NOME: .... **MATRICOLA:** ....

Corso di Laurea in Matematica, A.A. 2012/2013
Analisi Reale e Complessa, Esame del 21.01.2013

1) Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

a) Si verifichi che se f è continua a destra in ogni punto del suo dominio, cioè se

$$\lim_{x<y\to x} f(y) = f(x)\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,,$$

allora f è una funzione di Borel.

Suggerimento: di che tipo è l'insieme $\big\{x \in \mathbb{R}\,;\, f(x) < \lambda\big\}$, $\lambda \in \mathbb{R}$?

b) Si verifichi che se f è derivabile a destra in ogni punto del suo dominio, cioè se

$$\text{esiste } f_d^{'}(x) = \lim_{x<y\to x} \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \in \mathbb{R} \text{ per ogni } x \in \mathbb{R}\,,$$

allora la derivata destra $f_d^{'} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ è una funzione di Borel.

2) È sommabile la funzione $f : [-1\,,1] \times [-1\,,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x\,,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{per } (x\,,y) \neq (0\,,0) \\ 0 & \text{per } (x\,,y) = (0\,,0) \end{cases} \quad ?$$

3) a) Calcolare il limite

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{2-\frac{1}{R}} \frac{dx}{(x-2)(x^2+4)^2} + \int_{2+\frac{1}{R}}^{R} \frac{dx}{(x-2)(x^2+4)^2}\,.$$

b) Determinare il raggio di convergenza dello sviluppo in serie intorno al punto $z_o = 1$ della funzione

$$f(z) = \frac{\sin(z^2-4)}{(z-2)(z^2+4)^2}$$

e dare una dimostrazione del risultato ottenuto.

Soluzioni:

1) **:** Ricordiamo che un intervallo in $\mathbb{R}$ è un insieme $I \subset \mathbb{R}$ tale che se $y_1 \le y_2$ sono elementi di I allora tutto il segmento $[y_1, y_2]$ è contenuto in I. Supponiamo che $I \neq \emptyset$ ed indichiamo

$$\begin{aligned} a(I) &:= \inf_{y\in I} y \in [-\infty, +\infty) \text{ (l'estremità inferiore di } I), \\ b(I) &:= \sup_{y\in I} y \in (-\infty, +\infty] \text{ (l'estremità superiore di } I). \end{aligned}$$

Allora

$$\big(a(I), b(I)\big) \subset I \ :$$

> Se $a(I) < y < b(I)$ allora (per la definizione dell'estremo inferiore e dell'estremo superiore) esistono $y_1, y_2 \in I$ tale che $y_1 < y < y_2$. Poiché I è un intervallo, risulta che $y \in I$.

Di consequenza, I è uguale

- o all'intervallo aperto $\big(a(I), b(I)\big)$,
- o all'unione dell'intervallo aperto $\big(a(I), b(I)\big)$ con l'insieme chiuso $\big\{a(I)\big\}$,
- o all'unione dell'intervallo aperto $\big(a(I), b(I)\big)$ con l'insieme chiuso $\big\{b(I)\big\}$,
- o all'unione dell'intervallo aperto $\big(a(I), b(I)\big)$ con l'insieme chiuso $\big\{a(I), b(I)\big\}$.

In tutti i casi I è un insieme di Borel.

Ricordiamo anche che l'unione di una famiglia $\big(I_\alpha\big)_{\alpha\in A}$ di intervalli con intersezione non vuoto è un intervallo :

> Per l'ipotesi esiste $y \in \bigcap\limits_{\alpha\in A} I_\alpha$. Se $y_1 \le y_2$ sono elementi di $\bigcup\limits_{\alpha\in A} I_\alpha$ allora esistono indici α_1 e α_2 tali che $y_1 \in I_{\alpha_1}$ e $y_2 \in I_{\alpha_2}$. Ma I_{α_1} e I_{α_2} contengono y, quindi si intersecano, e risulta che $I_{\alpha_1} \cup I_{\alpha_2}$ è un intervallo. Cosicché $[y_1, y_2] \subset I_{\alpha_1} \cup I_{\alpha_2} \subset \bigcup\limits_{\alpha\in A} I_\alpha$.

