NOME: . . . . **MATRICOLA:** . . . .

Corso di Laurea in Fisica, A.A. 2007/2008
Calcolo 1, Esame scritto del 20.01.2009

Corso di Laurea in Fisica dell'Atmosfera e Meteorologia, A.A. 2007/2008
Calcolo 1, Esame scritto del 20.01.2009

1) Consideriamo la funzione

$$f(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{x}} + x\,.$$

a) Determinare il dominio (massimale) di f .

b) Trovare tutti gli asintoti di f .

c) Trovare tutti i massimi e minimi locali di f .

d) Tracciare un grafico qualitativo per f .

2) Determinare una primitiva della funzione $f : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x + x^2}}\ .$$

3) Trovare tutte le soluzioni complesse dell'equazione

$$z^4 - 2\,z^2 + 2 = 0\ .$$

4) Determinare i valori del parametro $\alpha \geq 0$ per cui il seguente integrale improprio converge :

$$\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^{\alpha}}\,\mathrm{d}x\ .$$

5) Dire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ la seguente serie converge:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\big(n!\big)^{\alpha}}{n^n}\ .$$

Soluzioni:

1) **:** a) Il dominio di f consiste da tutti i numeri reali x per quali $\dfrac{1}{x}$ ha senso e $x^2 + \dfrac{1}{x} \geq 0$. Ora $\dfrac{1}{x}$ ha senso se $x \neq 0$ e $\dfrac{x^3+1}{x} = x^2 + \dfrac{1}{x} \geq 0$ se abbiamo simultaneamente

$$x^3 + 1 \geq 0 \text{ e } x > 0 \,, \text{ ossia } x > 0 \,,$$

oppure

$$x^3 + 1 \leq 0 \text{ e } x < 0 \,, \text{ ossia } x \leq -1 \,,$$

Perciò il dominio di f è

$$\big(-\infty, -1\big] \cup \big(0, +\infty\big) \,.$$

b) Poiché $\lim\limits_{x \to 0+} f(x) = +\infty$, f ha un asintoto verticale in $x = 0$.

La prima condizione per l'esistenza di un asintoto obliquo per $x \to +\infty$ è l'esistenza del limite finito

$$m_+ = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} \,.$$

Verifichiamo l'esistenza di questo limite :

$$m_+ = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \sqrt{x^2 + \frac{1}{x}} + 1 = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{x^3}} + 1 = 2 \,.$$

La seconda condizione per l'esistenza di un asintoto obliquo per $x \to +\infty$, necessariamente di forma

$$y = m_+ x + n_+$$

e nel nostro caso $y = 2x + n_+$, è l'esistenza del limite finito

$$n_+ = \lim_{x \to +\infty} \big(f(x) - m_+ x \big) \,.$$

Verifichiamo che anche questo limite esiste :

$$
\begin{aligned}
n_+ &= \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2 + \frac{1}{x}} + x - 2\,x \right) = \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2 + \frac{1}{x}} - x \right) \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2 + \frac{1}{x}} - x \right) \cdot \left(\sqrt{x^2 + \frac{1}{x}} + x \right)}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{x}} + x} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{x}} + x} = 0\ .
\end{aligned}
$$

Cosicché

$$y = 2\,x \ \text{ è un asintoto obliquo di } \ f \ \text{ per } \ x \to +\infty\,.$$

D'altro canto esiste

$$m_- = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} \sqrt{x^2 + \frac{1}{x}} + 1 \overset{x\leq 0}{=} \lim_{x\to-\infty} -\sqrt{1 + \frac{1}{x^3}} + 1 = 0\ ,$$

perciò l'asintoto obliquo per $x \to -\infty$, se esiste, dev'essere un asintoto orizzontale. Verifichiamo che esiste:

$$
\begin{aligned}
n_- &= \lim_{x\to-\infty} \big(f(x) - m_-\,x \big) = \lim_{x\to-\infty} f(x) \\
&= \lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2 + \frac{1}{x}} + x \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2 + \frac{1}{x}} + x \right) \cdot \left(\sqrt{x^2 + \frac{1}{x}} - x \right)}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{x}} - x} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{x}} - x} = 0\ .
\end{aligned}
$$

Di conseguenza

$y = 0$ è un asintoto orizzontale di f per $x \to -\infty$.

c) Per trovare gli intervalli di monotonia e gli extremi locali di f, dobbiamo prima calcolare la sua derivata :

