NOME: ....   **MATRICOLA:** ....

Corso di Laurea in Fisica, A.A. 2015/2016
Calcolo 1, Esame scritto del 20.01.2016

1) Data la funzione

$$f(x) = (x+1)\, e^{\frac{x}{x-1}}\,,$$

a) determinare il dominio (massimale) di f ;

b) trovare tutti gli asintoti di f ;

c) trovare tutti i massimi e minimi locali di f ;

d) studiare la convessità di f ;

e) tracciare un grafico qualitativo per f .

2) Discutere la convergenza della serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a^{\sqrt{k}}$$

al variare del parametro reale $a > 0$.

3) Dire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ converge l'integrale improprio

$$\int_0^{\pi^2} x^\alpha \frac{\sin\sqrt{x}}{(\pi^2 - x)^\alpha}\,\mathrm{d}x\,.$$

4) Sia data la funzione

$$f(x\,,y) = xy^2 - x^2 - y^2\,, \qquad (x\,,y) \in \mathbb{R}^2.$$

a) Trovare i massimi e minimi locali di f.

b) Trovare i massimi e minimi della restrizione di f alla circonferenza $x^2 + y^2 = 1$.

c) Trovare i massimi e minimi della restrizione di f al disco $x^2 + y^2 \leq 1$.

5) Calcolare la lunghezza del grafico della funzione

$$f(x) = -\ln(\cos x)$$

definita sull'intervallo $\left[0\,, \frac{\pi}{3}\right]$.

Soluzioni:

1) **:** a) $f(x)$ è definito per ogni $x \in \mathbb{R}$ per quale $\dfrac{x}{x-1}$ ha senso in $\mathbb{R}$, cioè per $x \neq 1$. Perciò il dominio di f è $\mathbb{R} \setminus \{1\} = \big(-\infty, 1\big) \cup \big(1, +\infty\big)$.

b) Per vedere se f ha asintoto verticale in $x = 1$, calcoliamo i limiti

$$\lim_{x\to 1-0} f(x) = \lim_{1>x\to 1} (x+1)\, e^{\frac{x}{x-1}} = 2\, e^{\frac{1}{-0}} = 2\, e^{-\infty} = 0\,,$$
$$\lim_{x\to 1+0} f(x) = \lim_{1<x\to 1} (x+1)\, e^{\frac{x}{x-1}} = 2\, e^{\frac{1}{+0}} = 2\, e^{+\infty} = +\infty\,.$$

Risulta che la retta $x = 1$ è un asintoto verticale di f da destra, ma non da sinistra. Per di più, ponendo $f(1) := 0$ si ottiene una estensione di f su tutto $\mathbb{R}$, che è continua a sinistra anche in 1.

La prima condizione per l'esistenza di un asintoto obliquo per $x \to +\infty$ o per $x \to -\infty$ è l'esistenza del limite finito

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x+1}{x}\, e^{\frac{x}{x-1}} = e\,.$$

La seconda condizione perché esisti un asintoto obliquo per $x \to +\infty$ o per $x \to -\infty$, necessariamente di forma

$$y = m\,x + n = e\,x + n\,,$$

è l'esistenza del limite finito

$$n = \lim_{x\to\pm\infty} \big(f(x) - m\,x\big) = \lim_{x\to\pm\infty} \Big((x+1)\, e^{\frac{x}{x-1}} - e\,x\Big)\,.$$

Ma, siccome

$$(x+1)\, e^{\frac{x}{x-1}} - e\,x = \Big(x\, e^{\frac{x}{x-1}} - e\,x\Big) + e^{\frac{x}{x-1}} = e\,x\Big(e^{\frac{x}{x-1}-1} - 1\Big) + e^{\frac{x}{x-1}}$$
$$= e\,\frac{x}{x-1}\,\frac{e^{\frac{1}{x-1}} - 1}{\frac{1}{x-1}} + e^{\frac{x}{x-1}}\,,$$

e

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{e^{\frac{1}{x-1}} - 1}{\frac{1}{x-1}} \overset{t=\frac{1}{x-1}}{=} \lim_{t\to 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1\,,$$

abbiamo

$$\lim_{x\to\pm\infty}\Big((x+1)\,e^{\frac{x}{x-1}}-e\,x\Big)=2\cdot 1\cdot 1+e=2e$$

e di conseguenza $y=e\,x+2e$ è asintoto obliquo di f sia per $x\to+\infty$ che per $x\to-\infty$.

c) Per trovare gli intervalli di monotonia e gli extremi locali di f, dobbiamo prima calcolare la sua derivata :

$$\begin{aligned}f'(x)&=e^{\frac{x}{x-1}}+(x+1)\,e^{\frac{x}{x-1}}\cdot\frac{x-1-x}{(x-1)^2}=e^{\frac{x}{x-1}}\bigg(1-\frac{x+1}{(x-1)^2}\bigg)\\&=\frac{x(x-3)}{(x-1)^2}\,e^{\frac{x}{x-1}}\end{aligned}$$

Risulta che f' si annulla in $x=0$ ed $x=3$ ed è

$$\begin{aligned}&>0 \text{ in } \big(-\infty\,,0\big)\ ,\\&<0 \text{ in } \big(0\,,1\big)\ ,\\&<0 \text{ in } \big(1\,,3\big)\ ,\\&>0 \text{ in } \big(3\,,+\infty\big)\ .\end{aligned}$$

Perciò f risulta ad essere

$$\begin{aligned}&\text{strettamente crescente in } \big(-\infty\,,0\big]\,,\\&\text{strettamente decrescente in } \big[0\,,1\big)\,,\\&\text{strettamente decrescente in } \big(1\,,3\big]\,,\\&\text{strettamente crescente in } \big[3\,,+\infty\big),.\end{aligned}$$