Finalmente ricordiamo che se $\big(I_\alpha\big)_{\alpha\in A}$ è una famiglia di intervalli a due a due disgiunti e di lunghezza > 0 (cioè soddisfacenti $a(I_\alpha) < b(I_\alpha)$ allora la famiglia è numerabile :

> Per ogni $\alpha \in A$ l'intervallo $I_\alpha \supset \big(a(I_\alpha)\,, b(I_\alpha)\big)$ contiene un numero razionale $r(\alpha)$. Poiché gli intervalli I_α sono a due a due disgiunti, l'applicazione
>
> $$A \ni \alpha \longmapsto r(\alpha) \in \mathbb{Q}$$
>
> è iniettiva. Risulta che A è in corrispondenza biunivoca con un sottoinsieme dell'insieme numerabile $\mathbb{Q}$, quindi è numerabile.

Dopo questa preparazione passiamo alla soluzione del compito.

a) Perché f sia una funzione di Borel c'è (per esempio) da verificare che, per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$, l'insieme $\big\{x \in \mathbb{R}\,; f(x) < \lambda\big\}$ è di Borel. A questo fine mostreremo che $\big\{x \in \mathbb{R}\,; f(x) < \lambda\big\}$ è una unione numerabile di intervalli.

Se $y \in \big\{x \in \mathbb{R}\,; f(x) < \lambda\big\}$ allora, per la continuità destra di f in y, esiste un $\delta_y > 0$ tale che $[\,y\,, y + \delta_y) \subset \big\{x \in \mathbb{R}\,; f(x) < \lambda\big\}$. Risulta che la lunghezza del più grande intervallo I_y contenente y e contenuto in $\big\{x \in \mathbb{R}\,; f(x) < \lambda\big\}$, cioè di

$$I_y := \bigcup_{\substack{I \text{ intervallo} \\ y\in I\subset\{x\in\mathbb{R}\,;f(x)<\lambda\}}} I \begin{cases} \subset \big\{x \in \mathbb{R}\,; f(x) < \lambda\big\} \\ \supset [\,y\,, y + \delta_y) \end{cases} ,$$

è $\geq \delta_y > 0$.

Ora, per $y_1\,, y_2 \in \big\{x \in \mathbb{R}\,; f(x) < \lambda\big\}$, gli intervalli I_{y_1} e I_{y_2} o coincidono o sono disgiunti. Infatti, se I_{y_1} e I_{y_2} non sono disgiunti, allora la loro unione è un intervallo I con

$$y_1\,, y_2 \in I \subset \big\{x \in \mathbb{R}\,; f(x) < \lambda\big\}$$

e quindi I è sottoinsieme sia di I_{y_1} che di I_{y_2}. In altre parole abbiamo

$$I_{y_1} \cup I_{y_2} = I \subset \begin{cases} I_{y_1} \\ I_{y_2} \end{cases} ,$$

cioè $I_{y_1} = I_{y_1} \cup I_{y_2} = I_{y_2}$.

Concludiamo che

$$\mathcal{J} := \Big\{ I \subset \mathbb{R} \text{ intervallo };\, I = I_y \text{ per un } y \in \big\{ x \in \mathbb{R} \,;\, f(x) < \lambda \big\} \Big\}$$

è un insieme di intervalli a due a due disgiunti e di lunghezza > 0, quindi è numerabile. Ma

$$\bigcup_{I \in \mathcal{J}} I = \bigcup_{y \in \{x \in \mathbb{R}\,;\, f(x) < \lambda\}} I_y \begin{cases} \subset \big\{ x \in \mathbb{R} \,;\, f(x) < \lambda \big\} \\ \supset \displaystyle\bigcup_{y \in \{x \in \mathbb{R}\,;\, f(x) < \lambda\}} \{y\} = \big\{ x \in \mathbb{R} \,;\, f(x) < \lambda \big\} \end{cases}$$

implica che

$$\bigcup_{I \in \mathcal{J}} I = \big\{ x \in \mathbb{R} \,;\, f(x) < \lambda \big\}$$

e così $\big\{ x \in \mathbb{R} \,;\, f(x) < \lambda \big\}$ è una unione numerabile di intervalli.

b) Se f è derivabile a destra allora f è anche continua a destra, quindi per a) è una funzione di Borel. Risulta che le funzioni

$$g_k : \mathbb{R} \ni x \longmapsto \frac{f\Big(x + \dfrac{1}{k}\Big) - f(x)}{\Big(x + \dfrac{1}{k}\Big) - x} = k\bigg(f\Big(x + \frac{1}{k}\Big) - f(x) \bigg) , \qquad k \geq 1$$

sono di Borel. Ma $f_d^{\,\prime}$ è il limite puntuale della successione $\big(g_k\big)_{k \geq 1}$ e come tale è pure una funzione di Borel.