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x^2 + \dfrac{1}{x}}} \left(2\,x - \frac{1}{x^2} \right) + 1 = \frac{2\,x^3 - 1}{2\,x^2 \sqrt{x^2 + \dfrac{1}{x}}} + 1 \\
&= \frac{2\,x^3 - 1 + 2\,x^2 \sqrt{x^2 + \dfrac{1}{x}}}{2\,x^2 \sqrt{x^2 + \dfrac{1}{x}}} \\
&= \frac{2\,x^3 + 2\,|x|\sqrt{x^4 + x} - 1}{2\,|x|\sqrt{x^4 + x}} \ ,
\end{aligned}
$$

cioè

$$
f'(x) = \frac{2\,x^3 - 2\,x\sqrt{x^4 + x} - 1}{2\,|x|\sqrt{x^4 + x}} = \frac{2\,x\big(x^2 - \sqrt{x^4 + x}\big) - 1}{2\,|x|\sqrt{x^4 + x}} \ \text{per } x < -1
$$

e

$$
f'(x) = \frac{2\,x^3 + 2\,x\sqrt{x^4 + x} - 1}{2\,x\sqrt{x^4 + x}} \ \text{per } x > 0 \ .
$$

Poiché per $x < -1$

$$
2\,x\big(x^2 - \sqrt{x^4 + x}\big) = -2\,|x|\big(\underbrace{x^2 - \sqrt{x^4 - |x|}}_{>0} \big) < 0 \ ,
$$

abbiamo $f'(x) < 0$ per ogni $x < -1$.

In particolare $f'(x) = 0$ è possibile solo per un $x > 0$ e quindi significa la validità congiunta di

$$
2\,x^3 + 2\,x\sqrt{x^4 + x} - 1 = 0 \ , \ x > 0 \ . \tag{*}
$$

Ma (*) implica

$$
\underbrace{\big(2\,x^3 - 1\big)^2}_{=4\,x^6 - 4\,x^3 + 1} = \underbrace{\big(2\,x\sqrt{x^4 + x}\big)^2}_{=4\,x^6 + 4\,x^3}
$$

e risultano successivamente

$$x^3 = \frac{1}{8}\,, \quad x = \frac{1}{2}\,.$$

D'altro canto si verifica subito che $x = \dfrac{1}{2}$ veramente soddisfa (*). Per di più, poiché $2\,x^3 + 2\,x\sqrt{x^4 + x} - 1$ è una funzione strettamente crescente di $x > 0$, abbiamo

$$f'(x) < 0 \ \text{ per } \ 0 < x < \frac{1}{2} \ \text{ e } \ f'(x) > 0 \ \text{ per } \ x > \frac{1}{2}\,.$$

Risulta che f è

$$\begin{aligned}
&\text{strettamente decrescente in } \big(-\infty, -1\big]\,, \\
&\text{strettamente decrescente in } \left(0, \frac{1}{2}\right)\,, \\
&\text{strettamente crescente in } \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)\,.
\end{aligned}$$

In particolare, $\dfrac{1}{2}$ è un punto di minimo locale, nel quale il valore di f è :

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{1}{4} + 2} + \frac{1}{2} = \sqrt{\frac{9}{4}} + \frac{1}{2} = 2\,.$$

Esaminiamo anche il comportamento di f nel punto -1 : il valore è $f(-1) = -1$ ed ha tangente verticale. Infatti, la derivata sinistra in -1 è uguale a

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to -1-} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} &= \lim_{x \to -1-} \frac{1}{x+1} \left(\sqrt{x^2 + \frac{1}{x}} + x + 1 \right) \\
&\overset{x=-t-1}{=} \lim_{t \to 0+} -\frac{1}{t} \left(\sqrt{\frac{-t^3 - 3\,t^2 - 3\,t}{-t-1}} - t \right) \\
&= \lim_{t \to 0+} \frac{1}{t} \left(t - \sqrt{\frac{t^3 + 3\,t^2 + 3\,t}{t+1}} \right) \\
&= \lim_{t \to 0+} \left(1 - \sqrt{\frac{t^3 + 3\,t^2 + 3\,t}{t^3 + t^2}} \right) \\
&= \lim_{t \to 0+} \left(1 - \sqrt{\frac{t^2 + 3\,t + 3}{t\,(t+1)}} \right) \\
&= -\infty\,.
\end{aligned}$$

Riportiamo il comportamento di f' e di f nella seguente tabella :

x	$-\infty$		-1		0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
f'		$-$	$-\infty$		$*$	$-$	0	$+$	
f	0	$\searrow$	-1	non def.	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

Finalmente calcoliamo la derivata seconda di f :

