NOME: .... **MATRICOLA:** ....

Corso di Laurea in Matematica, A.A. 2010/2011
Analisi Reale e Complessa, Esame del 21.02.2011

1) È facile vedere tramite integrazione per parti che le funzioni positive continue $-\ln\big(\sin x\big)$ e $-\ln\big(\cos x\big)$ in $\big(0\,,\pi/2\big)$ hanno integrali finiti uguali :

$$\int_0^{\pi/2} -\ln\big(\sin x\big)\,\mathrm{d}x = -x\,\ln\big(\sin x\big)\Big|_{x=0}^{x=\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \underbrace{\frac{x}{\mathrm{tg}x}}_{<\,1}\,\mathrm{d}y \leq \frac{\pi}{2}\ ,$$

$$\int_0^{\pi/2} -\ln\big(\cos x\big)\,\mathrm{d}x \overset{t=\frac{\pi}{2}-x}{=} \int_0^{\pi/2} -\ln\big(\sin t\big)\,\mathrm{d}t\ .$$

Perciò

$$\int_0^{\pi/2} \ln\big(\mathrm{tg}^2x\big)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{\pi/2} \ln\big(\sin x\big)\,\mathrm{d}x - 2\int_0^{\pi/2} \ln\big(\cos x\big)\,\mathrm{d}x = 0\ .$$

Sia ora $b>0$ arbitrario e definiamo la funzione $F:\big[0\,,+\infty\big)\longrightarrow\mathbb{R}$ tramite

$$F(a) := \int_0^{\pi/2} \ln\big(a^2+b^2\mathrm{tg}^2x\big)\,\mathrm{d}x\ .$$

Si verifichi che

F è continua ,
F è derivabile in $\big(0\,,+\infty\big)$,

e si calcoli la derivata di F. Si usi poi il risultato ottenuto per calcolare gli integrali

$$\int_0^{\pi/2} \ln\big(a^2+b^2\mathrm{tg}^2x\big)\,\mathrm{d}x\,,\qquad a\geq 0\ .$$

2) Sia u una funzione armonica in disco unità aperto

$$U_1(0) = \big\{ z \in \mathbb{C} \,;\, |z| < 1 \big\} \,,$$

e v una armonica coniugata di u. Si verifichi che anche la funzione

$$U : U_1(0) \ni z \longmapsto u\big(\overline{z}\big)$$

è armonica e si trovi una sua armonica coniugata V. Si dimostri poi che se v si annulla nell'intervallo $\big(-1\,,+1\big)$, allora $u = U$.

3) Indicheremo con ln la funzione olomorfa definita nel dominio

$$\left\{ \rho e^{i\theta} \,;\, \rho > 0\,, -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2} \right\}$$

tramite $\ln\big(\rho e^{i\theta}\big) := \ln\rho + i\theta \left(\text{per esempio, } \ln(-1) = i\pi \text{ e } \ln i = \dfrac{i\pi}{2} \right)$.

Si calcoli l'integrale improprio

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2 - 1}\,\mathrm{d}x = \lim_{\substack{r \to +\infty \\ 0<\delta\to 0 \\ 0<\varepsilon\to 0}} \left(\int\limits_{\varepsilon}^{1-\delta} \frac{\ln x}{x^2-1}\,\mathrm{d}x + \int\limits_{1+\delta}^{r} \frac{\ln x}{x^2-1}\,\mathrm{d}x \right)$$

usando il teorema integrale di Cauchy per una famiglia adatta di curve chiuse, regolari a tratti, nel quadrante

$$\big\{ z \in \mathbb{C} \,;\, \mathrm{Re}z \geq 0\,, \mathrm{Im}z \geq 0 \big\}$$

e sapendo che

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = 0 \quad \left(\textit{vedi:} \ \int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \overset{t=\frac{1}{s}}{=} -\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln t}{s^2+1}\,\mathrm{d}s \right).$$

Soluzioni:

1) **:** Siccome, per ogni $x \in \big(0\,,\pi/2\big)$ e $0 \leq a \leq a_o$,

$$\frac{b^2 \sin^2 x}{\cos^2 x} = b^2 \mathrm{tg}^2 x \leq a^2 + b^2 \mathrm{tg}^2 x = \frac{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x}{\cos^2 x} \leq \frac{a_o^2 + b^2}{\cos^2 x} ,$$

abbiamo da una parte

$$\begin{aligned} \ln\big(a^2 + b^2 \mathrm{tg}^2 x\big) &\geq \ln\big(b^2\big) + 2\ln\big(\sin x\big) - 2\ln\big(\cos x\big) \\ &\geq \ln\big(b^2\big) + 2\ln\big(\sin x\big) , \end{aligned}$$

e dall'alta parte,

$$\ln\big(a^2 + b^2 \mathrm{tg}^2 x\big) \leq \ln\big(a_o^2 + b^2\big) - 2\ln\big(\cos x\big) .$$