In particolare, $x=0$ è un punto di massimo locale ed $x=3$ è un punto di minimo locale. I valori di f in questi punti sono

$$f(0)=1\,,\qquad f(3)=4\,e^{\frac{3}{2}}=4\,e\sqrt{e}\approx 17,926756\ldots\,.$$

Osserviamo che l'estensione di f ad una funzione continua a sinistra su tutto $\mathbb{R}$ ammette derivata sinistra nulla in $x=1$:

$$f_s^{'}(1)=\lim_{1>x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{1>x\to 1}\frac{x+1}{x-1}\,e^{\frac{x}{x-1}}$$

$$= -\lim_{1>x\to 1} \frac{x+1}{x} \cdot \frac{\frac{x}{1-x}}{e^{\frac{x}{1-x}}} = -2 \lim_{t\to+\infty} \frac{t}{e^t}$$
$$= 0 \, .$$

In altre parole, la semiretta $y = 0\,, x \leq 1\,$, è tangente in $x = 1$ a sinistra al grafico di f.

Osserviamo anche che f si annulla solo in $x = -1$, perciò il grafico di f interseca l'asse delle ascisse solo nel punto $(-1, 0)$.

d) Per lo studio della convessità di f ci serve la sua seconda derivata :

$$f''(x) = \frac{(2x-3)(x-1)^2 - 2\,(x-1)(x^2-3x)}{(x-1)^4}\, e^{\frac{x}{x-1}} + \frac{x^2-3x}{(x-1)^2}\, e^{\frac{x}{x-1}} \cdot \frac{x-1-x}{(x-1)^2}$$
$$= \frac{(x-1)\,(x+3)}{(x-1)^4}\, e^{\frac{x}{x-1}} - \frac{x^2-3x}{(x-1)^4}\, e^{\frac{x}{x-1}}$$
$$= \frac{5x-3}{(x-1)^4}\, e^{\frac{x}{x-1}} \, .$$

Deduciamo che f'' si annula solo in $\frac{3}{5} = 0,6$ e

$$f''(x) < 0 \ \text{ per } \ x \in \Big(-\infty\,, \frac{3}{5}\Big)\,,$$
$$f''(x) > 0 \ \text{ per } \ x \in \Big(\frac{3}{5}\,, 1\Big) \cup \big(1\,, +\infty\big)\,.$$

Di conseguenza f

$$\text{è concava in } \Big(-\infty\,, \frac{3}{5}\Big]\,,$$
$$\text{è convessa in } \Big[\frac{3}{5}\,, 1\Big) \text{ ed in } \big(1\,, +\infty\big)\,,$$

avendo in $\frac{3}{5}$ un punto di flesso. Rimarchiamo che

$$f\Big(\frac{3}{5}\Big) = \frac{8}{5}\, e^{-\frac{3}{2}} \quad \approx \quad 0,357008...\,,$$

$$f'\Big(\frac{3}{5}\Big) = -4e^{-\frac{3}{2}} \approx -0,8925206\ldots .$$

e) Riportiamo il comportamento di f', f'' e f nella seguente tabella :

x	$-\infty$		-1		0		$3/5$		1		3		$+\infty$
f'		$+$			0		$-$		$0\,\vert\,$	$-$	0	$+$	
f''				$-$			0	$+$	$\vert$			$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\frac{8}{5}e^{-3/2}$	$\searrow$	$0\,\vert\,+\infty$	$\searrow$	$4e^{3/2}$	$\nearrow$	$+\infty$

Usando le informazioni di cui sopra, tracciamo ora il grafico di f :

La retta $y = e\,x + 2\,e$ è asintoto obliquo di f per $x \to -\infty$. Il grafico di f sale da $-\infty$ fino al punto di massimo locale $(0\,,1)$, nel quale ha tangente orizzontale, attraversando l'asse delle ascisse in $x = -1$. Poi scende verso il punto $(1\,,0)$, nel quale ha pure tangente orizzontale, attraversando il punto di flesso

$$\left(\frac{3}{5}\,,\,\frac{8}{5}\,e^{-\frac{3}{2}}\right) \approx \big(\,0,6\;,\;0,357\,\big)\;,$$

dove ha tangente con il coefficiente angolare uguale a

$$-4\,e^{-\frac{3}{2}} \approx -0,89252\,.$$

Prima del punto di flesso il grafico è concavo e poi diventa convesso.

Durante tutto questo percorso, per $x < 1$, il grafico di f si trova sotto l'asintoto $y = e\,x + 2\,e$:

$$f(x) < e\,x + 2\,e \text{ per ogni } x < 1\,.$$

Per la verifica indichiamo $g(x) := e\,x + 2\,e - f(x)\,, x < 1$. Allora $g'(x) = e - f'(x)$ e, siccome

$$g''(x) = -f''(x) > 0 \text{ per } x < \frac{3}{5}\,,$$

g' è strettamente crescente tra $-\infty$ e $\dfrac{3}{5}$. Risulta

$$\inf_{x<3/5} g'(x) = \lim_{x\to-\infty} g'(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(e - \frac{x(x-3)}{(x-1)^2}\,e^{\frac{x}{x-1}}\right) = e - e = 0$$

e di conseguenza $g'(x) > 0$ per ogni $x < \dfrac{3}{5}$.