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{2x^3-1}{2x^2\sqrt{x^2+\dfrac{1}{x}}}+1\right) \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\left(x-\frac{1}{2x^2}\right)\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^{-1/2}+1\right) \\
&= \left(1+\frac{1}{x^3}\right)\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^{-1/2} \\
&\qquad\qquad -\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2x^2}\right)\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^{-3/2}\left(2x-\frac{1}{x^2}\right) \\
&= \left(1+\frac{1}{x^3}\right)\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^{-1/2}-\left(x^2-\frac{1}{x}+\frac{1}{4x^4}\right)\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^{-3/2} \\
&= \left(x^2+\frac{1}{x}\right)^{-3/2}\left(\left(1+\frac{1}{x^3}\right)\left(x^2+\frac{1}{x}\right)-\left(x^2-\frac{1}{x}+\frac{1}{4x^4}\right)\right) \\
&= \left(x^2+\frac{1}{x}\right)^{-3/2}\left(\frac{3}{x}+\frac{3}{4x^4}\right) \\
&= \frac{3\,(4x^3+1)}{4x^4}\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^{-3/2}.
\end{aligned}
$$

Risulta che $f''(x)<0$ per $x<-1$ e $f''(x)>0$ per $x>0$, cosicché f è concava in $\big(-\infty,-1\big]$ e convessa in $\big(0,+\infty\big)$.

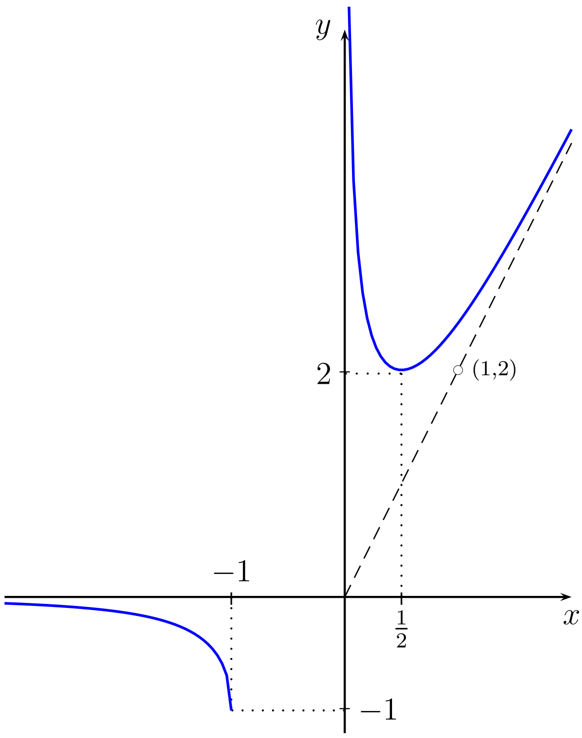
d) Usando le informazioni di cui sopra, è facile tracciare il grafico di f :

$y=0$ è asintoto orizzontale di f per $x\to-\infty$ ed il grafico di f scende da 0 a $-\infty$ fino a $(-1\,,-1)$.

Nel secondo tratto il grafico scende dall'infinito in 0 fino a $\left(\dfrac{1}{2}\,,2\right)$, un punto di minimo locale, nel quale il grafico ha tangente orizzontale. Sale poi all'infinito a $+\infty$, ha per $x \to +\infty$ l'asintoto obliquo $y = 2\,x$ e resta sempre sopra l'asintoto :

$$f(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{x}} + x > \sqrt{x^2} + x = 2\,x\,, \qquad x > 0\,.$$

Il grafico di f :



2) : **Prima soluzione.** Per $x > 0$ abbiamo

$$\frac{x^2}{\sqrt{x + x^2}} = \frac{x^2}{\sqrt{x}\,\sqrt{1+x}} = \frac{x\,\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}} = x\sqrt{\frac{x}{1+x}}\;,$$

perciò per il calcolo dell'integrale indefinito

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x+x^2}}\,\mathrm{d}x = \int x\sqrt{\frac{x}{1+x}}\,\mathrm{d}x$$

possiamo usare la sostituzione

$$t = \sqrt{\frac{x}{1+x}}\,, \qquad x = \frac{t^2}{1-t^2}$$

con

$$\mathrm{d}x = \left(\frac{t^2}{1-t^2}\right)'\mathrm{d}t = \left(\frac{t^2-1}{1-t^2} + \frac{1}{1-t^2}\right)'\mathrm{d}t = \frac{2\,t}{(1-t^2)^2}\,\mathrm{d}t\,.$$

Si ottiene

$$\int x\sqrt{\frac{x}{1+x}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{t^2}{1-t^2}\,t\,\frac{2\,t}{(1-t^2)^2}\,\mathrm{d}t = \int \frac{2\,t^4}{(1-t^2)^3}\,\mathrm{d}t\,.$$