Risulta che, ponendo

$$\varphi_{a_o}(x) := \big|\ln\big(b^2\big)\big| + \big|\ln\big(a_o^2 + b^2\big)\big| - 2\ln\big(\sin x\big) - 2\ln\big(\cos x\big) ,$$

abbiamo

$$\big|\ln\big(a^2 + b^2 \mathrm{tg}^2 x\big)\big| \leq \varphi_{a_o}(x) , \qquad x \in \big(0\,,\pi/2\big) ,\ 0 \leq a \leq a_o .$$

Poiché φ_{a_o} è integrabile su $\big(0\,,\pi/2\big)$, risulta che la funzione F è ben definita e, per il teorema della convergenza dominata, è continua.

La derivabilità di $F(a)$ sotto il segno dell'integrale è possibile in ogni $a > 0$. Infatti, esiste la derivata parziale

$$\frac{\partial}{\partial a} \ln\big(a^2 + b^2 \mathrm{tg}^2 x\big) = \frac{2\,a}{a^2 + b^2 \mathrm{tg}^2 x} , \qquad x \in \big(0\,,\pi/2\big) ,\ a > 0$$

e, per $x \in \big(0\,,\pi/2\big)$ e $0 < \varepsilon \leq a \leq a_o$, abbiamo la maggiorazione

$$\left| \frac{\partial}{\partial a} \ln\big(a^2 + b^2 \mathrm{tg}^2 x\big) \right| \leq \frac{2\,a_o}{\varepsilon^2}$$

e la funzione costante $\dfrac{2\,a_o}{\varepsilon^2}$ e integrabile su $\big(0\,,\pi/2\big)$. Così F risulta derivabile in ogni $a > 0$ ed abbiamo

$$F'(a) = \int_0^{\pi/2} \frac{\partial}{\partial a} \ln\big(a^2 + b^2 \mathrm{tg}^2 x\big)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \frac{2\,a}{a^2 + b^2 \mathrm{tg}^2 x}\,\mathrm{d}x .$$

Per l'integrazione della funzione razionale di tg$x$ di cui sopra usiamo la sostituzione

$$t = \mathrm{tg}x\,, \quad x = \mathrm{arctg}\, t\,, \quad \mathrm{d}x = \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

ottenendo

$$F'(a) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{2\,a}{\big(a^2+b^2t^2\big)\big(1+t^2\big)}\,\mathrm{d}t\,.$$

→ Per calcolare l'integrale alla parte destra, se $a \neq b$ allora abbiamo la decomposizione in fratti semplici

$$\frac{2\,a}{\big(a^2+b^2t^2\big)\big(1+t^2\big)} = \frac{2\,a}{a^2-b^2}\cdot\frac{1}{1+t^2} - \frac{2\,a\,b^2}{a^2-b^2}\cdot\frac{1}{a^2+b^2t^2}$$

e risulta

$$\begin{aligned}
F'(a) &= \frac{2\,a}{a^2-b^2}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} - \frac{2\,a\,b^2}{a^2-b^2}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{a^2+b^2t^2} \\
&= \frac{2\,a}{a^2-b^2}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} - \frac{2\,a\,b^2}{a^2-b^2}\,\frac{1}{a\,b}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}\,\frac{b\,t}{a}}{1+\left(\frac{b\,t}{a}\right)^2} \\
&= \frac{2\,a}{a^2-b^2}\,\mathrm{arctg}\,t\Big|_{t=0}^{t=+\infty} - \frac{2\,b}{a^2-b^2}\,\mathrm{arctg}\,\frac{b\,t}{a}\Big|_{t=0}^{t=+\infty} \\
&= \frac{\pi}{2}\left(\frac{2\,a}{a^2-b^2} - \frac{2\,b}{a^2-b^2}\right) \\
&= \frac{\pi}{a+b}\ :
\end{aligned}$$