Ma per $\dfrac{3}{5} < x < 1$ abbiamo ovviamente $g'(x) = e - \underbrace{f'(x)}_{<0} > 0\,,$
perciò $g'(x) > 0$ per ogni $x < 1\,.$
Risulta che $g(x)$ è strettamente crescente in $\big(-\infty\,,1\big)$ e, siccome $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \big(e\,x + 2\,e - f(x)\big) = 0$ ($y = e\,x + 2\,e$ è asintoto di f per $x \to -\infty\,$!), concludiamo che

$$\inf_{x<1} g(x) = \lim_{x\to-\infty} g(x) = 0\,.$$

Ora la retta $x = 1$ è asintoto verticale da destra ed il grafico di f scende dall'infinito in 1 fino al punto di minimo locale

$$\Big(3\,,4\,e^{\frac{3}{2}}\Big) \approx \big(\,3\ ,\ 17{,}926756...\,\big)\,,$$

nel quale ha tangente orizzontale. Poi il grafico sale a $+\infty$ avendo la retta $y = e\,x + 2\,e$ come asintoto obliquo per $x \to +\infty\,.$

Durante tutto questo percorso, per $x > 1\,,$ il grafico di f è convesso e si trova sopra l'asintoto $y = e\,x + 2\,e$:

$$f(x) > e\,x + 2\,e \text{ per ogni } x > 1\,.$$

Per la verifica indichiamo $h(x) := f(x) - \big(e\,x + 2\,e\big)\,, x > 1\,.$ Allora $h'(x) = f'(x) - e$ e, siccome

$$h''(x) = f''(x) > 0 \text{ per } x > 1\,,$$

h' è strettamente crescente tra 1 e $+\infty\,.$ Risulta

$$\sup_{x>1} h'(x) = \lim_{x\to+\infty} h'(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x(x-3)}{(x-1)^2}\,e^{\frac{x}{x-1}} - e\right) = e - e = 0$$

e di conseguenza $h'(x) < 0$ per ogni $x > 1\,.$
Risulta che $h(x)$ è strettamente decrescente in $\big(1\,,+\infty\big)$ e, siccome $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \Big(f(x) - \big(e\,x + 2\,e\big)\Big) = 0$ ($y = e\,x + 2\,e$ è asintoto di f per $x \to +\infty\,$!), concludiamo che

$$\inf_{x>1} h(x) = \lim_{x\to+\infty} h(x) = 0\,.$$

2) : Si tratta di una serie a termini positivi. Il criterio della radice non ci da nessuna informazione sulla sua convergenza perché

$$\lim_{k\to\infty} \left(a^{\sqrt{k}}\right)^{1/k} = \lim_{k\to\infty} a^{1/\sqrt{k}} = 1\,.$$

Perciò dobbiamo ricorrere al confronto con serie di cui conosciamo la convergenza.

Per $a \geq 1$ la risposta è facile: la serie diverge perché la successione $\left(a^{\sqrt{k}}\right)_{k\geq 0}$ non converge a 0:

$$\lim_{k\to\infty} a^{\sqrt{k}} = +\infty \text{ per } a > 1 \text{ mentre } \lim_{k\to\infty} 1^{\sqrt{k}} = 1\,.$$

Nel caso $0 < a < 1$ invece abbiamo convergenza, che si può verificare o tramite confronto con una serie armonica generalizzata convergente, per esempio con $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^2}$, o tramite il criterio integrale per la convergenza delle serie a termini positivi.

Verifica usando il criterio del confronto :

Siccome

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a^{\sqrt{k}}}{\dfrac{1}{k^2}} = \lim_{k\to\infty} \frac{k^2}{\left(\dfrac{1}{a}\right)^{\sqrt{k}}} \overset{t=\sqrt{k}}{=} \lim_{t\to+\infty} \frac{t^4}{\left(\dfrac{1}{a}\right)^{t}} = 0$$

perché $\dfrac{1}{a} > 1$ ed è noto che il rapporto di una potenza ed una funzione esponenziale con base > 1 ha limite 0 a $+\infty$, per il criterio del confronto asintotico la convergenza della serie $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^2}$ implica la convergenza della serie $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a^{\sqrt{k}}$.

Possiamo però procedere anche in un modo più esplicito, tramite l'uso della disuguaglianza

$$e^t = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \frac{t^5}{5!} + \ldots > \frac{t^4}{4!} = \frac{t^4}{24}\,, \quad t > 0\ :$$

Siccome $-\ln a = \ln \dfrac{1}{a} > 0$, risulta per ogni $k \geq 1$

$$a^{-\sqrt{k}} = e^{(-\ln a)\sqrt{k}} > \frac{(-\ln a)^4 k^2}{24} \implies a^{\sqrt{k}} < \frac{24}{(\ln a)^4} \cdot \frac{1}{k^2}$$

e per il criterio ordinario del confronto la convergenza della serie $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^2}$ implica la convergenza della serie $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a^{\sqrt{k}}$.

Verifica usando il criterio integrale :

La funzione

$$f : [0\,,+\infty) \ni x \longmapsto a^{\sqrt{x}} \in (0\,,+\infty)$$

è positiva e strettamente decrescente, quindi secondo il criterio integrale per la convergenza delle serie a termini positivi la convergenza della serie $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a^{\sqrt{k}} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} f(k)$ è equivalente alla convergenza dell'integrale improprio $\int\limits_0^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$. Ma

$$\int\limits_0^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^b a^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \overset{t=\sqrt{x}}{=} \int\limits_0^{b^2} a^t \underbrace{(2\,t)\,\mathrm{d}t}_{=\,\mathrm{d}x} = 2\int\limits_0^{b^2} t\,e^{t\ln a}\,\mathrm{d}t\,, \qquad b>0$$

ed è facile trovare una primitiva di $t \longmapsto t\,e^{t\ln a}$ tramite integrazione per parti :