Lo sviluppo di $\dfrac{2\,t^4}{(1-t^2)^3} = \dfrac{2\,t^4}{(1+t)^3(1-t)^3}$ in fratti semplici è dalla forma

$$\frac{2\,t^4}{(1-t^2)^3} = \frac{a}{1+t} + \frac{b}{(1+t)^2} + \frac{c}{(1+t)^3} + \frac{\alpha}{1-t} + \frac{\beta}{(1-t)^2} + \frac{\gamma}{(1-t)^3}\,.$$

Allora

$$\begin{aligned} 2\,t^4 = {} & a\,(1+t)^2(1-t)^3 + b\,(1+t)(1-t)^3 + c\,(1-t)^3 \\ & + \alpha\,(1+t)^3(1-t)^2 + \beta\,(1+t)^3(1-t) + \gamma\,(1+t)^3 \end{aligned}$$

e con $t=-1$ rispettivamente $t=1$ otteniamo

$$2 = 8\,c \;\text{ cioè }\; c = \frac{1}{4}\,, \qquad 2 = 8\,\gamma \;\text{ cioè }\; \gamma = \frac{1}{4}\,.$$

Risulta che

$$\begin{aligned} & a\,(1+t)^2(1-t)^3 + b\,(1+t)(1-t)^3 \\ & \qquad + \alpha\,(1+t)^3(1-t)^2 + \beta\,(1+t)^3(1-t) \\ & = 2\,t^4 - \frac{1}{4}\,(1-t)^3 - \frac{1}{4}\,(1+t)^3 = 2\,t^4 - \frac{1}{4}\Big((1-t)^3 + (1+t)^3\Big) \\ & = 2\,t^4 - \frac{1}{4}\Big((1-t) + (1+t)\Big)\Big((1-t)^2 - (1-t)(1+t) + (1+t)^2\Big) \\ & = 2\,t^4 - \frac{1}{2}\Big(1 - 2\,t + t^2 - (1-t^2) + 1 + 2\,t + t^2\Big) \\ & = 2\,t^4 - \frac{1}{2}\big(1 + 3\,t^2\big) = 2\,t^4 - \frac{3}{2}\,t^2 - \frac{1}{2} \\ & = \big(t^2 - 1\big)\left(2\,t^2 + \frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

Semplificando con $1-t^2$ si ottiene

$$a\,(1+t)(1-t)^2+b\,(1-t)^2+\alpha\,(1+t)^2(1-t)+\beta\,(1+t)^2=-2\,t^2-\frac{1}{2}\,.$$

Ora, di nuovo con $t=-1$ rispettivamente $t=1$ risulta

$$4\,b=-\frac{5}{2}\ \text{ cioè }\ c=-\frac{5}{8}\,,\qquad 4\beta=-\frac{5}{2}\ \text{ cioè }\ \beta=-\frac{5}{8}\,.$$

Di conseguenza

$$\begin{aligned}&a\,(1+t)(1-t)^2+\alpha\,(1+t)^2(1-t)\\ &=\ -2\,t^2-\frac{1}{2}+\frac{5}{8}\,(1-t)^2+\frac{5}{8}\,(1+t)^2\\ &=\ -2\,t^2-\frac{1}{2}+\frac{5}{4}\big(1+t^2\big)=-\frac{3}{4}\,t^2+\frac{3}{4}\\ &=\frac{3}{4}\big(1-t^2\big)\ .\end{aligned}$$

Tramite semplificazione con $1-t^2$ otteniamo

$$a\,(1-t)+\alpha\,(1+t)=\frac{3}{4}$$

e con $t=-1$ rispettivamente $t=1$ concludiamo :

$$2\,a=\frac{3}{4}\ \text{ cioè }\ a=\frac{3}{8}\,,\qquad 2\,\alpha=\frac{3}{4}\ \text{ cioè }\ \alpha=\frac{3}{8}\,.$$

Così abbiamo lo sviluppo

$$\begin{aligned}\frac{2\,t^4}{(1-t^2)^3}=&\ \frac{3}{8}\,\frac{1}{1+t}-\frac{5}{8}\,\frac{1}{(1+t)^2}+\frac{1}{4}\,\frac{1}{(1+t)^3}\\ &+\frac{3}{8}\,\frac{1}{1-t}-\frac{5}{8}\,\frac{1}{(1-t)^2}+\frac{1}{4}\,\frac{1}{(1-t)^3}\ .\end{aligned}$$

Risulta

$$\begin{aligned}\int\frac{2\,t^4}{(1-t^2)^3}\,\mathrm{d}t=&\ \frac{3}{8}\,\log|1+t|+\frac{5}{8}\,\frac{1}{1+t}-\frac{1}{8}\,\frac{1}{(1+t)^2}\\ &-\frac{3}{8}\,\log|1-t|-\frac{5}{8}\,\frac{1}{1-t}+\frac{1}{8}\,\frac{1}{(1-t)^2}+C\\ =&\ \frac{3}{8}\,\log\left|\frac{1+t}{1-t}\right|-\frac{5}{4}\,\frac{t}{1-t^2}+\frac{1}{2}\,\frac{t}{(1-t^2)^2}+C\ .\end{aligned}$$

Tenendo conto che $t = \sqrt{\dfrac{x}{1+x}}$, e quindi

$$1 - t^2 = \frac{1}{1+x}\,, \quad \frac{1}{1-t^2} = 1 + x\,, \quad \frac{t}{1-t^2} = \sqrt{x+x^2}\,,$$

concludiamo :

$$\begin{aligned}
&\int \frac{x^2}{\sqrt{x+x^2}}\,\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{2t^4}{(1-t^2)^3}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{3}{8}\log\left|\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{x}}\right| - \frac{5}{4}\sqrt{x+x^2} + \frac{1}{2}(1+x)\sqrt{x+x^2} + C\,.
\end{aligned}$$

Ma

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{x}} &= \frac{\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{x}\right)^2}{\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{x}\right)} \\
&= \left(\sqrt{1+x}+\sqrt{x}\right)^2\,,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log\left|\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{x}}\right| &= \log\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{x}\right)^2 \\
&= 2\log\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{x}\right)
\end{aligned}$$

e

$$-\frac{5}{4}\sqrt{x+x^2} + \frac{1}{2}(1+x)\sqrt{x+x^2} = \frac{2x-3}{4}\sqrt{x+x^2}\,.$$

Cosicché

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x+x^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{4}\log\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{x}\right) + \frac{2x-3}{4}\sqrt{x+x^2} + C\,.$$

Rimarchiamo che abbiamo usato una delle cosiddette *sostituzioni di Eulero* :

il calcolo dell'integrale di una funzione razionale di x e $\sqrt{ax^2+bx+c}$, nel caso che $ax^2+bx+c=0$ ha zeri reali $x_1 < x_2$, può essere ridotto all'integrazione di una funzione razionale tramite la sostituzione

$$t = \sqrt{a\,\frac{x-x_1}{x-x_2}}$$

oppure

$$s = \sqrt{a\,\frac{x - x_2}{x - x_1}}\ .$$

Nel nostro caso, avendo $ax^2 + bx + c = x + x^2$, le sostituzioni di cui sopra sono

$$s = \sqrt{(-1)\,\frac{x - (-1)}{x - 0}} = \sqrt{\frac{1 + x}{x}}\ ,$$

oppure

$$t = \sqrt{(-1)\,\frac{x - 0}{x - (-1)}} = \sqrt{\frac{x}{1 + x}}\ .$$

Nei calcoli precedenti abbiamo fatto uso della seconda sostituzione, ma avremmo potuto fare i calcoli anche usando la prima sostituzione.

Seconda soluzione. Poiché $\sqrt{x + x^2} = \sqrt{x}\,\sqrt{1 + x}$ e per $x = \mathrm{sh}^2 t$ $\big($ove $x > 0$ corrisponde a $t > 0\big)$ nelle espressioni $\sqrt{x} = \mathrm{sh}\,t$, $\sqrt{1 + x} = \sqrt{\mathrm{ch}^2 t} = \mathrm{ch}\,t$ i radicali si sciolgono, ci proponiamo usare la sostituzione

$$x = \mathrm{sh}^2 t\,, \quad \sqrt{x} = \mathrm{sh}\,t\,, \quad \sqrt{1 + x} = \mathrm{ch}\,t\,, \quad \mathrm{d}x = 2\,\mathrm{sh}\,t\,\mathrm{ch}\,t\,\mathrm{d}t\ .$$

Rimarchiamo che t si ottiene da x tramite la formula

$$t = \log\left(\sqrt{1 + x} + \sqrt{x}\right)\ .$$

La funzione continua $\mathbb{R} \ni t \longmapsto \mathrm{sh}\ t \in \mathbb{R}$ è strettamente crescente ed ha limite $+\infty$ in $+\infty$ rispettivamente limite $-\infty$ in $-\infty$. Perciò è invertibile e per la sua inversa, chiamata *arcoseno iperbolico* ed indicato con arcsh, possiamo dedurre una formula. Infatti, $y = \mathrm{sh}\,t$ significa

$$y = \frac{e^t - e^{-t}}{2} = \frac{(e^t)^2 - 1}{2\,e^t}\ ,$$
$$(e^t)^2 - 2\,y\,e^t - 1 = 0$$

e risolvendo questa equazione in e^t si ottiene l'unica soluzione positiva

$$e^t = y + \sqrt{y^2 + 1}\ .$$

Cosicché

$$\operatorname{arcsh} y = \log\left(y + \sqrt{y^2+1}\right), \qquad y \in \mathbb{R}\ .$$

In particolare, nel nostro caso $\sqrt{x} = \operatorname{sh} t$ implica

$$t = \operatorname{arcsh}\sqrt{x} = \log\left(\sqrt{x} + \sqrt{x+1}\right)\ .$$

Si ottiene

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x+x^2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\operatorname{sh}^4 t}{\operatorname{sh} t \operatorname{ch} t}\, 2 \operatorname{sh} t \operatorname{ch} t\, \mathrm{d}t = \int 2 \operatorname{sh}^4 t\, \mathrm{d}t\ .$$

Per integrare $2\operatorname{sh}^4 t$ useremo le formule di duplicazione e di bisezione per il seno e coseno iperbolico :

$$\operatorname{sh}(2\,s) = 2 \operatorname{sh} s \operatorname{ch} s$$

e

$$\operatorname{ch}(2\,s) = 2\operatorname{ch}^2 s - 1 = 2\operatorname{sh}^2 s + 1\,,$$
$$\operatorname{sh}^2 s = \frac{\operatorname{ch}(2\,s) - 1}{2}\,,\ \operatorname{ch}^2 s = \frac{\operatorname{ch}(2\,s)+1}{2}\ .$$

Infatti,

$$2\operatorname{sh} s \operatorname{ch} s = 2\,\frac{e^s - e^{-s}}{2}\,\frac{e^s + e^{-s}}{2} = \frac{e^{2s} - e^{-2s}}{2} = \operatorname{ch}(2\,s)\ ,$$
$$\operatorname{sh}^2 s = \frac{\left(e^s - e^{-s}\right)^2}{4} = \frac{e^{2s} + e^{-2s} - 2}{4} = \frac{\operatorname{ch}(2\,s) - 1}{2}\ ,$$
$$\operatorname{ch}^2 s = \frac{\left(e^s + e^{-s}\right)^2}{4} = \frac{e^{2s} + e^{-2s} + 2}{4} = \frac{\operatorname{ch}(2\,s) + 1}{2}\ .$$

Useremo anche la formula

$$\left(\operatorname{sh} s\right)' = \operatorname{ch} s \ \text{ ossia } \int \operatorname{ch} s\, \mathrm{d}\,s = \operatorname{sh} s + C\,.$$

La verifica è immediata :

$$\left(\operatorname{sh} s\right)' = \left(\frac{e^s - e^{-s}}{2}\right)' = \frac{e^s + e^{-s}}{2} = \operatorname{ch} s\ .$$

Ora, poiché

$$\begin{aligned}2\,\mathrm{sh}^4 t &= 2\left(\frac{\mathrm{ch}\,(2t)-1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}\,\mathrm{ch}^2(2\,t) - \mathrm{ch}\,(2\,t) + \frac{1}{2}\\ &= \frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{ch}\,(4\,t)+1}{2} - \mathrm{ch}\,(2\,t) + \frac{1}{2}\\ &= \frac{1}{4}\,\mathrm{ch}\,(4\,t) - \mathrm{ch}\,(2\,t) + \frac{3}{4}\ ,\end{aligned}$$

concludiamo che

$$\begin{aligned}&\int \frac{x^2}{\sqrt{x+x^2}}\,\mathrm{d}x\\ &= \int 2\,\mathrm{sh}^4 t\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{16}\,\mathrm{sh}\,(4t) - \frac{1}{2}\,\mathrm{sh}\,(2\,t) + \frac{3}{4}\,t + C\\ &= \frac{1}{8}\,\mathrm{sh}\,(2\,t)\,\mathrm{ch}\,(2\,t) - \frac{1}{2}\,\mathrm{sh}\,(2\,t) + \frac{3}{4}\,t + C\\ &= \frac{1}{4}\,\mathrm{sh}\,t\,\mathrm{ch}\,t\,\big(2\,\mathrm{sh}^2 t + 1\big) - \mathrm{sh}\,t\,\mathrm{ch}\,t + \frac{3}{4}\,t + C\\ &= \frac{1}{4}\,\sqrt{x}\,\sqrt{1+x}\,\big(2\,x+1\big) - \sqrt{x}\,\sqrt{1+x} + \frac{3}{4}\,\mathrm{arcsh}\,\sqrt{x} + C\\ &= \frac{2\,x-3}{4}\,\sqrt{x+x^2} + \frac{3}{4}\,\log\big(\sqrt{1+x}+\sqrt{x}\big) + C\ .\end{aligned}$$