Infatti, sappiamo che esistono costanti $\alpha\,,\beta\,,\gamma\,,\delta \in \mathbb{R}$ tali che

$$\frac{2\,a}{\big(a^2+b^2t^2\big)\big(1+t^2\big)} = \frac{\alpha\,t+\beta}{1+t^2} + \frac{\gamma\,t+\delta}{a^2+b^2t^2}$$

e si trovano

$$\alpha = 0\,,\quad \beta = \frac{2\,a}{a^2-b^2}\,,\quad \gamma = 0\,,\quad \delta = -\,\frac{2\,a\,b^2}{a^2-b^2}\ .$$

$\rightarrow$ Se invece $a = b$, allora $\Bigg($ usando il metodo di integrazione della funzione $\dfrac{1}{(1+t^2)^2}$ imparato nell'Analisi 1 $\Bigg)$ si ottiene

$$F'(a) = \frac{2}{b} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\big(1+t^2\big)^2} \, \mathrm{d}t = \frac{2}{b} \left(\frac{1}{2} \, \frac{t}{1+t^2} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} t \right) \Bigg|_{t=0}^{t=+\infty} = \frac{\pi}{2b} \; ,$$

quindi anche in questo caso vale

$$F'(a) = \frac{\pi}{2b} = \frac{\pi}{a+b} \quad :$$

Tramite integrazione per parti si ottiene

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{1+t^2} \, \mathrm{d}t &= \frac{t}{1+t^2} - \int t \left(- \frac{2t}{(1+t^2)^2} \right) \mathrm{d}t \\ &= \frac{t}{1+t^2} + \int \frac{2t^2 + 2 - 2}{(1+t^2)^2} \, \mathrm{d}t \\ &= \frac{t}{1+t^2} + 2 \int \frac{1}{1+t^2} \, \mathrm{d}t - 2 \int \frac{1}{(1+t^2)^2} \, \mathrm{d}t \end{aligned}$$

e da questa relazione si esprime

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(1+t^2)^2} \, \mathrm{d}t &= \frac{1}{2} \, \frac{t}{1+t^2} + \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+t^2} \, \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2} \, \frac{t}{1+t^2} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} t \; . \end{aligned}$$

$\rightarrow$ **Conclusioni :**

La derivata di F è

$$F'(a) = \frac{\pi}{a+b} \, , \qquad a > 0 \, .$$

Poiché

$$F(0) = \int_0^{\pi/2} \ln\big(b^2 \mathrm{tg}^2 x\big) \, \mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \ln\big(b^2\big) \, \mathrm{d}x - \int_0^{\pi/2} \ln\big(\mathrm{tg}^2 x\big) \, \mathrm{d}x = \pi \ln b \; ,$$

per il teorema findamentale del calcolo integrale otteniamo

$$F(a) = F(0) + \int\limits_0^a F'(s)\,\mathrm{d}s = \pi\,\ln b + \pi\,\ln(s+b)\Big|_{s=o}^{s=a}$$
$$= \pi\,\ln b + \Big(\pi\,\ln(a+b) - \pi\,\ln b\Big) = \pi\,\ln(a+b)\,.$$

Cosicché
$$\int\limits_0^{\pi/2} \ln\!\big(a^2 + b^2 \mathrm{tg}^2 x\big)\,\mathrm{d}x = \pi\,\ln(a+b)\,, \qquad a \geq 0\,.$$

2) : Ponendo $z = x + iy$, per le equazioni di Cauchy-Riemann otteniamo
$$\frac{\partial U}{\partial x}(z) = \frac{\partial}{\partial x} u(x-iy) = \frac{\partial u}{\partial x}(x-iy) = \frac{\partial v}{\partial y}(x-iy)\,,$$
$$\frac{\partial U}{\partial y}(z) = \frac{\partial}{\partial y} u(x-iy) = -\frac{\partial u}{\partial y}(x-iy) = \frac{\partial v}{\partial x}(x-iy)\,.$$

Consideriamo ora anche la funzione
$$W : U_1(0) \ni z \longmapsto v\big(\overline{z}\big)\,.$$

Poiché
$$\frac{\partial W}{\partial x}(z) = \frac{\partial}{\partial x} v(x-iy) = \frac{\partial v}{\partial x}(x-iy)\,,$$
$$\frac{\partial W}{\partial y}(z) = \frac{\partial}{\partial y} v(x-iy) = -\frac{\partial v}{\partial y}(x-iy)\,,$$

risultano
$$\frac{\partial U}{\partial x}(z) = -\frac{\partial W}{\partial y}(z)\,, \quad \frac{\partial U}{\partial y}(z) = \frac{\partial W}{\partial x}(z)\,.$$

Cosicché $V := -W$, cioè la funzione V definita in $U_1(0)$ tramite
$$V(z) = -v\big(\overline{z}\big)\,,$$

è una armonica coniugata di U.

