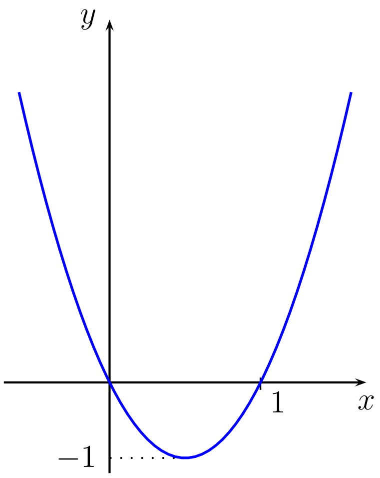
NOME: .... **MATRICOLA: ....**

Scienza dei Media e della Comunicazione, A.A. 2007/2008
Analisi Matematica 1, Esame scritto del 12.09.2008

1) Indicare per quali $x \in \mathbb{R}$ vale la seguente diseguaglianza :

$$\Big| |x| - 1 \Big| \cdot (x+2) \;>\; \Big| |x-3| + 4 \Big| \cdot (x+2) \qquad .$$

2) Se



è il grafico della funzione $y = f(x)$, quali sono i grafici delle funzioni

$$y = \big| f(x-1) + 1 \big| \,, \quad y = \big| f(x+1) \big| - 1 \,, \quad y = f(|x|) - 1 \quad ?$$

3) Trovare parte reale e parte immaginaria di

$$\frac{1}{2^{15}} \frac{(\sqrt{3}+i)^{15}}{(3+i)^2} + \frac{2-i}{3+i} \qquad .$$

4) Calcolare il limite

$$\lim_{n\to\infty} \left(n+\sqrt{n}\right) \cdot \left(\sqrt{1+\frac{2}{n}} - 1\right) .$$

5) Consideriamo la funzione

$$f(x) = x \cdot \operatorname{arctg} x \, .$$

a) Determinare il dominio (massimale) di f .

b) Trovare tutti gli asintoti di f .

c) Trovare tutti i massimi e minimi locali di f .

d) Tracciare un grafico qualitativo per f .

Soluzioni:

1) **:** Anzitutto ricordiamo la seguente equivalenza: per x , $a \in \mathbb{R}$ abbiamo

$$|x| < a \iff -a < x < a \; . \qquad (*)$$

Ritornando alla nostra disequazione, poché $|x-3|+4 > 0$ e così $\Big| |x-3|+4 \Big| = |x-3|+4$, essa può essere scritta sotto la forma

$$\Big| |x|-1 \Big| \cdot (x+2) \; > \; \Big(|x-3|+4 \Big) \cdot (x+2) \; .$$

Per $x = -2$ le due parti sono uguali a zero, quindi la diseguaglianza non vale.

Per $x > -2$ abbiamo $x+2 > 0$ e la disequazione prende la forma

$$\Big| |x|-1 \Big| > |x-3|+4 \; .$$

Ma questa disequazione non vale per nessun x reale, perché implicherebbe

$$|x-3|+4 < \Big| |x|-1 \Big| \leq |x|+1 \; ,$$

cioè $|x-3|+3 < |x|$, che contradice la diseguaglianza triangolare :

$$|x| = \Big| (x-3)+3 \Big| \leq |x-3|+3 \; .$$

Finalmente, per $x < -2$ abbiamo $x+2 < 0$ e la disequazione prende la forma

$$\Big| |x|-1 \Big| < |x-3|+4 \; .$$

Poiché per $x < -2$ abbiamo $|x| = -x$ e $|x-3| = 3-x$, la disequazione di cui sopra si scrive anche sotto la forma

$$\underbrace{\Big| -x-1 \Big|}_{=-x-1} < \underbrace{3-x+4}_{=7-x} ,$$

cioè $-x-1 < 7-x$, che vale ovviamente sempre.

Concludiamo che

$$\Big| |x| - 1 \Big| \cdot (x+2) > \Big| |x-3| + 4 \Big| \cdot (x+2)$$

vale se e soltanto se $x < -2$, cioè se

$$x \in \big(-\infty \, , -2 \big) \, .$$

Possiamo ottenere questa soluzione anche tramite il seguente **metodo grafico** :

Tracciamo i grafici delle funzioni

$$f(x) = \Big| |x| - 1 \Big| \, , \quad g(x) = |x-3| + 4$$

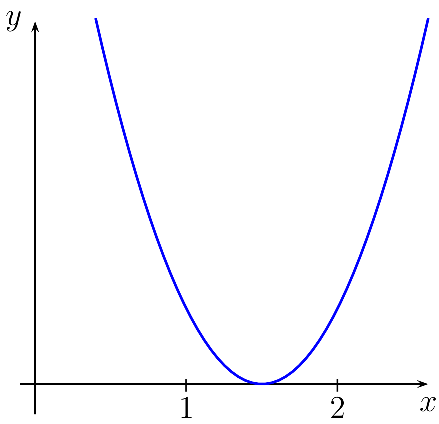
e troviamo

– i punti dell'intervallo $(-2, +\infty)$ dove il grafico di f si trova (strettamente) sopra del grafico di g : sarà l'insieme vuoto