Siccome $e^{t\ln a} = \Big(\dfrac{e^{t\ln a}}{\ln a}\Big)'$, integrando per parti si ottiene

$$\begin{aligned}\int t\,e^{t\ln a}\,\mathrm{d}t &= \int t\,\mathrm{d}\frac{e^{t\ln a}}{\ln a} = t\,\frac{e^{t\ln a}}{\ln a} - \int \frac{e^{t\ln a}}{\ln a}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{t\,e^{t\ln a}}{\ln a} - \frac{e^{t\ln a}}{(\ln a)^2} + \text{costante}\,.\end{aligned}$$

Risulta

$$\begin{aligned}\int\limits_0^b f(x)\,\mathrm{d}x &= 2\Big(\frac{t\,e^{t\ln a}}{\ln a} - \frac{e^{t\ln a}}{(\ln a)^2}\Big)\Big|_{t=0}^{t=b^2} \\ &= 2\Big(\frac{b^2 e^{b^2\ln a}}{\ln a} - \frac{e^{b^2\ln a}}{(\ln a)^2} + \frac{1}{(\ln a)^2}\Big)\,, \qquad b>0\,.\end{aligned}$$

Ora, siccome $0 < a < 1 \Longrightarrow \ln a < 0$ e quindi

$$\lim_{b \to +\infty} b^n e^{b^2 \ln a} = 0 \text{ per ogni intero } n\,,$$

possiamo concludere la convergenza

$$\int\limits_0^{+\infty} t\, e^{t \ln a}\, \mathrm{d}t = \lim_{b \to +\infty} \int\limits_0^{b} f(x)\, \mathrm{d}x = \frac{2}{(\ln a)^2} < +\infty\,.$$

Osservazione.

Confronto con una serie geometrica non da nessun risultato!

Cerchiamo infatti a confrontare la serie $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} a^{\sqrt{k}}, a > 0\,$, con una serie geometrica $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b^k, b > 0$ (confronto è possibile solo con serie a termini positivi!). Siccome

$$\begin{aligned}
\lim_{k \to \infty} \frac{a^{\sqrt{k}}}{b^k} &= \lim_{k \to \infty} \frac{e^{\sqrt{k} \ln a}}{e^{k \ln b}} = \lim_{k \to \infty} e^{\sqrt{k} \ln a - k \ln b} \\
&= \begin{cases} \lim\limits_{k \to \infty} e^{-k \ln b \left(1 - \dfrac{\ln a}{\sqrt{k} \ln b}\right)} & \text{se } b \neq 1 \\ \lim\limits_{k \to \infty} e^{\sqrt{k} \ln a} & \text{se } b = 1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} +\infty & \text{se } b < 1\,, \\ 0 & \text{se } b > 1\,, \\ +\infty & \text{se } b = 1 \text{ e } a > 1\,, \\ 0 & \text{se } b = 1 \text{ e } a < 1\,, \\ 1 & \text{se } b = 1 \text{ e } a = 1\,, \end{cases}
\end{aligned}$$

per il criterio del confronto asintotico

$$\sum_{k=0}^{\infty} b^k \text{ diverge } \Longrightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} a^{\sqrt{k}} \text{ diverge } \quad - \text{ se } b < 1\,,$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} b^k \text{ converge } \Longrightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} a^{\sqrt{k}} \text{ converge } - \text{ se } b > 1\,,$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} b^k \text{ diverge } \Longrightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} a^{\sqrt{k}} \text{ diverge } \quad - \text{ se } b = 1 \text{ e } a > 1\,,$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} b^k \text{ converge } \Longrightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} a^{\sqrt{k}} \text{ converge } - \text{ se } b = 1 \text{ e } a < 1\,,$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} b^k \text{ converge } \Longleftrightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} a^{\sqrt{k}} \text{ converge } - \text{ se } b = 1 \text{ e } a = 1\,.$$

Ma per $b < 1$ la serie $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b^k$ non diverge, quindi la prima implicazione è inutile. Similmente, per $b > 1$ la serie $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b^k$ non converge, quindi anche la seconda implicazione è inutile.

Poi, per $b = 1$ e $a > 1$ è vero che la divergenza di $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b^k$ implica la divergenza di $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a^{\sqrt{k}}$, ma questa implicazione non ci serve a niente perché per $a > 1$ la divergenza della serie $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a^{\sqrt{k}}$ risulta subito dalla nonsoddisfazione della condizione necessaria $a^{\sqrt{k}} \longrightarrow 0$.

Per $b = 1$ e $a < 1$ la convergenza di $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a^{\sqrt{k}}$ sarebbe implicata dalla convergenza di $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b^k$, ma questa serie per $b = 1$ non è convergente.

Finalmente, per $b = a = 1$ l'equivalenza della convergenza di $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b^k$ a quella di $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a^{\sqrt{k}}$ è una banalità (ambe serie divergono trivialmente).

3) : L'integrale $\int\limits_0^{\pi^2} x^\alpha \dfrac{\sin\sqrt{x}}{(\pi^2 - x)^\alpha}\, \mathrm{d}x$ è improprio sia in 0 che in π^2, per la sua

convergenza devono convergere ambi integrali

$$\int_0^{(\pi/2)^2} x^\alpha \frac{\sin\sqrt{x}}{(\pi^2-x)^\alpha}\,\mathrm{d}x = \lim_{0<a\to 0} \int_{a^2}^{(\pi/2)^2} x^\alpha \frac{\sin\sqrt{x}}{(\pi^2-x)^\alpha}\,\mathrm{d}x\,, \tag{1}$$

$$\int_{(\pi/2)^2}^{\pi^2} x^\alpha \frac{\sin\sqrt{x}}{(\pi^2-x)^\alpha}\,\mathrm{d}x = \lim_{\pi>b\to \pi} \int_{(\pi/2)^2}^{b^2} x^\alpha \frac{\sin\sqrt{x}}{(\pi^2-x)^\alpha}\,\mathrm{d}x\,. \tag{2}$$