Consideriamo le funzioni olomorfe
$$f = u + i\,v\,, \quad \overline{f} = U + i\,V\,.$$

Rimarchiamo che $\overline{f}$ si può ottenere diretamente da f tramite la formula

$$\overline{f}(z) = u\big(\overline{z}\big) - i\,v\big(\overline{z}\big) = \overline{f\big(\overline{z}\big)}\,, \qquad z \in U_1(0)\,.$$

In particolare, se z è reale allora $\overline{f}(z) = \overline{f(z)}\,$.

Suponiamo adesso che $v = \operatorname{Im} f$ si annulla nell'intervallo $\big(-1\,,+1\big)$. Allora f e $\overline{f}$ sono uguali in $\big(-1\,,+1\big)$ e per il principio d'identità per le funzioni olomorfe concludiamo che devono essere uguali ovunque in $U_1(0)$. Di conseguenza :

$$u(z) = \operatorname{Re} f(z) = \operatorname{Re} \overline{f}(z) = U(z)\,, \qquad z \in U_1(0)\,.$$

3) **:** Indichiamo

$$f(z) := \frac{\ln z}{z^2-1}\,, \qquad z \in \mathbb{C}\setminus\Big(\{1\} \cup \big(i\,(-\infty\,,0]\big)\Big)\,.$$

Poiché ln ha un zero in $z = 1$, 1 è una singolarità eliminabile di f, quindi f è in verità una funzione olomorfa in

$$\mathbb{C}\setminus\Big(i\,(-\infty\,,0]\Big)$$

e l'integrale

$$\int\limits_{\varepsilon}^{r} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{\varepsilon}^{r} \frac{\ln x}{x^2-1}\,\mathrm{d}x = \lim_{0<\delta\to 0}\Bigg(\int\limits_{\varepsilon}^{1-\delta} \frac{\ln x}{x^2-1}\,\mathrm{d}x + \int\limits_{1+\delta}^{r} \frac{\ln x}{x^2-1}\,\mathrm{d}x\Bigg)$$

non è proprio. Perciò l'integrale da calcolare è

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2-1}\,\mathrm{d}x = \lim_{\substack{r\to+\infty\\ 0<\varepsilon\to 0}} \int\limits_{\varepsilon}^{r} \frac{\ln x}{x^2-1}\,\mathrm{d}x\,.$$

Indichiamo, per ogni $\rho > 0$, con $\partial^+ U_\rho^+(0)$ e $\partial^- U_\rho^+(0)$ il semicerchio

$$\big\{z \in \mathbb{C}\,;\, |z| = \rho\,, \operatorname{Im} z \geq 0\big\}$$

orientato contro il senso delle lancette rispettivamente nel senso delle lancette :

$$\partial^+ U_\rho^+(0) \text{ è la curva } [0\,,\pi] \ni t \longmapsto \rho e^{it} \in \mathbb{C}\,,$$
$$\partial^- U_\rho^+(0) \text{ è la curva } [0\,,\pi] \ni t \longmapsto \rho e^{i(\pi-t)} = -\rho e^{-it} \in \mathbb{C}\,.$$

Similmente, indichiamo con $\partial^+ U_\rho^{++}(0)$ e $\partial^- U_\rho^{++}(0)$ il quadrante

$$\big\{z \in \mathbb{C}\,;\, |z| = \rho\,, \operatorname{Re} z \geq 0\,, \operatorname{Im} z \geq 0\big\}$$

orientato contro il senso delle lancette rispettivamente nel senso delle lancette :

$$\partial^+ U_\rho^{++}(0) \text{ è la curva } \left[0\,,\frac{\pi}{2}\right] \ni t \longmapsto \rho e^{it} \in \mathbb{C}\,,$$

$$\partial^- U_\rho^{+}(0) \text{ è la curva } \left[0\,,\frac{\pi}{2}\right] \ni t \longmapsto \rho e^{i\left(\frac{\pi}{2}-t\right)} = i\,\rho e^{-it} \in \mathbb{C}\,.$$

Siano adesso $0 < \varepsilon < 1 < r$ e consideriamo la curva chiusa $\gamma_{\varepsilon,r}$ nel semipiano superiore chiuso che si ottiene componendo

il segmento $[\varepsilon\,,r]$,
il quadrante $\partial^+ U_r^{++}(0)$,
il segmento $[i\,r\,,i\,\varepsilon]$,
il quadrante $\partial^- U_\varepsilon^{++}(0)$.

