\operatorname{arctg} x\,.$$

a) Determinare il dominio (massimale) di f.

b) Trovare tutti gli asintoti di f.

c) Trovare tutti i massimi e minimi locali di f.

d) Tracciare un grafico qualitativo per f.

Soluzioni:

1) **:** Anzitutto ricordiamo la seguente equivalenza: per $x\,,\,a \in \mathbb{R}$ abbiamo

$$|x| < a \iff -a < x < a\,. \qquad (*)$$

Ritornando alla nostra disequazione, poché $|x|+1>0$ e così $\Big||x|+1\Big| = |x|+1$, essa può essere scritta sotto la forma

$$\Big(|x|+1\Big)\cdot(x-2) < \Big||x+3|-4\Big|\cdot(x-2)\,.$$

Per $x=2$ le due parti sono uguali a zero, quindi la diseguaglianza non vale.

Per $x>2$ abbiamo $x-2>0$ e la disequazione prende la forma

$$|x|+1 < \Big||x+3|-4\Big|\,.$$

Ma $x>2$ implica che $|x|=x$, $|x+3|=x+3$ e $|x-1|=x-1$, quindi la disequazione si scrive prima sotto la forma

$$x+1 < \Big|x-1\Big|$$

e poi

$$x+1 < x-1 \iff 1 < -1\,,$$

che è ovviamente falso.

Finalmente, per $x<2$ abbiamo $x-2<0$ e la disequazione prende la forma

$$|x|+1 > \Big||x+3|-4\Big|\,.$$

Per (*) questa disequazione è equivalente a

$$-|x|-1 < |x+3|-4 < |x|+1 \iff 3-|x| < |x+3| < |x|+5\,.$$

Ora $|x+3|<|x|+5$ vale sempre, mentre $3-|x|<|x+3|$ si scrive

per $x<-3$: $3+x<-x-3 \iff x<-3$, e vale sempre,
per $-3\le x\le 0$: $3+x<x+3$, e non vale mai,
per $0<x<2$: $3-x<x+3 \iff 0<x$, e vale sempre.

Concludiamo che

$$\Big| |x| + 1 \Big| \cdot (x-2) < \Big| |x+3| - 4 \Big| \cdot (x-2)$$

vale se e soltanto se $x < -3$ oppure $0 < x < 2$, cioè se

$$x \in \big(-\infty , -3 \big) \cup \big(0 , 2 \big) \, .$$

Possiamo ottenere questa soluzione anche tramite il seguente **metodo grafico** :

Tracciamo i grafici delle funzioni

$$f(x) = |x| + 1 \, , \quad g(x) = \Big| |x+3| - 4 \Big|$$

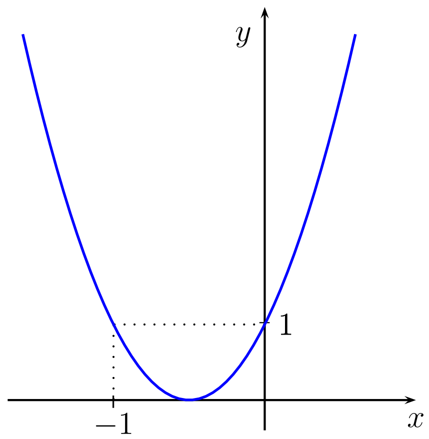
e troviamo

– i punti dell'intervallo $(2, +\infty)$ dove il grafico di f si trova (strettamente) sotto del grafico di g : sarà l'insieme vuoto,

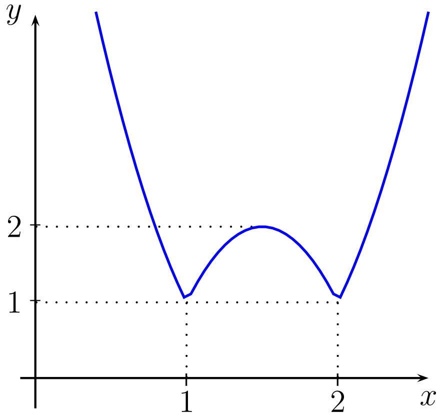
ed

– i punti dell'intervallo $(-\infty, 2)$ dove il grafico di f si trova (strettamente) sopra del grafico di g : sarà $\big(-\infty, -3 \big) \cup \big(0, 2 \big)$.