3) : L'equazione $z^4 - 2\,z^2 + 2 = 0$ è una equazione algebrica di grado 2 in z^2 e perciò possiamo usare la formula di risoluzione di questo tipo di equazioni per trovare i posibili valori di z^2 :

$$z^2 = 1 \pm \sqrt{1-2} = 1 \pm i\ .$$

Resta trovare tutte le radici quadrate di $1+i$ e $1-i$ nel campo compesso. Per questa fine ci serve la loro forma trigonometrica :

$$\begin{aligned}&\big|1 \pm i\big| = \sqrt{1^2 + (\pm 1)^2} = \sqrt{2}\,,\\ &\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} \ \text{ e } \ \sin\varphi = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\,,\ \text{perciò possiamo porre } \varphi = \pm\frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

ed otteniamo

$$1 \pm i = \sqrt{2}\left(\cos\left(\pm\,\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\pm\,\frac{\pi}{4}\right)\right).$$

Ora, se $z = r\big(\cos\psi + i\sin\psi\big)$ e $z^2 = 1 \pm i$, allora la formula di De Moivre implica

$$r^2\big(\cos(2\,\psi) + i\sin(2\,\psi)\big) = \sqrt{2}\left(\cos\left(\pm\,\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\pm\,\frac{\pi}{4}\right)\right),$$

cioè $r^2 = \sqrt{2}$ e

$$\begin{aligned} 2\,\psi &= \varphi + 2\,k\,\pi = \pm\frac{\pi}{4} + 2\,k\,\pi\,, \text{ ossia} \\ \psi &= \frac{\varphi}{2} + k\,\pi = \pm\frac{\pi}{8} + k\,\pi \end{aligned}$$

con k un intero.

Perciò le radici quadrate di $1 + i$ nel campo complesso sono

$$z_1 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right)$$

e

$$\begin{aligned} z_2 &= \sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{8} + \pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{8} + \pi\right)\right) \\ &= \sqrt[4]{2}\left(-\cos\frac{\pi}{8} - i\sin\frac{\pi}{8}\right) \\ &= -\,z_1\,, \end{aligned}$$

poiché, "cos" e "sin" essendo funzioni periodiche col periodo $2\,\pi$, per $k = 2$ riotteniamo z_1, poi per $k = 3$ riotteniamo z_2, e cosi via.

Similmente, le radici quadrate di $1 - i$ nel campo complesso sono

$$\begin{aligned} z_3 &= \sqrt[4]{2}\left(\cos\left(-\,\frac{\pi}{8}\right) + i\sin\left(-\,\frac{\pi}{8}\right)\right) \\ &= \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi}{8} - i\sin\frac{\pi}{8}\right) \\ &= \overline{z_1} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} z_4 &= \sqrt[4]{2}\left(\cos\Big(-\frac{\pi}{8}+\pi\Big)+i\sin\Big(-\frac{\pi}{8}+\pi\Big)\right)\\ &= \sqrt[4]{2}\left(-\cos\Big(-\frac{\pi}{8}\Big)-i\sin\Big(-\frac{\pi}{8}\Big)\right)\\ &= -\,z_3\\ &= -\,\overline{z_1}\,. \end{aligned}$$

Concludiamo che le soluzioni del'equazione $z^4 - 2\,z^2 + 2 = 0$ nel campo complesso sono

$$\begin{aligned} z_1 &= \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8}\right)\\ z_2 &= -\,z_1\\ z_3 &= \overline{z_1}\\ z_4 &= -\,\overline{z_1}\,. \end{aligned}$$

Rimarco. Possiamo andare anche oltre, calcolando esplicitamente

$$\cos\frac{\pi}{8}\,,\ \sin\frac{\pi}{8}\ \text{ e quindi }\ z_1\,, z_2=-z_1\,, z_3=\overline{z_1}\,, z_4=-\overline{z_1}\,.$$

Infatti, usando le formule trigonometriche

$$\cos^2\frac{\theta}{2}=\frac{1+\cos\theta}{2}\,,\qquad \sin^2\frac{\theta}{2}=\frac{1-\cos\theta}{2}$$

con $\theta = \dfrac{\pi}{4}$, si ottengono

$$\begin{aligned} \cos^2\frac{\pi}{8} &= \frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2} = \frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{2} = \frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}\,,\\ \sin^2\frac{\pi}{8} &= \frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2} = \frac{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}{2} = \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}\,, \end{aligned}$$

cioè

$$\cos\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{\sqrt{2}+1}}{\sqrt{2}\sqrt[4]{2}}\,,\quad \sin\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{\sqrt{2}-1}}{\sqrt{2}\sqrt[4]{2}}\,.$$