Per il teorema integrale di Cauchy abbiamo

$$\int\limits_{\gamma_{\varepsilon,r}} f(z)\,\mathrm{d}z = 0\ ,$$

quindi

$$\int\limits_{\varepsilon}^{r} f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{\partial^+ U_r^{++}(0)} f(z)\,\mathrm{d}z + \int\limits_{i\,r}^{i\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{\partial^- U_\varepsilon^{++}(0)} f(z)\,\mathrm{d}z = 0\ ,$$

$$\int\limits_{\varepsilon}^{r} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{i\varepsilon}^{i\,r} f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{\partial^+ U_\varepsilon^{++}(0)} f(z)\,\mathrm{d}z - \int\limits_{\partial^+ U_r^{++}(0)} f(z)\,\mathrm{d}z\ .$$

Ora la stima

$$\begin{aligned}\Bigg|\int\limits_{\partial^+ U_r^{++}(0)} f(z)\,\mathrm{d}z\Bigg| &\leq \int\limits_{\partial^+ U_r^{++}(0)} \big|f(z)\big|\,\mathrm{d}|z| = \int\limits_{\partial^+ U_r^{++}(0)} \left|\frac{\ln z}{z^2-1}\right| \mathrm{d}|z| \\ &\leq \int\limits_{\partial^+ U_r^{++}(0)} \frac{\ln r + \dfrac{\pi}{2}}{r^2-1}\,\mathrm{d}|z| = \frac{\pi r\big(2\ln r + \pi\big)}{4\big(r^2-1\big)} \\ &\leq \frac{\pi\big(2\ln r+\pi\big)}{4\big(r-1\big)}\,, \qquad r>1\end{aligned}$$

implica

$$\lim_{r\to+\infty} \int\limits_{\partial^+ U_r^{++}(0)} f(z)\,\mathrm{d}z = 0\,.$$

Similmente, poiché

$$\begin{aligned}\Bigg|\int\limits_{\partial^+ U_\varepsilon^{++}(0)} f(z)\,\mathrm{d}z\Bigg| &\leq \int\limits_{\partial^+ U_\varepsilon^{++}(0)} \big|f(z)\big|\,\mathrm{d}|z| = \int\limits_{\partial^+ U_\varepsilon^{++}(0)} \left|\frac{\ln z}{z^2-1}\right| \mathrm{d}|z| \\ &\leq \int\limits_{\partial^+ U_\varepsilon^{++}(0)} \frac{-\ln\varepsilon + \dfrac{\pi}{2}}{1-\varepsilon^2}\,\mathrm{d}|z| \\ &= \frac{\pi\varepsilon\big(-2\ln\varepsilon + \pi\big)}{4\big(1-\varepsilon^2\big)}\,, \qquad 0<\varepsilon<1\,,\end{aligned}$$

abbiamo anche

$$\lim_{0<\varepsilon\to 0} \int\limits_{\partial^+ U_\varepsilon^{++}(0)} f(z)\,\mathrm{d}z = 0\,.$$

Finalmente, poiché

$$\int\limits_{i\varepsilon}^{ir} f(x)\,\mathrm{d}x \overset{x=it}{=} \int\limits_{\varepsilon}^{r} \frac{\ln t + \dfrac{\pi}{2}i}{-t^2-1}\,i\,\mathrm{d}t = -i\int\limits_{\varepsilon}^{r} \frac{\ln t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t + \frac{\pi}{2}\int\limits_{\varepsilon}^{r} \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t\,,$$

risulta

$$\lim_{\substack{r\to+\infty\\ 0<\varepsilon\to 0}} \int\limits_{i\varepsilon}^{ir} f(x)\,\mathrm{d}x = -i\underbrace{\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t}_{=0} + \frac{\pi}{2}\underbrace{\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t}_{=\pi/2} = \frac{\pi^2}{4}\,.$$

Concludiamo che

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2-1}\,\mathrm{d}x = \lim_{\substack{r\to+\infty\\ 0<\varepsilon\to 0}} \int\limits_{\varepsilon}^{r} \frac{\ln x}{x^2-1}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{4}\,. \tag{*}$$

Rimarco. Poiché

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{x^2-1}\,\mathrm{d}x \overset{x=\frac{1}{t}}{=} \int_{+\infty}^1 \frac{-\ln t}{\dfrac{1}{t^2}-1}\left(-\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2-1}\,\mathrm{d}t\ ,$$

usando (*) deduciamo anche

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{x^2-1}\,\mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2-1}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{8}\ .$$