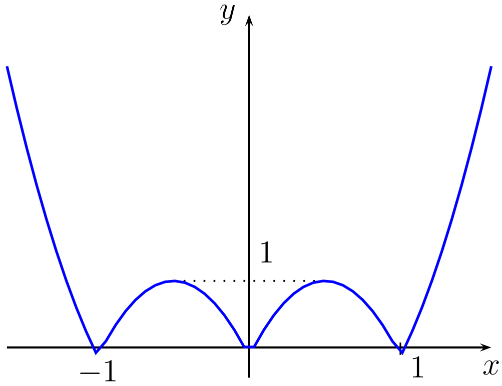
2) **:** I grafici richiesti sono :



$y = \big| f(x+1) + 1 \big|$



$$\boxed{y = \left| f(x-1) \right| + 1}$$



$$\boxed{y = \left| f(|x|) \right|}$$

3) : Per calcolare la potenza $(\sqrt{3}-i)^9$ ci conviene scrivere $\sqrt{3}-i$ in forma trigonometrica ed usare la formula di De Moivre :

$$\sqrt{3}-i = |\sqrt{3}-i\,|\cdot\big(\cos\varphi + i\sin\varphi\big)$$

ove il modulo $|\sqrt{3}-i\,|$ è $\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2} = \sqrt{4} = 2$ e l'argomento φ soddisfa

$$\cos\varphi = \frac{\sqrt{3}}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,, \qquad \sin\varphi = \frac{-1}{r} = -\frac{1}{2}\,.$$

Risulta che possiamo scegliere $\varphi = -\dfrac{\pi}{6}$ e così

$$\begin{aligned}
\sqrt{3} - i &= 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right), \\
(\sqrt{3} - i)^9 &= 2^9\left(\underbrace{\cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right)}_{=0} + i\underbrace{\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right)}_{=-1}\right) \\
&= 2^9\, i\,.
\end{aligned}$$

Di conseguenza parte reale e parte immaginaria di

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2^9}\,\frac{(\sqrt{3}-i)^9}{(3-i)^2} - \frac{2+i}{3-i} = \frac{1}{2^9}\,\frac{2^9\, i}{(3-i)^2} - \frac{2+i}{3-i} \\
&= \frac{i - (2+i)\,(3-i)}{(3-i)^2} = -\,\frac{7}{(3-i)^2} \\
&= -\ \frac{7\,(3+i)^2}{\big((3-i)\,(3+i)\big)^2} = -\,\frac{7\,(8+6\,i)}{100} = -\,\frac{14}{25} - \frac{21}{50}\, i
\end{aligned}$$

sono $-\dfrac{14}{25}$ rispettivamente $-\dfrac{21}{50}$.

4) **:** Poiché

$$\begin{aligned}
\sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n} &= \frac{\left(\sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n}\right)\cdot\left(\sqrt{n+\sqrt{n}} + \sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+\sqrt{n}} + \sqrt{n}} \\
&= \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n}} + \sqrt{n}} \\
&= \frac{\sqrt{n}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{n}}}{\left(\sqrt{n+\sqrt{n}} + \sqrt{n}\right)\cdot\dfrac{1}{\sqrt{n}}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}} + 1} \ \longrightarrow\ \frac{1}{2}\,,
\end{aligned}$$

abbiamo

$$\lim_{n\to\infty} \log\left(\sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n}\right) = \log\frac{1}{2} = -\,\log 2\,.$$

5) **:** a) Il dominio di f è ovviamente l'insieme $\mathbb{R}$ di tutti i numeri reali.

b) Poiché f prende valori finiti in tutti i punti della retta reale, non esiste asintoto verticale.

La prima condizione per l'esistenza di un asintoto obliquo per $x \to +\infty$ è l'esistenza del limite finito

$$m_+ = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} \, .$$

Verifichiamo l'esistenza di questo limite :

$$m_+ = \lim_{x\to+\infty} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \Big(1 - \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\Big) = 1$$

perché

$$\Big|\frac{\operatorname{arctg} x}{x}\Big| \leq \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{|x|} \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 0 \, .$$

La seconda condizione per l'esistenza di un asintoto obliquo per $x \to +\infty$, necessariamente di forma

$$y = m_+ x + n_+$$

e nel nostro caso $y = x + n_+$, è l'esistenza del limite finito

$$n_+ = \lim_{x\to+\infty} \big(f(x) - m_+ x\big) \, .$$

Verifichiamo che anche questo limite esiste :

$$\begin{aligned} n_+ &= \lim_{x\to+\infty} \big((x - \operatorname{arctg} x) - x\big) = - \lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x \\ &= - \frac{\pi}{2} \, . \end{aligned}$$

Cosicché

$$y = x - \frac{\pi}{2} \text{ è un asintoto obliquo di } f \text{ per } x \to +\infty \, .$$

Similmente si verifica :

– esiste

$$\begin{aligned} m_- &= \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} \\ &= \lim_{x\to-\infty} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x} = \lim_{x\to-\infty} \left(1 + \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\right) = 1\,; \end{aligned}$$

– poi esiste

$$\begin{aligned} n_- &= \lim_{x\to-\infty} \big(f(x) - m_- x\big) \\ &= \lim_{x\to-\infty} \big((x - \operatorname{arctg} x) - x\big) = -\lim_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x \\ &= \frac{\pi}{2}\,. \end{aligned}$$

Di conseguenza

$$y = x + \frac{\pi}{2} \text{ è un asintoto obliquo di } f \text{ per } x \to -\infty\,.$$

c) Per trovare gli intervalli di monotonia e gli extremi locali di f, dobbiamo prima calcolare la sua derivata :

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2}{1+x^2} \begin{cases} > 0 & \text{per } x \neq 0\,, \\ = 0 & \text{per } x = 0\,. \end{cases}$$

Risulta che f è strettamente crescente e 0 è un punto critico che non è massimo o minimo locale.

Calcoliamo anche la derivata seconda di f :

$$f''(x) = \frac{2x(1+x^2) - 2x^3}{(1+x^2)^2} = \frac{2x}{(1+x^2)^2}\,.$$

Poiché f'' cambia segno in 0, 0 è un punto di flesso di f, e poiché $f'(0) = 0$, la retta tangente al grafico di f nel punto $\big(0, f(0)\big) = (0,0)$ è orizzontale.

Riportiamo il comportamento di f', f'' e f nella seguente tabella :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'		$+$	0	$+$	
f''		$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

d) Usando le informazioni di cui sopra, è facile tracciare il grafico di f :

$y = x + \dfrac{\pi}{2}$ è asintoto obliquo di f per $x \to -\infty$.

Il grafico di f sale da meno infinito a $(0,0)$, dove ha tangente orizzontale, restando sempre sotto l'asintoto :

$$f(x) = x - \operatorname{arctg} x < x + \frac{\pi}{2} .$$

Sul tratto $(-\infty, 0)$ la funzione f è concava.

Poi da $(0,0)$ il grafico sale all'infinito, ha per $x \to +\infty$ l'asintoto obliquo $y = x - \dfrac{\pi}{2}$ e resta sempre sopra l'asintoto :

$$f(x) = x - \operatorname{arctg} x > x - \frac{\pi}{2} .$$

Sul tratto $(0, +\infty)$ la funzione f è convessa.

Il grafico di f :