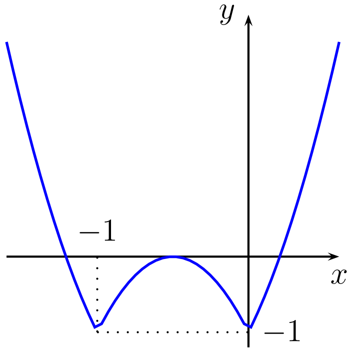
ed

– i punti dell'intervallo $(-\infty, -2)$ dove il grafico di f si trova (strettamente) sotto del grafico di g : sarà tutto $(-\infty, -2)$.

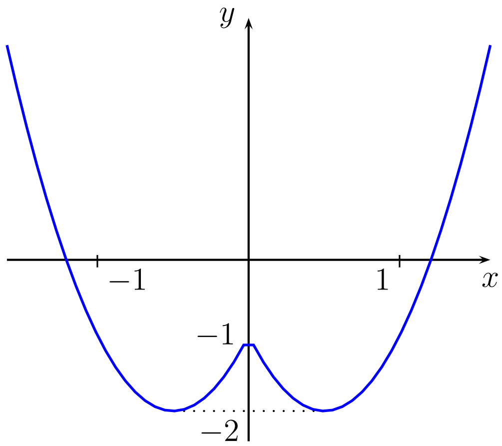
2) **:** I grafici richiesti sono :



$y = \big| f(x-1) + 1 \big|$



$y = \big|f(x+1)\big| - 1$



$y = f(|x|) - 1$

3) **:** Per calcolare la potenza $(\sqrt{3}+i)^{15}$ ci conviene scrivere $\sqrt{3}+i$ in forma trigonometrica ed usare la formula di De Moivre :

$$\sqrt{3}+i = |\sqrt{3}+i|\cdot\big(\cos\varphi + i\sin\varphi\big)$$

ove il modulo $|\sqrt{3}+i|$ è uguale a $\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2} = \sqrt{4} = 2$ e l'argomento φ soddisfa

$$\cos\varphi = \frac{\sqrt{3}}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,, \qquad \sin\varphi = \frac{1}{r} = \frac{1}{2}\,.$$

Risulta che possiamo scegliere $\varphi = \dfrac{\pi}{6}$ e così

$$\begin{aligned}
\sqrt{3}+i &= 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right),\\
(\sqrt{3}+i)^{15} &= 2^{15}\Big(\underbrace{\cos\frac{5\pi}{2}}_{=0} + i\underbrace{\sin\frac{5\pi}{2}}_{=1}\Big)\\
&= 2^{15}\, i\,.
\end{aligned}$$

Di conseguenza parte reale e parte immaginaria di

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2^{15}}\frac{(\sqrt{3}+i)^{15}}{(3+i)^2} + \frac{2-i}{3+i} = \frac{1}{2^{15}}\,\frac{2^{15} i}{(3+i)^2} + \frac{2-i}{3+i}\\
&= \frac{i+(2-i)\,(3+i)}{(3+i)^2} = \frac{7}{(3+i)^2}\\
&= \frac{7\,(3-i)^2}{\big((3+i)\,(3-i)\big)^2} = \frac{7\,(8-6i)}{100} = \frac{14}{25} - \frac{21}{50}\, i
\end{aligned}$$

sono $\dfrac{14}{25}$ rispettivamente $-\dfrac{21}{50}$.

4) **:** Poiché

$$\begin{aligned}
&\big(n+\sqrt{n}\big)\cdot\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}}-1\right)\\
&= \big(n+\sqrt{n}\big)\cdot\frac{\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}}-1\right)\cdot\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1\right)}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1}\\
&= \big(n+\sqrt{n}\big)\cdot\frac{\frac{2}{n}}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1}\\
&= \frac{2\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1}\,,
\end{aligned}$$

abbiamo

$$\lim_{n\to\infty} \left(n+\sqrt{n}\right) \cdot \left(\sqrt{1+\frac{2}{n}}-1\right) = \frac{2}{2} = 1 \, .$$

5) **:** a) Il dominio di f è ovviamente l'insieme $\mathbb{R}$ di tutti i numeri reali.

b) Poiché f prende valori finiti in tutti i punti della retta reale, non esiste asintoto verticale.