Complementi.

Chi è familiare con insiemi connessi e componenti conessi, può leggere la soluzione del compito 1.a) come segue :

Sia $\lambda \in \mathbb{R}$.

Siccome ogni sottoinsieme connesso di $\mathbb{R}$ è un intervallo, i componenti connessi di $\big\{ x \in \mathbb{R} \,;\, f(x) < \lambda \big\}$ sono intervalli, in particolare insiemi di Borel.

Sia C un componente connesso di $\big\{ x \in \mathbb{R} \,;\, f(x) < \lambda \big\}$ e $y \in C$. Per la continuità destra di f in y esiste un $\delta_y > 0$ tale che

$$[\, y \,, y + \delta_y) \subset \big\{ x \in \mathbb{R} \,;\, f(x) < \lambda \big\} . \qquad (*)$$

Poiché $[\, y \,, y + \delta_y) \ni y$ è connesso, è contenuto nel componente connesso C di y. Risulta che $C \supset (\, y \,, y + \delta_y))$ contiene un numero razionale $r(C)$.

Ora $C \longmapsto r(C) \in \mathbb{Q}$ è una applicazione iniettiva dell'insieme di tutti i componenti connessi di $\{x \in \mathbb{R}\,;\, f(x) < \lambda\}$ in $\mathbb{Q}$ e la numerabilità di $\mathbb{Q}$ implica che l'insieme dei componenti connessi di $\{x \in \mathbb{R}\,;\, f(x) < \lambda\}$ è numerabile.

Siccome ogni insieme è l'unione dei suoi componenti connessi, risulta che $\{x \in \mathbb{R}\,;\, f(x) < \lambda\}$ è una unione numerabile di intervalli, e quindi un insieme di Borel.

Ma

$$\{x \in \mathbb{R}\,;\, f(x) < \lambda\} \text{ è di Borel}, \lambda \in \mathbb{R} \iff f \text{ è di Borel.}$$

Con la stessa dimostrazione si ottiene anche la seguente affermazione più generale :

Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Se in ogni $x \in \mathbb{R}$ la funzione f è o continua a sinistra, o continua a destra, allora f è una funzione di Borel.

Infatti, per la dimostrazione si può copiare la dimostrazione precedente con la sola modifica che per qualsiasi $y \in C$ è guarantita l'esistenza di un $\delta_y > 0$ che soddisfi non necessariamente (*), ma la condizione più debole

$$(y - \delta_y\,, y] \text{ oppure } [y\,, y + \delta_y) \text{ è contenuto in } \{x \in \mathbb{R}\,;\, f(x) < \lambda\}\,.$$

Risulterà però che $C \supset (y - \delta_y\,, y))$ oppure $C \supset (y\,, y + \delta_y))$. Poiché in ambi casi C contiene un numero razionale $r(C)$, possiamo concludere la dimostrazione come di cui sopra.

Ricordiamo il meno noto, ma spesso utile

Teorema di ricoprimento di Lindelöf.

Sia $(X\,, d)$ uno spazio metrico separabile. Allora ogni famiglia $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ di insiemi aperti in X ammette una sottofamiglia numerabile $(U_{\alpha_n})_{n \geq 1}$ che ha la stessa unione :

$$\bigcup_{n \geq 1} U_{\alpha_n} = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha\,.$$

Dimostrazione. Sia $(x_k)_{k \geq 1}$ una successione densa in X. Allora la famiglia $\mathcal{U}$ delle palle aperte

$$U_r(x_k) := \{x \in X\,;\, d(x\,, x_k) < r\}\,, \qquad k \geq 1\,, 0 < r \in \mathbb{Q}$$