Risulta che le soluzioni del'equazione $z^4 - 2\, z^2 + 2 = 0$ nel campo complesso sono

$$\begin{aligned}
z_1 &= \sqrt[4]{2}\left(\frac{\sqrt{\sqrt{2}+1}}{\sqrt{2}\,\sqrt[4]{2}} + i\frac{\sqrt{\sqrt{2}-1}}{\sqrt{2}\,\sqrt[4]{2}}\right) \\
&= \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}\,, \\
z_2 &= -\,z_1 = -\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}\,, \\
z_3 &= \overline{z_1} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}\,, \\
z_4 &= -\,\overline{z_1} = -\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}\,.
\end{aligned}$$

4) : Poiché

$$\left|\frac{\cos x}{x^\alpha}\right| \leq \frac{1}{x^\alpha}\,, \qquad x > 0$$

e l'integrale

$$\int_\pi^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$$

converge per $\alpha > 1$, dal criterio del confronto risulta che l'integrale improprio

$$\int_\pi^{+\infty} \frac{\cos x}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$$

è assolutamente convergente per $\alpha > 1$. Tuttavia in questo modo non otteniamo informazioni sulla convergenza o meno nel caso $0 \leq \alpha \leq 1$.

Usando però integrazione per parti, possiamo "aumentare l'esponente nel denominatore", aumentando così le prospettive di convergenza. Più precisamente, per ogni $b > \pi$ abbiamo

$$\int_\pi^b \frac{\cos x}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x = \int_\pi^b \frac{(\sin x)'}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x = \frac{\sin x}{x^\alpha}\Big|_\pi^b - \int_\pi^b \left(\frac{1}{x^\alpha}\right)' \sin x\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{\sin b}{b^\alpha} + \alpha \int_\pi^b \frac{\sin x}{x^{1+\alpha}}\,\mathrm{d}x\ .$$

Ora, usando il criterio del confronto e la convergenza dell'integrale

$$\int_\pi^{+\infty} \frac{1}{x^{1+\alpha}}\,\mathrm{d}x\,, \qquad \alpha > 0\ ,$$

deduciamo che per $\alpha > 0$ l'integrale

$$\int_\pi^{+\infty} \frac{\sin x}{x^{1+\alpha}}\,\mathrm{d}x$$

è (addirittura assolutamente) convergente e quindi esiste il limite

$$\lim_{b\to+\infty} \int_\pi^b \frac{\cos x}{x^\alpha} = \underbrace{\lim_{b\to+\infty} \frac{\sin b}{b^\alpha}}_{=0} + \alpha \lim_{b\to+\infty} \int_\pi^b \frac{\sin x}{x^{1+\alpha}}\,\mathrm{d}x = \alpha \int_\pi^{+\infty} \frac{\sin x}{x^{1+\alpha}}\,\mathrm{d}x\ .$$

In altre parole, per $\alpha > 0$ l'integrale improprio

$$\int_\pi^{+\infty} \frac{\cos x}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$$

converge.

D'altro canto e facile vedere, che per $\alpha = 0$ l'integrale

$$\int_\pi^{+\infty} \cos x\,\mathrm{d}x$$

non è convergente:

Da una parte

$$\underbrace{\int\limits_{\pi}^{2k\pi} \cos x \, \mathrm{d}x}_{=0} \longrightarrow 0\,,$$

e dall'altra parte

$$\underbrace{\int\limits_{\pi}^{2k\pi+\frac{\pi}{2}} \cos x \, \mathrm{d}x}_{=1} \longrightarrow 1\,.$$

5) **:** Applichiamo il criterio del rapporto : poiché

$$\frac{\dfrac{\big((n+1)!\big)^{\alpha}}{(n+1)^{n+1}}}{\dfrac{(n!)^{\alpha}}{n^n}} = \frac{(n+1)^{\alpha-1}}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}} \longrightarrow \frac{1}{e}\cdot\begin{cases} 0 & \text{se } \alpha<1 \\ 1 & \text{se } \alpha=1 \\ +\infty & \text{se } \alpha>1 \end{cases}\,,$$

cioè

$$\frac{\dfrac{\big((n+1)!\big)^{\alpha}}{(n+1)^{n+1}}}{\dfrac{(n!)^{\alpha}}{n^n}} \longrightarrow \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha<1 \\ \dfrac{1}{e}<1 & \text{se } \alpha=1 \\ +\infty & \text{se } \alpha>1 \end{cases}\,,$$

la serie data converge se e soltanto se $\alpha \leq 1$.