Tramite il cambio di variabile

$$x=t^2\,,\qquad \mathrm{d}x = 2\,t\,\mathrm{d}t$$

(1) e (2) si trasformano in

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} t^{2\alpha}\frac{\sin t}{(\pi^2-t^2)^\alpha}\,2\,t\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\pi/2} 2\,\frac{t^{2\alpha+1}\sin t}{(\pi^2-t^2)^\alpha}\,\mathrm{d}t\\ &= \lim_{0<a\to 0}\int_a^{\pi/2} 2\,\frac{t^{2\alpha+1}\sin t}{(\pi^2-t^2)^\alpha}\,\mathrm{d}t\,,\end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned}\int_{\pi/2}^{\pi} t^{2\alpha}\frac{\sin t}{(\pi^2-t^2)^\alpha}\,2\,t\,\mathrm{d}x &= \int_{\pi/2}^{\pi} 2\,\frac{t^{2\alpha+1}\sin t}{(\pi^2-t^2)^\alpha}\,\mathrm{d}t\\ &= \lim_{\pi>b\to \pi}\int_{\pi/2}^{b} 2\,\frac{t^{2\alpha+1}\sin t}{(\pi^2-t^2)^\alpha}\,\mathrm{d}t\,.\end{aligned} \tag{4}$$

Useremo il criterio del confronto asintotico:

Siccome

$$\lim_{0<t\to 0}\frac{2\,\dfrac{t^{2\alpha+1}\sin t}{(\pi^2-t^2)^\alpha}}{t^{2\alpha+2}} = \lim_{0<t\to 0}\left(\frac{\sin t}{t}\cdot\frac{2}{(\pi^2-t^2)^\alpha}\right) = \frac{2}{\pi^{2\alpha}} = \begin{cases} >0\\ <+\infty\end{cases}\,,$$

la convergenza dell'integrale (3) è equivalente alla convergenza di

$$\int_0^{\pi/2} t^{2\alpha+2}\,\mathrm{d}t\,.$$

Ma quest'integrale converge se e soltanto se $2\,\alpha+2 > -1 \iff \alpha > -\dfrac{3}{2}$, quando

$$\int_0^{\pi/2} t^{2\alpha+2}\,\mathrm{d}t = \frac{t^{2\,\alpha+3}}{2\,\alpha+3}\Bigg|_{t=0}^{t=\pi/2} = \frac{1}{2\,\alpha+3}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2\,\alpha+3}.$$

Perciò

$$\int_0^{(\pi/2)^2} x^\alpha \frac{\sin\sqrt{x}}{(\pi^2-x)^\alpha}\,\mathrm{d}x \text{ converge} \iff \alpha > -\frac{3}{2}\,. \tag{5}$$

D'altro canto, tramite il cambio di variabile

$$t = \pi - s\,, \qquad \mathrm{d}t = -\,\mathrm{d}s$$

l'integrale (4), cioè

$$\int_{\pi/2}^{\pi} 2\,\frac{t^{2\,\alpha+1}\sin t}{(\pi+t)^\alpha(\pi-t)^\alpha}\,\mathrm{d}t = \lim_{\pi>b\to\pi}\int_{\pi/2}^{b} 2\,\frac{t^{2\,\alpha+1}\sin t}{(\pi+t)^\alpha(\pi-t)^\alpha}\,\mathrm{d}t\,,$$

si trasforma in

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} 2\,\frac{(\pi-s)^{2\,\alpha+1}\sin(\pi-s)}{(2\,\pi-s)^\alpha s^\alpha}\,\mathrm{d}s &= \int_0^{\pi/2} 2\,\frac{(\pi-s)^{2\,\alpha+1}}{(2\,\pi-s)^\alpha}\,\frac{\sin s}{s^\alpha}\,\mathrm{d}s\\ &= \lim_{0<a\to0}\int_a^{\pi/2} 2\,\frac{(\pi-s)^{2\,\alpha+1}}{(2\,\pi-s)^\alpha}\,\frac{\sin s}{s^\alpha}\,\mathrm{d}s\,.\end{aligned} \tag{6}$$

Siccome

$$\begin{aligned}\lim_{0<s\to0}\frac{2\,\dfrac{(\pi-s)^{2\,\alpha+1}}{(2\,\pi-s)^\alpha}\,\dfrac{\sin s}{s^\alpha}}{\dfrac{1}{s^{\alpha-1}}} &= \lim_{0<s\to0}\left(2\,\frac{(\pi-s)^{2\,\alpha+1}}{(2\,\pi-s)^\alpha}\,\frac{\sin s}{s}\right)\\ &= 2\,\frac{\pi^{2\,\alpha+1}}{(2\,\pi)^\alpha} = \frac{\pi^{\alpha+1}}{2^{\alpha-1}} = \begin{cases} >0\\ <+\infty\end{cases},\end{aligned}$$

la convergenza dell'integrale (6) è equivalente alla convergenza di

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{s^{\alpha-1}}\, \mathrm{d}s\,.$$

Ma quest'integrale converge se e soltanto se è soddisfatta la condizione $\alpha - 1 < 1 \Longleftrightarrow \alpha < 2$, quando

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{s^{\alpha-1}}\, \mathrm{d}s = \frac{s^{2-\alpha}}{2-\alpha}\Bigg|_{s=0}^{s=\pi/2} = \frac{1}{2-\alpha}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2-\alpha}.$$

Perciò

$$\int_{(\pi/2)^2}^{\pi^2} x^\alpha \frac{\sin\sqrt{x}}{(\pi^2-x)^\alpha}\, \mathrm{d}x \text{ converge } \Longleftrightarrow \alpha < 2\,. \tag{7}$$

Conclusione:

Infine (5) e (7) implicano la soluzione del compito:

$$\int_0^{\pi^2} x^\alpha \frac{\sin\sqrt{x}}{(\pi^2-x)^\alpha}\, \mathrm{d}x \text{ converge } \Longleftrightarrow -\frac{3}{2} < \alpha < 2\,.$$

4) : a) I massimi e minimi locali di f sono *punti stazionari*, cioè annullano le derivate parziali di

$$f(x,y) = xy^2 - x^2 - y^2\,.$$

Per trovarli, calcoliamo le derivate parziali di f:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2 - 2x\,,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2xy - 2y\,.$$

Risulta che i punti stazionari di f sono le soluzioni del sistema di equazioni

$$\begin{cases} y^2 - 2x = 0 \\ 2y(x-1) = 0 \end{cases}.$$

Dalla seconda equazione si ottiene

$$y = 0 \text{ oppure } x = 1\,.$$

Per $y = 0$ dalla prima equazione risulta $x = 0$, mentre per $x = 1$ la prima equazione si trasforma in $y^2 - 2 = 0$ e risulta $y = \pm\sqrt{2}$.

Cosicché i punti stazionari di f sono :

$$\big(0\,,0\big)\,, \quad \big(1\,,\sqrt{2}\big)\,, \quad \big(1\,,-\sqrt{2}\big)\,.$$

Per poter stabilire la natura dei punti stazionari di f, calcoliamo anche le sue derivate parziali di secondo ordine :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 2y\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x - 2\,.$$

Perciò la matrice hessiana di f è

$$H_f(x\,,y) = \begin{pmatrix} -2 & 2y \\ 2y & 2x-2 \end{pmatrix}$$

e

$$\det H_f(x\,,y) = \begin{vmatrix} -2 & 2y \\ 2y & 2x-2 \end{vmatrix} = 4 - 4x - 4y^2\,.$$

Ora, poiché

$$\det H_f(0\,,0) = 4 > 0$$

e l'elemento nell'angolo sinistro superiore della hessiana $H_f(0\,,0)$ è il numero $-2 < 0$, il punto $\big(0\,,0\big)$ è un punto di massimo locale.

D'altro canto, siccome

$$\det H_f(1\,,\pm\sqrt{2}) = -8 < 0\,,$$

$\big(1\,,\sqrt{2}\big)$ e $\big(1\,,-\sqrt{2}\big)$ sono punti di sella.

b) Più generalmente di quanto è stato chiesto, troveremo per ogni $r > 0$ i massimi e minimi della restrizione della funzione

$$f(x\,,y) = xy^2 - x^2 - y^2$$

alla circonferenza $x^2 + y^2 = r^2$.

Soluzione usando i moltiplicatori di Lagrange :

Osserviamo che, f essendo una funzione continua e la circonferenza $x^2 + y^2 = r^2$ un sottoinsieme chiuso e limitato di $\mathbb{R}^2$, per il teorema di Weierstrass la restrizione di f alla circonferenza $x^2+y^2 = r^2$ ha almeno un punto di massimo ed uno di minimo. Le coordinate di tutti questi punti di massimo e minimo si trovano tra le soluzioni del sistema di equazioni

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}\Big(f(x,y) - \lambda(x^2+y^2-r^2)\Big) = 0\,, \\ \dfrac{\partial}{\partial y}\Big(f(x,y) - \lambda(x^2+y^2-r^2)\Big) = 0\,, \\ x^2+y^2-r^2 = 0\,, \end{cases}$$

cioè di

$$\begin{cases} y^2 - 2x - 2\lambda x = 0\,, \\ 2xy - 2y - 2\lambda y = 0\,, \\ x^2+y^2-r^2 = 0\,. \end{cases}$$

Sottraendo dal prodotto della prima equazione con y il prodotto della seconda equazione con x si ottiene

$$y\,(y^2 - 2x) - x\,y\,(2x-2) = 0\,,$$

cioè

$$y\,(y^2 - 2x^2) = 0\,.$$

Percò i punti di massimo e minimo di f sulla circonferenza $x^2+y^2=r^2$ si trovano tra le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} y\,(y^2-2x^2) = 0\,, \\ x^2+y^2-r^2 = 0\,, \end{cases}$$

quindi tra i punti

$$\big(\pm r\,,0\big)\,, \quad \left(\frac{r}{\sqrt{3}}\,,\pm\frac{r\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right), \quad \left(-\,\frac{r}{\sqrt{3}}\,,\pm\frac{r\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right).$$

Siccome

$$\begin{aligned} f\big(\pm r\,,0\big) &= \,-\,r^2\,, \\ f\left(\frac{r}{\sqrt{3}}\,,\pm\frac{r\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right) &= \frac{2}{3\sqrt{3}}\,r^3 - r^2\,, \\ f\left(-\,\frac{r}{\sqrt{3}}\,,\pm\frac{r\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right) &= \,-\,\frac{2}{3\sqrt{3}}\,r^3 - r^2 \end{aligned}$$

e

$$-\frac{2}{3\sqrt{3}}\,r^3 - r^2 < -r^2 < \frac{2}{3\sqrt{3}}\,r^3 - r^2\,,$$

risulta che

$$\left(\frac{r}{\sqrt{3}}\,,\pm\frac{r\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right) \text{ sono i punti di massimo,}$$
$$\text{ed il valore massimo è } \frac{2}{3\sqrt{3}}\,r^3 - r^2$$

e

$$\left(-\,\frac{r}{\sqrt{3}}\,,\pm\frac{r\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right) \text{ sono i punti di minimo,}$$
$$\text{ed il valore minimo è } -\,\frac{2}{3\sqrt{3}}\,r^3 - r^2\,.$$

Soluzione tramite parametrizzazione della circonferenza :
La circonferenza $x^2 + y^2 = r^2$ si parametrizza nel modo più semplice tramite l'angolo formato con la parte positiva dell'asse delle ascisse :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos t \\ r\sin t \end{pmatrix}, \qquad t \in \big[\,0\,,2\pi\big]\,.$$

Così il nostro compito è di trovare i punti di massimo e di minimo della funzione di una variabile

$$\varphi : \big[\,0\,,2\pi\big] \ni t \longmapsto f\big(r\cos t\,,r\sin t\big) = r^3\cos t\sin^2 t - r^2\,.$$

A questo fine studiamo l'andamento del grafico di φ .

La derivata di φ è

$$\begin{aligned}\varphi'(t) &= -\,r^3\sin^3 t + 2\,r^3\cos^2 t\sin t = r^3(\sin t)\,(-\sin^2 t + 2\cos^2 t)\\ &= r^3(\sin t)\,(2 - 3\sin^2 t)\end{aligned}$$

e si annulla se $\sin t = 0$ oppure $\sin t = \pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, cioè in

$$t = 0\,,\quad t = \theta\,,\quad t = \pi - \theta\,,\quad t = \pi\,,\quad t = \pi + \theta\,,\quad t = 2\pi$$

dove $\theta := \arcsin\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \in \left(0\,,\frac{\pi}{2}\right)$. Tutti i zeri di φ' sono semplici, cioè φ' cambia segno in ognuno di loro. Siccome $\varphi'(t) > 0$ per $t \in (0\,,\theta)$, risulta la seguente tabella sull'andamento di φ' e φ:

t	0		θ		$\pi-\theta$		π		$\pi+\theta$		$2\pi-\theta$		2π
φ'	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0
φ	$-r^2$	$\nearrow$	$f(\theta)$	$\searrow$	$f(\pi-\theta)$	$\nearrow$	$-r^2$	$\searrow$	$\varphi(\pi+\theta)$	$\nearrow$	$\varphi(2\pi-\theta)$	$\searrow$	$-r^2$

Siccome

$$\begin{aligned}\varphi(\theta)=\varphi(2\pi-\theta) &= \frac{2}{3\sqrt{3}}\,r^3-r^2\\ &> -\,r^2\\ &> -\,\frac{2}{3\sqrt{3}}\,r^3-r^2=\varphi(\pi-\theta)=\varphi(\pi+\theta)\,,\end{aligned}$$

φ ha punti di massimo (globale) in $t=\theta$ e $t=2\pi-\theta$ e punti di minimo (globale) in $t=\pi-\theta$ e $t=\pi+\theta$.

Osserviamo che φ ha inoltre un punto di minimo locale (non globale) in $t=0\,(\equiv 2\pi)$ ed un punto di massimo locale (non globale) in $t=\pi$.

Concludiamo che i punti di massimo di f sulla circonferenza $x^2+y^2=r^2$ sono

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}r\cos\theta\\ r\sin\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{r}{\sqrt{3}}\\ \dfrac{r\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}r\cos(2\pi-\theta)\\ r\sin(2\pi-\theta)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{r}{\sqrt{3}}\\ -\dfrac{r\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\end{pmatrix},$$

mentre i punti di mimimo sono

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}r\cos(\pi-\theta)\\ r\sin(\pi-\theta)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\dfrac{r}{\sqrt{3}}\\ \dfrac{r\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}r\cos(\pi+\theta)\\ r\sin(\pi+\theta)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\dfrac{r}{\sqrt{3}}\\ -\dfrac{r\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}.$$

Il valore massimo è

$$\varphi(\theta) = \varphi(2\pi - \theta) = \frac{2}{3\sqrt{3}}\, r^3 - r^2 \,,$$

mentre il valore minimo è

$$\varphi(\pi - \theta) = \varphi(\pi + \theta) = -\,\frac{2}{3\sqrt{3}}\, r^3 - r^2 \,.$$

Il caso $r = 1$ del compito :

In particolare, per $r = 1$, f ha sulla circonferenza $x^2 + y^2 = 1$ due punti di massimo,

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \,, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \right) \text{ e } \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \,, -\,\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \right),$$

e due punti di minimo,

$$\left(-\,\frac{1}{\sqrt{3}} \,, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \right) \text{ e } \left(-\,\frac{1}{\sqrt{3}} \,, -\,\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \right).$$

Poi il valore massimo è

$$\frac{2}{3\sqrt{3}} - 1 \,,$$

mentre il valore minimo è

$$-\,\frac{2}{3\sqrt{3}} - 1 \,.$$

c) Per il teorema di Weierstrass la funzione continua f ha certamente almeno un punto di massimo ed uno di minimo sul disco $x^2 + y^2 \leq 1$ che è un insieme chiuso e limitato.

Se un punto di massimo si trova nel disco aperto $x^2 + y^2 < 1$ allora deve coincidere con il punto di massimo locale $(0\,,0)$ (vedi il punto a) del compito). Se invece un punto di massimo si trova sulla circonferenza $x^2 + y^2 = 1$ allora dev'essere uguale ad uno dei due punti di massimo della restrizione di f alla circonferenza $x^2 + y^2 = 1$, cioè a $\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \,, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \right)$ oppure $\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \,, -\,\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \right)$ (vedi il punto b) del compito). Ma, siccome

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \,, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \right) = f\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \,, -\,\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \right) = \frac{2}{3\sqrt{3}} - 1 < 0 = f\big(0\,,0\big) \,,$$

l'unico punto di massimo di f nel disco $x^2+y^2 \leq 1$ è $(0\,,0)$ ed il valore massimo è uguale a 0

Similmente, un punto di minimo di f nel disco $x^2+y^2 \leq 1$ dev'essere o un punto di minimo locale appartenente al disco aperto $x^2+y^2 < 1$, o un punto di minimo della restrizione di f sulla circonferenza $x^2+y^2 = 1$. Siccome f non ha punti di minimo locale nel disco aperto $x^2+y^2 < 1$ (vedi il punto a) del compito), deduciamo che f ha due punti di minimo nel disco $x^2+y^2 \leq 1$, che sono (vedi il punto b) del compito)

$$\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\,,\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right) \text{ e } \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\,,-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right),$$

ed il valore minimo è uguale a

$$-\frac{2}{3\sqrt{3}} - 1\,.$$

Osservazione.

Troviamo i massimi e minimi della restrizione di f al disco $x^2+y^2 \leq r^2$ dove $r > 0$ è arbitrario.

Siccome f non ha punti di minimo locale in tutto $\mathbb{R}^2$ (vedi il punto a) del compito), i punti di minimo di f nel disco $x^2+y^2 \leq r^2$ appartengono alla circonferenza $x^2+y^2 = r^2$ e quindi sono i punti (vedi il punto b) del compito) $\left(-\dfrac{r}{\sqrt{3}}\,,\pm\dfrac{r\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)$. Il valore minimo è uguale a $-\dfrac{2}{3\sqrt{3}}\,r^3-r^2$.

Un punto di massimo di f nel disco $x^2+y^2 \leq r^2$, se si trova nel disco aperto $x^2+y^2 < r^2$ allora deve coincidere con l'unico punto di massimo locale $(0\,,0)$ (vedi il punto a) del compito), mentre se si trova sulla circonferenza $x^2+y^2 = r^2$ allora è uguale ad uno dei punti $\left(\dfrac{r}{\sqrt{3}}\,,\pm\dfrac{r\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)$ (vedi il punto b) del compito). Siccome $f(0\,,0) = 0$ e

$$f\left(\frac{r}{\sqrt{3}}\,,\pm\frac{r\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{3\sqrt{3}}\,r^3 - r^2 = \frac{2}{3\sqrt{3}}\,r^2\left(r - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right),$$

concludiamo che i punti di massimo di f nel disco $x^2+y^2 \leq r^2$ sono:

- l'unico punto $(0\,,0)$ se $r < \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ ed il valore massimo è 0,

- i tre punti $(0\,,0)\,,\left(\dfrac{r}{\sqrt{3}}\,,\dfrac{r\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right),\left(\dfrac{r}{\sqrt{3}}\,,-\dfrac{r\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)$ se $r=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ ed il valore massimo è anche in questo case uguale a 0,
- i due punti $\left(\dfrac{r}{\sqrt{3}}\,,\dfrac{r\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right),\left(\dfrac{r}{\sqrt{3}}\,,-\dfrac{r\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)$ se $r>\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ ed il valore massimo è uguale a $\dfrac{2}{3\sqrt{3}}\,r^3-r^2=\dfrac{2}{3\sqrt{3}}\,r^2\left(r-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)>0\,.$

5) **:** Ricordiamo che il grafico di una funzione $f:[\,a\,,b\,]\longrightarrow\mathbb{R}$ di solito si parametrizza tramite la variabile :

$$\gamma:[\,a\,,b\,]\ni x\longmapsto\begin{pmatrix}x\\f(x)\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2\,.$$

Se f è di classe C^1 a tratti, allora il suo grafico sarà un camino regolare a tratti e la sua lunghezza è uguale all'integrale

$$\int_a^b\|\gamma'(x)\|\,\mathrm{d}x=\int_a^b\sqrt{1+\big(f'(x)\big)^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

Nel nostro caso, la lunghezza L del grafico della funzione di classe C^1

$$f:\left[0,\frac{\pi}{3}\right]\ni x\longmapsto-\ln(\cos x)\in[\,0\,,+\infty)$$

con derivata

$$f'(x)=-\frac{1}{\cos x}\cdot(-\sin x)=\operatorname{tg}x$$

è uguale a

$$\int_0^{\pi/3}\sqrt{1+\operatorname{tg}^2x}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\pi/3}\sqrt{\frac{1}{\cos^2x}}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\pi/3}\frac{1}{\cos x}\,\mathrm{d}x\,.$$

Troviamo le primitive di $\dfrac{1}{\cos x}$:

$$\int\frac{1}{\cos x}\,\mathrm{d}x=\int\frac{1}{\cos^2x}\,(\cos x)\,\mathrm{d}x=\int\frac{1}{1-\sin^2x}\,\mathrm{d}\sin x$$

$$\overset{u=\sin x}{=}\int\frac{1}{1-u^2}\,\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\int\Big(\frac{1}{1+u}+\frac{1}{1-u}\Big)\mathrm{d}u$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right| + \text{costante} \\
&= \frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin x}{1-\sin x} + \text{costante}\,.
\end{aligned}
$$

Risulta

$$
L = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\bigg|_{x=0}^{x=\pi/3} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2}\ln\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}
$$

e, siccome

$$
\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = \frac{(2+\sqrt{3})^2}{(2-\sqrt{3})\,(2+\sqrt{3})} = \frac{(2+\sqrt{3})^2}{2^2-(\sqrt{3})^2} = (2+\sqrt{3})^2,
$$

concludiamo che

$$
L = \frac{1}{2}\ln(2+\sqrt{3})^2 = \ln(2+\sqrt{3})\,.
$$