è numerabile ed ogni aperto $U \subset X$ è l'unione delle palle appartenenti ad $\mathcal{U}$ che sono contenute in X :

$$U = \bigcup_{U \supset U_r(x_k) \in \mathcal{U}} U_r(x_k) \quad :$$

Infatti, se $y \in U$ ed $\varepsilon > 0$ è tale che

$$U_\varepsilon(y) := \big\{ x \in X \,; d(x\,,y) < \varepsilon \big\} \subset U$$

allora, scegliendo un $k \geq 1$ con $d(x_k\,,y) < \dfrac{\varepsilon}{3}$ e poi un numero razionale $\dfrac{\varepsilon}{3} < r < \dfrac{2\,\varepsilon}{3}$, abbiamo

$$y \in U_{\frac{\varepsilon}{3}}(x_k) \subset U_r(x_k)$$

e

$$x \in U_r(x_k) \implies d(x\,,y) \leq d(x\,,x_k) + d(x_k\,,y) < r + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon\,,$$

quindi $y \in U_r(x_k) \subset U_\varepsilon(y) \subset U$.

Risulta

$$U_\alpha = \bigcup_{U_\alpha \supset U_r(x_k) \in \mathcal{U}} U_r(x_k)\,, \qquad \alpha \in A$$

e quindi

$$\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = \bigcup_{\alpha \in A} \Big(\bigcup_{U_\alpha \supset U_r(x_k) \in \mathcal{U}} U_r(x_k) \Big) = \bigcup_{\substack{U_\alpha \supset U_r(x_k) \in \mathcal{U} \\ \text{per un } \alpha \in A}} U_r(x_k)$$

$$= \bigcup \Big\{ U_r(x_k)\,; k \geq 1\,, 0 < r \in \mathbb{Q}\,, U_r(x_k) \subset U_\alpha \text{ per un } \alpha \in U \Big\}\,.$$

Scegliamo adesso per ogni $k \geq 1$ e $0 < r \in \mathbb{Q}$ con $U_r(x_k) \subset U_\alpha$ per un $\alpha \in A$ un indice $\alpha(k\,,r) \in A$ per cui $U_r(x_k) \subset U_{\alpha(k\,,r)}$. Allora il sottoinsieme

$$\mathcal{J} := \big\{ (k\,,r)\,; k \geq 1\,, 0 < r \in \mathbb{Q}\,, U_r(x_k) \subset U_\alpha \text{ per un } \alpha \in U \big\}$$

di $\big\{ k \text{ intero}\,; k \geq 1 \big\} \times \big\{ r \in \mathbb{Q}\,; r > 0 \big\}$ è numerabile e

$$\bigcup_{(k\,,r) \in \mathcal{J}} U_{\alpha(k\,,r)} \supset \bigcup_{(k\,,r) \in \mathcal{J}} U_r(x_k) = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$$

quindi

$$\bigcup_{(k\,,r)\in\mathcal{J}} U_{\alpha(k\,,r)} = \bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha \,.$$

$\blacksquare$

Risulta un sorprendente

Teorema di ricoprimento per intervalli.

Ogni famiglia $\big(I_\alpha\big)_{\alpha\in A}$ *di intervalli reali di lunghezza* > 0 *(cioè soddisfacenti* $a(I_\alpha) < b(I_\alpha)$*) ammette una sottofamiglia numerabile* $\big(I_{\alpha_n}\big)_{n\geq 1}$ *che ha la stessa unione* :

$$\bigcup_{n\geq 1} I_{\alpha_n} = \bigcup_{\alpha\in A} I_\alpha \,.$$

Dimostrazione. Sia $E := \bigcup\limits_{\alpha\in A} I_\alpha \subset \mathbb{R}$. Per il teorema di ricoprimento di Lindelöf la famiglia

$$\Big(\big(a(I_\alpha)\,,b(I_\alpha)\big)\Big)_{\alpha\in A}$$

di intervalli aperti ammette una sottofamiglia numerabile

$$\Big(\big(a(I_{\alpha_k})\,,b(I_{\alpha_k})\big)\Big)_{k\geq 1}$$

che ha la stessa unione :

$$\bigcup_{k\geq 1}\big(a(I_{\alpha_k})\,,b(I_{\alpha_k})\big) = \bigcup_{\alpha\in A}\big(a(I_\alpha)\,,b(I_\alpha)\big) \subset E\,.$$

Se mostriamo che l'insieme

$$S := E \setminus \bigcup_{\alpha\in A}\big(a(I_\alpha)\,,b(I_\alpha)\big)$$

è numerabile, allora risulta la tesi del teorema :

> Scegliamo per ogni $x \in S$ un $\alpha_x \in A$ con $x \in I_{\alpha_x}$. Allora l'unione della famiglia numerabile di intervalli
>
> $$\big(I_{\alpha_k}\big)_{k\geq 1} \cup \big(I_{\alpha_x}\big)_{x\in S}$$
>
> contiene
>
> $$\bigcup_{k\geq 1}\big(a(I_{\alpha_k})\,,b(I_{\alpha_k})\big) \cup \bigcup_{x\in S} I_{\alpha_x} \supset \bigcup_{\alpha\in A}\big(a(I_\alpha)\,,b(I_\alpha)\big) \cup S = E\,,$$
>
> quindi è uguale ad E.

Sia ora $x \in S$ arbitrario. Appartenendo all'unione di tutti i I_α, ma non essendo nell'interno di nessuno di questi intervalli, x è o $a(I_{\alpha_x}) \in I_{\alpha_x}$ o $b(I_{\alpha_x}) \in I_{\alpha_x}$ per un $\alpha_x \in A$. Indichiamo

$$S_- := \left\{x \in S\,;\, x = a(I_{\alpha_x})\right\}, \quad S_+ := \left\{x \in S\,;\, x = b(I_{\alpha_x})\right\}.$$

Allora gli interni $\left(\overset{\circ}{I}_{\alpha_x}\right)_{x \in S_-}$ degli intervalli $\left(I_{\alpha_x}\right)_{x \in S_-}$ sono a due a due disgiunti :

> Supponiamo che $x\,,y \in S_-$ e $\overset{\circ}{I}_{\alpha_x} \cap \overset{\circ}{I}_{\alpha_y} \neq \emptyset$. Sia, per esempio, $a(I_{\alpha_x}) \le a(I_{\alpha_y})$ e scegliamo un $z \in \overset{\circ}{I}_{\alpha_x} \cap \overset{\circ}{I}_{\alpha_y}$. Allora
>
> $$y = a(I_{\alpha_y}) \in \left[a(I_{\alpha_x})\,,z\right) \subset I_{\alpha_x}$$
>
> e, poiché $y \in S$ non può appartenere all'interno di I_{α_x}, risulta che $y = a(I_{\alpha_x}) = x$ oppure $y = b(I_{\alpha_x})$. Ma $y = b(I_{\alpha_x})$ implicherebbe
>
> $$y = a(I_{\alpha_y}) < z < b(I_{\alpha_x}) = y$$
>
> che è assurdo. Di conseguenza $x = y$ e così $\overset{\circ}{I}_{\alpha_x} = \overset{\circ}{I}_{\alpha_y}$.

Risulta che S_- è numerabile. Similmente si verifica che anche S_+ è numerabile e concludiamo che $S = S_- \cup S_+$ è numerabile.

■

In particolare, l'unione di ogni famiglia di intervalli reali non degeneri è un insieme di Borel in $\mathbb{R}$.

2) : a) Indichiamo con $\widetilde{f}$ la funzione definita su $\mathbb{R}^2$ tramite la stessa formula che f :

$$\widetilde{f}(x\,,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{per } (x\,,y) \neq (0\,,0) \\ 0 & \text{per } (x\,,y) = (0\,,0) \end{cases}.$$

Sia $D \subset \mathbb{R}$ un aperto. Siccome la restrizione di $\widetilde{f}$ all'insieme aperto $\mathbb{R}^2 \setminus \left\{(0\,,0)\right\}$ è continua, l'insieme

$$\left\{(x\,,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \left\{(0\,,0)\right\}; \widetilde{f}(x\,,y) \in D\right\} \subset \mathbb{R}^2$$

è aperto. Risulta che

$$\begin{aligned}&\big\{(x\,,y)\in\mathbb{R}^2\,;\widetilde{f}(x\,,y)\in D\big\}\\ &=\begin{cases}\big\{(x\,,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\big\{(0\,,0)\big\}\,;\widetilde{f}(x\,,y)\in D\big\} & \text{per } 0\notin D\\ \big\{(x\,,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\big\{(0\,,0)\big\}\,;\widetilde{f}(x\,,y)\in D\big\}\cup\big\{(0\,,0)\big\} & \text{per } 0\in D\end{cases}\end{aligned}$$

è o un aperto, o l'unione di un aperto con un insieme chiuso, quindi sempre un insieme di Borel. Poiché l'aperto D era arbitrario, risulta che $\widetilde{f}$ è una funzione di Borel.

Cosicché anche il prodotto di $\widetilde{f}$ con la funzione caratteristica $\chi_{[-1\,,1]\times[-1\,,1]}$ dell'insieme chiuso $[\,-1\,,1]\times[\,-1\,,1]$ è una funzione di Borel, quindi misurabile. Osservando che

$$\chi_{[-1\,,1]\times[-1\,,1]}(x\,,y)\,\widetilde{f}(x\,,y)=\begin{cases}f(x\,,y) & \text{per } (x\,,y)\in[-1\,,1]\times[-1\,,1]\\ 0 & \text{per } (x\,,y)\notin[-1\,,1]\times[-1\,,1]\end{cases}$$

questo significa la misurabilità di f.

Per la sommabilità di f dobbiamo avere, oltre alla sua misurabilità, la finitezza dell'integrale

$$\int\limits_{[-1\,,1]\times[-1\,,1]}|f(x\,,y)|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,.$$

Ma $|xy|\leq\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)$ implica $|f|\leq\dfrac{1}{2}$ e così

$$\int\limits_{[-1\,,1]\times[-1\,,1]}|f(x\,,y)|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leq\int\limits_{[-1\,,1]\times[-1\,,1]}\frac{1}{2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leq 2\,.$$

3) : a) Poniamo

$$h(R):=\int\limits_{-R}^{2-\frac{1}{R}}\frac{dx}{(x-2)(x^2+4)^2}+\int\limits_{2+\frac{1}{R}}^{R}\frac{dx}{(x-2)(x^2+4)^2}$$

e

$$g(z):=\frac{1}{(z-2)(z^2+4)^2}\,.$$

La funzione g è una funzione meromorfa su $\mathbb{C}$ con poli in 2, $2i$ e $-2i$ Per calcolare il limite usiamo il metodo dei residui integrando la 1-forma $g(z)dz$ lungo il cammino

$$\gamma_R = \gamma_{1,R} + \gamma_{2,R} + \gamma_{3,R} + \gamma_{4,R}$$

dove

- $\gamma_{1,R}$ è il segmento che va da $2 + \frac{1}{R}$ a R,
- $\gamma_{2,R}$ è la semicirconferenza $\{x + iy \ : x^2 + y^2 = R \ , y \geq 0\}$ percorsa in senso antiorario,
- $\gamma_{3,R}$ è il segmento che va da $-R$ a $2 - \frac{1}{R}$,
- $\gamma_{4,R}$ è la semicirconferenza $\{x + iy \ : (x-2)^2 + y^2 = 1/R \ , y \geq 0\}$ percorsa in senso orario.

Se $R > 2$ l'unico polo di g all'interno della parte limitata del piano delimitata dal cammino γ è il punto $2i$. Quindi per il teorema dei residui abbiamo

$$\int_{\gamma_R} g(z)dz = 2\pi i Res(g, 2i),$$

ma

$$\int_{\gamma_R} g(z)dz = \sum_{j=1}^{4} \int_{\gamma_{j,R}} g(z)dz$$

e

$$\int_{\gamma_{1,R}} g(z)dz + \int_{\gamma_{3,R}} g(z)dz = h(R)\,,$$

quindi

$$\lim_{R\to+\infty} h(R) = 2\pi i Res(g, 2i)) - \lim_{R\to+\infty} \left(\int_{\gamma_{2,R}} g(z)dz + \int_{\gamma_{4,R}} g(z)dz \right)$$

se l'ultimo limite esiste.

In effetti si ha $\lim\limits_{R\to+\infty} \int_{\gamma_{2,R}} g(z)dz = 0$ perché

$$\left| \int_{\gamma_{2,R}} g(z)dz \right| \leq \pi R \sup\{|g(z)| : z \in \gamma_{2,R}\}$$

e

$$\lim_{R\to+\infty} \pi R \sup\{|g(z)| : z \in \gamma_{2,R}\} = \lim_{R\to+\infty} \frac{\pi R}{R^5} = 0\ .$$

Inoltre, siccome il punto 2 è un polo semplice per g possiamo usare il lemma del piccolo cerchio ottenendo

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_{4,R}} g(z)dz = -\pi i\ Res(g,2)$$

(la curva $\gamma_{4,R}$ percorre un angolo orientato pari $-\pi$ intorno a 2).

Quindi

$$\lim_{R\to+\infty} h(R) = 2\pi i Res(g,2i) + \pi i\ Res(g,2)$$

e dobbiamo solo calcolare i due residui.

Siccome 2 è un polo semplice per g abbiamo

$$Res(g,2) = \lim_{z\to} \frac{z-2}{(z-2)(z^2+4)^2} = \frac{1}{64}\ .$$

Siccome $2i$ è un polo di molteplicità 2 abbiamo

$$\begin{aligned}
Res(g,2i) &= \lim_{z\to 2i} \frac{d}{dz}\left(\frac{(z-2i)^2}{(z-2)(z^2+4)^2}\right) \\
&= \lim_{z\to 2i} \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{(z-2)(z+2i)^2}\right) \\
&= \lim_{z\to 2i} -\frac{(z+2i)^2 + 2(z+2i)(z-2)}{(z-2)^2(z+2i)^4} \\
&= -\frac{(4i)^2 + 2(4i)(2i-2)}{(2i-2)^2(4i)^4} \\
&= -\frac{-32-16i}{-8i(4)^4} = -\frac{1}{128} + \frac{1}{64} i\ .
\end{aligned}$$

In conclusione

$$\begin{aligned}
\lim_{R\to+\infty} h(R) &= 2\pi i\, Res(g,2i) + \pi i\, Res(g,2) \\
&= 2\pi i\left(-\frac{1}{128} + \frac{1}{64} i\right) + \pi i\, \frac{1}{64} = -\frac{\pi}{32}\ .
\end{aligned}$$

b) La funzione f è una funzione meromorfa su $\mathbb{C}$ che ammette singolarità isolate in 2, $2i$ e $-2i$.

Siccome

$$\begin{aligned}\lim_{z\to 2i} f(z)(z-2i)^2 &= \lim_{z\to 2i} \frac{\sin(z^2-4)}{(z-2)(z+2i)^2} \\ &= \frac{\sin(-8)}{(2i-2)(-16)} = -\frac{\sin(8)(1+i)}{2^7} \neq 0\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\lim_{z\to -2i} f(z)(z+2i)^2 &= \lim_{z\to -2i} \frac{\sin(z^2-4)}{(z-2)(z-2i)^2} \\ &= \frac{\sin(-8)}{(-2i-2)(-16)} = -\frac{\sin(8)(1-i)}{2^7} \neq 0\end{aligned}$$

le singolarità in $2i$ e $-2i$ sono poli con molteplicità 2.

Inoltre, siccome il numeratore di f si annulla in 2 , $f(z)$ ha una singolarità eliminabile in 2. Quindi esiste $\tilde{f}$ funzione olomorfa su $\mathbb{C}\setminus\{2i, -2i\}$ che estende f.

Le funzioni f e $\tilde{f}$ coincidono in un aperto contenente 1, perciò hanno le stesse derivate e lo stesso sviluppo in serie di potenze S intorno a 1. Siccome la distanza tra 1 e $2i$ coincide con la distanza tra 1 e $-2i$ ed è $\sqrt{5}$, il disco aperto $D_{1,\sqrt{5}}$ di centro 1 e raggio $\sqrt{5}$ è contenuto nel dominio di $\tilde{f}$. Ne segue che il raggio di convergenza dello sviluppo S di f (o $\tilde{f}$) intorno ad 1 é almeno $\sqrt{5}$.

Per mostrare che il raggio voluto è esattamente $\sqrt{5}$ basta osservare che se tale raggio fosse maggiore, lo sviluppo in serie di potenze S di f intorno a 1 definirebbe una funzione olomorfa su un dischetto aperto D centrato in 1 e contenente $2i$ e $-2i$.

Siccome f e lo sviluppo S (intorno ad 1) sono entrambe funzioni olomorfe nell'aperto connesso $D\setminus\{2,\ 2i,\ -2i\}$ e le loro derivate di ogni ordine nel punto $1\in D\setminus\{2,\ 2i,\ -2i\}$ coincidono, le funzioni f e S coincidono su tutto $D\setminus\{2,\ 2i,\ -2i\}$. Questo è assurdo perché essendo S olomorfa in D si ha $\lim_{z\to 2i} S(z) = S(2i) \in \mathbb{C}$ e avendo f un polo in $2i$ si ha $\lim_{z\to 2i} f(z) = \infty$.