La prima condizione per l'esistenza di un asintoto obliquo per $x \to +\infty$ è l'esistenza del limite finito

$$m_+ = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} \, .$$

Verifichiamo l'esistenza di questo limite :

$$m_+ = \lim_{x\to+\infty} \frac{x \cdot \operatorname{arctg} x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2} \, .$$

La seconda condizione per l'esistenza di un asintoto obliquo per $x \to +\infty$, necessariamente di forma

$$y = m_+ x + n_+$$

e nel nostro caso $y = x + n_+$, è l'esistenza del limite finito

$$n_+ = \lim_{x\to+\infty} \left(f(x) - m_+ x\right) .$$

Verifichiamo che anche questo limite esiste :

$$\begin{aligned} n_+ &= \lim_{x\to+\infty} \left(x \cdot \operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2}\, x\right) \\ &= \lim_{x\to+\infty} x \cdot \left(\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x - \dfrac{\pi}{2}}{\dfrac{1}{x}} \end{aligned}$$

si può calcolare usando la regola di De L'Hospital :

$$n_+ = \lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{1}{1+x^2}}{-\dfrac{1}{x^2}} = - \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{1+x^2} = -1 \, .$$

Cosicché

$$y = \frac{\pi}{2}\, x - 1 \ \text{ è un asintoto obliquo di } f \text{ per } x \to +\infty\,.$$

Similmente si verifica :

– esiste

$$m_- = \lim_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x\cdot \operatorname{arctg} x}{x} = \lim_{x\to -\infty} \operatorname{arctg} x = -\,\frac{\pi}{2}\,;$$

– poi esiste

$$\begin{aligned} n_- &= \lim_{x\to -\infty} \big(f(x) - m_- x\big) = \lim_{x\to -\infty} \Big(x\cdot \operatorname{arctg} x + \frac{\pi}{2}\, x\Big) \\ &= \lim_{x\to -\infty} x\cdot \Big(\operatorname{arctg} x + \frac{\pi}{2}\Big) = \lim_{x\to -\infty} \frac{\operatorname{arctg} x + \dfrac{\pi}{2}}{\dfrac{1}{x}} \\ &= \lim_{x\to -\infty} \frac{\dfrac{1}{1+x^2}}{-\,\dfrac{1}{x^2}} = -\lim_{x\to -\infty} \frac{x^2}{1+x^2} = -1\,. \end{aligned}$$

Di conseguenza

$$y = -\,\frac{\pi}{2}\, x - 1 \ \text{ è un asintoto obliquo di } f \text{ per } x \to -\infty\,.$$

c) Per trovare gli intervalli di monotonia e gli extremi locali di f, dobbiamo prima calcolare la sua derivata :

$$f'(x) = \operatorname{arctg} x + \frac{x}{1+x^2}\,.$$

Per lo studio di f' ci serve anche la sua derivata, cioè la seconda derivata di f :

$$f''(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1+x^2-2\,x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2}{(1+x^2)^2} > 0\,.$$

Risulta che f' è strettamente crescente e così, poiché $f'(0) = 0$,

$$f'(x) < 0 \ \text{ per } x < 0\,, \qquad f'(x) > 0 \ \text{ per } x > 0\,.$$

Cosicché f è strettamente decrescente in $(-\infty, 0)$ ed è strettamente crescente in $(0, +\infty)$. In particolare, f ha un minimo in 0.

Riportiamo il comportamento di f', f'' e f nella seguente tabella :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f''		$+$	2	$+$	
f	$-\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

d) Usando le informazioni di cui sopra, è facile tracciare il grafico di f :
$y = -\dfrac{\pi}{2}x - 1$ è asintoto obliquo di f per $x \to -\infty$.
Il grafico di f scende dall'infinito in $(0, 0)$, dove ha punto di minimo, restando sempre sopra l'asintoto :

$$f(x) = x \operatorname{arctg} x > -\frac{\pi}{2}x - 1\,, \qquad x < 0\,.$$

Osserviamo che

$$x \operatorname{arctg} x > -\frac{\pi}{2}x - 1\,, \qquad x < 0$$

è equivalente a

$$\operatorname{arctg} x + \frac{\pi}{2} + \frac{1}{x} < 0\,, \qquad x < 0\,.$$

Ma questa diseguaglianza risulta dal fatto che la funzione $(-\infty, 0) \ni x \longmapsto \operatorname{arctg} x + \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{1}{x}$ è decrescente (avendo la derivata negativa) ed ha limite 0 in $-\infty$.

Poi da $(0, 0)$ il grafico sale all'infinito, ha per $x \to +\infty$ l'asintoto obliquo $y = \dfrac{\pi}{2}x - 1$ e resta sempre sopra l'asintoto :

$$f(x) = x \operatorname{arctg} x > \frac{\pi}{2}x - 1\,, \qquad x > 0\,.$$

Similmente come prima, osserviamo che

$$x \operatorname{arctg} x > \frac{\pi}{2} x - 1\,, \qquad x > 0$$

è equivalente a

$$\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{x} > 0\,, \qquad x > 0\,.$$

Ma questa diseguaglianza risulta dal fatto che la funzione $(0, +\infty) \ni x \longmapsto \operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{x}$ è decrescente (avendo la derivata negativa) ed ha limite 0 in $-\infty$.

La funzione f è convessa su tutta la retta reale $\mathbb{R}$.

Il grafico di f: