NOME: .... **MATRICOLA:** ....

Corso di Laurea in Matematica, A.A. 2014/2015
Analisi Reale e Complessa, Esame del 23.02.2015

1) Siano $a < b$ numeri reali ed $f : [a\,,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione di Lipschitz con costante di Lipschitz $L \geq 0$. Supponiamo che f è derivabile a destra quasi ovunque, cioè che esiste un insieme $E \subset [a\,,b]$ di misura esterna di Lebesgue nulla, contenente per convenienza a e b, tale che per ogni $x \in [a\,,b] \setminus E \subset (a\,,b)$ esiste la derivata destra

$$f'_d(x) := \lim_{0<\delta\to 0} \frac{f(x+\delta)-f(x)}{\delta} \in \mathbb{R}\,.$$

Definiamo $g : [a\,,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ tramite l'uguaglianza

$$g(x) := \begin{cases} f'_d(x) & \text{se } x \in [a\,,b] \setminus E\,, \\ 0 & \text{se } x \in E\,, \end{cases}$$

e le funzioni $g_k : [a\,,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $k \geq 1$, tramite

$$g_k(x) := \begin{cases} \dfrac{k}{b-a}\left(f\left(x+\dfrac{b-a}{k}\right)-f(x)\right) & \text{per } x \in \left[a\,,b-\dfrac{b-a}{k}\right], \\ 0 & \text{per } x \in \left(b-\dfrac{b-a}{k}\,,b\right]. \end{cases}$$

Si verifichi :

α) $g_k(x) \longrightarrow g(x)$ quasi ovunque.

β) Le funzioni g_k , $k \geq 1$, sono misurabili e limitate in modulo da L.

γ) g è sommabile e $\displaystyle\int_a^b \big|\,g_k(x)-g(x)\big|\,\mathrm{d}x \longrightarrow 0$ per $k \to \infty$.

δ) Vale la formula $\displaystyle\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = f(b)-f(a)$.

Suggerimento: Si calcoli esplicitamente $\displaystyle\int_a^b g_k(x)\,\mathrm{d}x$ e si vada al limite per $k \to \infty$.

2) Sia $F : \big(0\,,+\infty\big) \longrightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$F(s) := \int\limits_0^{+\infty} e^{-sx}\,\frac{\sin^3 x}{x}\,\mathrm{d}x\,. \tag{*}$$

(i) Si dimostri che F è ben definita dalla formula (*) e che $\lim\limits_{s\to+\infty} F(s) = 0\,.$

(ii) Si verifichi che F è derivabile e si esprima $F'(s)$ mediante un integrale dipendente dal parametro $s\,.$

(iii) Si calcolino esplicitamente $F'(s)$ ed $F(s)$ per ogni $s \in \big(0\,,+\infty\big)$.

3) a) Sia $U \subset \mathbb{C}$ un aperto contenente la chiusura $\overline{D}_{(0,1)}$ del disco unitario aperto $D_{(0,1)}\,.$ Siano poi $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ e $g : U \longrightarrow \mathbb{C}$ funzioni olomorfe e sia $\Omega := \mathbb{C} \setminus f(\partial D_{(0,1)})\,.$
Mostrare che la funzione $\Phi : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ definita da

$$\Phi(w) := \int\limits_{\partial^+ D_{(0,1)}} \frac{g(z)}{f(z) - w}\,\mathrm{d}z$$

è una funzione olomorfa.

b) Assumendo che $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ sia una funzione olomorfa iniettiva e che si abbia $g(z) = z f'(z)$ per ogni z in U, si calcoli $\Phi(w)$ per ogni $w \in \Omega$ (cioè si trovi per $\Phi(w)$ un'espressione dipendente da f non tramite integrale).

4) A) Sia $I \subset \mathbb{C}$ un insieme finito. Sia $h : \mathbb{C} \setminus I \longrightarrow \mathbb{C}$ una funzione olomorfa. Sia $r \in \mathbb{R}$ un reale positivo tale che $r > |z|$ per ogni $z \in I$. Si mostri che

$$\int_{\partial^+ D_{(0,r)}} h(z)\ dz \ = 2\pi i \, Res\left(\frac{1}{z^2}\ h\left(\frac{1}{z}\right), 0\right).$$

B) Posto

$$k(z) := \frac{(z+1)^4(z+2)^3}{z(z-1)^3(z-2)^2(z-3)^2}\ ,$$

si calcoli

$$Res(k(z), 1) + Res(k(z), 2) + Res(k(z), 3)\,.$$

Soluzioni:

1) **:** α) Mostriamo che $g_k(x) \longrightarrow g(x)$ per ogni $x \in [a\,,b] \setminus E$.

Poiché x si trova in $(a\,,b)$, esiste un intero $k_o \geq 1$ tale che

$$x < b - \frac{b-a}{k_o}\,.$$

Allora

$$g_k(x) = \frac{k}{b-a}\left(f\left(x+\frac{b-a}{k}\right)-f(x)\right), \qquad k \geq k_o$$

D'altro canto, poiché $x \notin E$, abbiamo anche $g(x) = f'_d(x)$. Perciò

$$g(x) = f'_d(x) = \lim_{0<\delta\to 0}\frac{f(x+\delta)-f(x)}{\delta} = \lim_{k\to\infty}\frac{f\left(x+\dfrac{b-a}{k}\right)-f(x)}{\dfrac{b-a}{k}}$$
$$= \lim_{k_o\leq k\to\infty}\frac{k}{b-a}\left(f\left(x+\frac{b-a}{k}\right)-f(x)\right) = \lim_{k_o\leq k\to\infty} g_k(x)\,.$$

β) Sia l'intero $k \geq 1$ arbitrario.

La funzione

$$h_k : \left[a\,,b-\frac{b-a}{k}\right] \ni x \longmapsto \frac{k}{b-a}\left(f\left(x+\frac{b-a}{k}\right)-f(x)\right)$$

è continua, quindi misurabile. Poiché g_k è uguale a h_k in $\left[a\,,b-\dfrac{b-a}{k}\right]$ e si annulla in $\left(b-\dfrac{b-a}{k}\,,b\right]$, per ogni insieme di Borel $B \subset \mathbb{R}$

$$g_k^{-1}(B) = \begin{cases} h_k^{-1}(B) & \text{se } 0 \notin B\,,\\ h_k^{-1}(B) \cup \left(b-\dfrac{b-a}{k}\,,b\right] & \text{se } 0 \in B\,,\end{cases}$$

è un insieme misurabile. Cosicché la funzione g_k è misurabile.

D'altro canto, siccome f è una funzione di Lipschitz con costante di Lipschitz L, abbiamo per ogni $x \in \left[a\,,b-\dfrac{b-a}{k}\right]$

$$
\begin{aligned}
\big|g_k(x)\big| &= \frac{k}{b-a}\left|f\Big(x+\frac{b-a}{k}\Big)-f(x)\right| \\
&\leq \frac{k}{b-a}\,L\left|\Big(x+\frac{b-a}{k}\Big)-x\right| \\
&= L\,.
\end{aligned}
$$

Per $x \in \left(b - \dfrac{b-a}{k}\,,\, b\right]$ vale ovviamente $\big|g_k(x)\big| = 0 \leq L\,.$

γ) g è misurabile quale limite quasi ovunque di una successione di funzioni misurabili :

> Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo e $h_k : I \longrightarrow \mathbb{R}\,,\ k \geq 1\,,$ una successione di funzioni misurabili che converge quasi ovunque a $h : I \longrightarrow \mathbb{R}\,.$ In altre parole, esiste un insieme $N \subset I$ di misura esterna di Lebesgue nulla tale che $h_k(x) \longrightarrow h(x)$ per ogni $x \in I \setminus N$.
>
> N essendo misurabile quale un insieme di misura esterna nulla, la sua funzione caratteristica χ_N è una funzione misurabile. Poiché $h\,\chi_{I\setminus N}$ è il limite puntuale della successione $h_k\,\chi_{I\setminus N}\,,\ k \geq 1\,,$ di funzioni misurabili, lei stessa è pure misurabile. Abbiamo quindi per ogni insieme di Borel $B \subset \mathbb{R}$
>
> $$
> \begin{aligned}
> h^{-1}(B) &= \Big(h^{-1}(B)\cap(I\setminus N)\Big)\cup\Big(h^{-1}(B)\cap N\Big) \\
> &= \Big((h_k\,\chi_{I\setminus N})^{-1}(B)\cap(I\setminus N)\Big)\cup\Big(h^{-1}(B)\cap N\Big)
> \end{aligned}
> $$
>
> dove l'insieme $(h_k\,\chi_{I\setminus N})^{-1}(B)\cap(I\setminus N)$ è misurabile e l'insieme $h^{-1}(B)\cap N \subset N$ è di misura esterna nulla, quindi pure misurabile. Di conseguenza $h^{-1}(B)$ è misurabile per ogni insieme di Borel $B \subset \mathbb{R}\,.$

Poiché g è limite puntuale di $\big(g_k\big)_{k\geq 1}$ in $[\,a\,,\,b\,]\setminus E$ e si annulla in E, abbiamo anche

$$
\big|g(x)\big| \leq L\,, \qquad x \in [\,a\,,\,b\,]\,.
$$

Siccome la funzione costante L è sommabile sull'intervallo limitato $[\,a\,,\,b\,]$, le funzioni $g_k\,,\ k \geq 1\,,$ e g sono sommabili.

Osserviamo ora che è soddisfatta la seguente condizione di dominanza per la successione $\big(|g_k - g|\big)_{k\geq 1}$:

$$\big|g_k(x) - g(x)\big| \leq \big|g_k(x)\big| + \big|g(x)\big| \leq 2\,L\,, \qquad x \in [\,a\,,\,b\,]\,,\, k \geq 1\,,$$

dove la funzione costante $2\,L$ è sommabile su $[\,a\,,\,b\,]$. Ma la successione $\big(|g_k - g|\big)_{k\geq 1}$ è quasi ovunque convergente a zero, perciò il teorema della convergenza dominata di Lebesgue implica la convergenza

$$\lim_{k\to\infty} \int_a^b \big|\,g_k(x) - g(x)\big|\mathrm{d}x = 0\,.$$

δ) La convergenza verificata in γ) implica

$$\lim_{k\to\infty} \int_a^b g_k(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\ :$$

per la verifica basta osservare che

$$0 \leq \left| \int_a^b \big(g_k(x) - g(x)\big)\mathrm{d}x \right| \leq \int_a^b \big|\,g_k(x) - g(x)\big|\mathrm{d}x\,, \qquad k \geq 1\,.$$

Gli integrali $\displaystyle\int_a^b g_k(x)\,\mathrm{d}x$ si calcolano facilmente :

$$\begin{aligned}
\int_a^b g_k(x)\,\mathrm{d}x &= \int_a^{b-\frac{b-a}{k}} \frac{k}{b-a}\left(f\Big(x + \frac{b-a}{k}\Big) - f(x)\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{k}{b-a}\left(\int_{a+\frac{b-a}{k}}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^{b-\frac{b-a}{k}} f(x)\,\mathrm{d}x\right) \\
&= \frac{k}{b-a} \int_{b-\frac{b-a}{k}}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{k}{b-a}\int_a^{a+\frac{b-a}{k}} f(x)\,\mathrm{d}x\,.
\end{aligned}$$

Cosicché

$$\int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} \frac{k}{b-a} \int\limits_{b-\frac{b-a}{k}}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x - \lim_{k\to\infty} \frac{k}{b-a} \int\limits_{a}^{a+\frac{b-a}{k}} f(x)\,\mathrm{d}x$$

e la formula $\int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = f(b) - f(a)$ risulta se dimostriamo che valgono

$$\lim_{0<\delta\to 0} \frac{1}{\delta} \int_a^{a+\delta} f(x)\,\mathrm{d}x = f(a) \tag{1}$$

e

$$\lim_{0<\delta\to 0} \frac{1}{\delta} \int_{b-\delta}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = f(b)\,. \tag{2}$$

Per dimostrare (1) sia $\varepsilon > 0$ arbitrario. La continuità di f in a implica l'esistenza di un $0 < \delta_o < b-a$ tale che

$$\big|f(x) - f(a)\big| \leq \varepsilon\,, \qquad a \leq x \leq a + \delta_o\,.$$

Risulta per ogni $0 < \delta < \delta_o$

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{\delta} \int_a^{a+\delta} f(x)\,\mathrm{d}x - f(a)\right| &= \left|\frac{1}{\delta} \int_a^{a+\delta} \Big(f(x) - f(a)\Big)\,\mathrm{d}x\right| \\
&\leq \frac{1}{\delta} \int_a^{a+\delta} \underbrace{\big|f(x) - f(a)\big|}_{\leq\varepsilon}\,\mathrm{d}x \\
&\leq \frac{1}{\delta}\,\varepsilon\big((a+\delta) - a\big) \\
&= \varepsilon\,.
\end{aligned}$$

Similmente si verifica (2), usando stavolta la continuità di f in b.

Osservazione.

In particolare, se una funzione di Lipschitz ha quasi ovunque derivata destra nulla, allora è costante.

D'altro canto esistono funzioni continue suriettive $[\,0\,,\,1\,] \longrightarrow [\,0\,,\,1\,]$ che hanno derivata nulla quasi ovunque, per esempio la funzione di Cantor (http://it.wikipedia.org/wiki/Funzione_di_Cantor).

Perciò solo in classi particolari di funzioni continue, come appunto le funzioni di Lipschitz, l'esistenza di una derivata nulla quasi ovunque può implicare che la funzione in questione è costante.

Una funzione (reale o complessa) f definita su un intervallo $I \subset \mathbb{R}$ si chiama *assolutamente continua* se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che se $(a_j\,,b_j)\,,\ 1 \leq j \leq k\,,$ sono sottointervalli a due a due disgiunti di I con

$$\sum_{j=1}^{k}(b_j - a_j) \leq \delta$$

allora

$$\sum_{j=1}^{k}\big|f(b_j) - f(a_j)\big| \leq \varepsilon\,.$$

Chiaramente, se f è di Lipschitz con costante di Lipschitz $L \geq 0$ allora f è assolutamente continua :

$$\sum_{j=1}^{k}\big|f(b_j) - f(a_j)\big| \leq L\sum_{j=1}^{k}(b_j - a_j)\,.$$

Viceversa però non ogni funzione assolutamente continua è di Lipschitz, come mostra l'esempio $[\,0\,,1\,] \ni x \longmapsto \sqrt{x}$ (la verifica è un esercizio).

Per un teorema di Lebesgue, qualsiasi funzione assolutamente continua $f : [\,a\,,b\,] \longrightarrow \mathbb{R}$ è derivabile quasi ovunque e se $g : [\,a\,,b\,] \longrightarrow \mathbb{R}$ è la funzione uguale alla derivata di f nei punti dove la derivata esiste ed a 0 negli altri punti, allora g è sommabile e vale

$$\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = f(b) - f(a)\,.$$

La dimostrazione è molto più complicata della soluzione del compito precedente e si trova, per esempio, nel libro

> Béla Sz.-Nagy:
> Introduction to real functions and orthogonal expansions,
> Oxford University Press, New York 1965,

nel Capitolo V, Sezione 2.3.

In particolare, se una funzione assolutamente continua ha derivata nulla quasi ovunque, allora si annulla identicamente. Ovviamente la funzione di Cantor non è assolutamente continua.

2) : (i) È ben noto che

$$\left| \frac{\sin x}{x} \right| \leq 1\,, \qquad x > 0\,.$$

Perciò, per ogni $s > 0$, la funzione continua (quindi misurabile)

$$(\,0\,,+\infty) \ni x \longmapsto e^{-sx}\,\frac{\sin^3 x}{x}$$

ammette la maggiorazione

$$\left| e^{-sx}\,\frac{\sin^3 x}{x} \right| \leq e^{-sx}\,, \qquad x > 0$$

$$\left| e^{-sx}\,\frac{\sin^3 x}{x} \right| \leq e^{-sx}\,, \qquad x > 0 \tag{3}$$

con la funzione sommabile e^{-sx}. Risulta che anche essa è sommabile e di conseguenza la funzione F è ben definita.

La maggiorazione (3) di cui sopra serve anche al calcolo del limite di F all'infinito :

$$\big|F(s)\big| = \left| \int\limits_0^{+\infty} e^{-sx}\,\frac{\sin^3 x}{x}\,\mathrm{d}x \right| \leq \int\limits_0^{+\infty} \left| e^{-sx}\,\frac{\sin^3 x}{x} \right| \mathrm{d}x \leq \int\limits_0^{+\infty} e^{-sx}\mathrm{d}x = \frac{1}{s}$$

implica $\lim\limits_{s\to+\infty} F(s) = 0\,.$

(ii) Sia $\varepsilon > 0$ arbitrario. Siccome le funzioni

$$(\,\varepsilon\,,+\infty) \ni s \longmapsto e^{-sx}\,\frac{\sin^3 x}{x}\,, \quad x \in (\,0\,,+\infty)$$

sono derivabili e le derivate parziali

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(e^{-sx}\,\frac{\sin^3 x}{x} \right) = -\,e^{-sx}\sin^3 x$$

ammettono la maggiorazione

$$\left| \frac{\partial}{\partial s}\left(e^{-sx}\,\frac{\sin^3 x}{x} \right) \right| \leq e^{-\varepsilon x}\,, \quad x \in (\,0\,,+\infty)\,, s \in (\,\varepsilon\,,+\infty)$$

dove la funzione

$$[\,0\,,+\infty) \ni x \longmapsto e^{-\varepsilon x}$$

è sommabile, per il teorema sulla dipendenza derivabile da parametri reali la funzione F è derivabile in $(\varepsilon\,,+\infty)$ e vale la formula

$$F'(s) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial s}\Big(e^{-sx}\frac{\sin^3 x}{x}\Big)\mathrm{d}x = -\int_0^{+\infty} e^{-sx}\sin^3 x\,\mathrm{d}x\,, \quad s \in (\varepsilon\,,+\infty)\,.$$

Ma $\varepsilon > 0$ è arbitrario, perciò concludiamo che F è derivabile su tutto $(\,0\,,+\infty)$ ed abbiamo

$$F'(s) = -\int_0^{+\infty} e^{-sx}\sin^3 x\,\mathrm{d}x\,, \quad s \in (\,0\,,+\infty)\,. \tag{4}$$

(iii) Usando la formula (4) possiamo calcolare $F'(s)$ esplicitamente per ogni $s \in (\,0\,,+\infty)$.

A questo fine ci serve la primitiva di $e^{-sx}\sin^3 x$.

Tramite integrazione per parti otteniamo

$$\begin{aligned}
\int e^{-sx}\sin^3 x\mathrm{d}x &= \int \sin^3 x\,\mathrm{d}\frac{e^{-sx}}{-\,s} \\
&= -\;\frac{e^{-sx}\sin^3 x}{s} + \frac{3}{s}\int e^{-sx}(\sin^2 x)(\cos x)\,\mathrm{d}x \\
&= -\;\frac{e^{-sx}\sin^3 x}{s} + \frac{3}{s}\int (\sin^2 x)(\cos x)\,\mathrm{d}\frac{e^{-sx}}{-\,s} \\
&= -\;\frac{e^{-sx}\sin^3 x}{s} - \frac{3\,e^{-sx}(\sin^2 x)(\cos x)}{s^2} \\
&\quad + \frac{3}{s^2}\int e^{-sx}\Big(\underbrace{2(\sin x)(\cos^2 x) - \sin^3 x}_{=\,2\sin x - 3\sin^3 x}\Big)\mathrm{d}x \\
&= -\;\frac{e^{-sx}\sin^3 x}{s} - \frac{3\,e^{-sx}(\sin^2 x)(\cos x)}{s^2} \\
&\quad + \frac{6}{s^2}\int e^{-sx}\sin x\,\mathrm{d}x - \frac{9}{s^2}\int e^{-sx}\sin^3 x\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

e risulta

$$\begin{aligned}\int e^{-sx}\sin^3 x\mathrm{d}x = & -\frac{s\,e^{-sx}\sin^3 x}{s^2+9}-\frac{3\,e^{-sx}(\sin^2 x)(\cos x)}{s^2+9} \\ & +\frac{6}{s^2+9}\int e^{-sx}\sin x\,\mathrm{d}x\,.\end{aligned} \tag{5}$$

Per completare il calcolo calcoliamo anche la primitiva di $e^{-sx}\sin x$. Integrando due volte per parti otteniamo

$$\begin{aligned}\int e^{-sx}\sin x\mathrm{d}x &= \int \sin x\,\mathrm{d}\frac{e^{-sx}}{-s} = -\frac{e^{-sx}\sin x}{s}+\frac{1}{s}\int e^{-sx}\cos x\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{e^{-sx}\sin x}{s}+\frac{1}{s}\int \cos x\,\mathrm{d}\frac{e^{-sx}}{-s} \\ &= -\frac{e^{-sx}\sin x}{s}-\frac{e^{-sx}\cos x}{s^2}-\frac{1}{s^2}\int e^{-sx}\sin x\mathrm{d}x\,,\end{aligned}$$

quindi

$$\int e^{-sx}\sin x\mathrm{d}x = -\frac{e^{-sx}(s\sin x+\cos x)}{s^2+1}\,. \tag{6}$$

Da (5) e (6) concludiamo

$$\begin{aligned}\int e^{-sx}\sin^3 x\mathrm{d}x = & -\frac{s\,e^{-sx}\sin^3 x}{s^2+9}-\frac{3\,e^{-sx}(\sin^2 x)(\cos x)}{s^2+9} \\ & -\frac{6\,e^{-sx}(s\sin x+\cos x)}{(s^2+9)(s^2+1)}\,.\end{aligned} \tag{7}$$

Usiamo ora (4) e (7) per il calcolo di $F'(s)$:

$$\begin{aligned}F'(s) &= \frac{s\,e^{-sx}\sin^3 x}{s^2+9}\bigg|_{x=0}^{x=+\infty}+\frac{3\,e^{-sx}(\sin^2 x)(\cos x)}{s^2+9}\bigg|_{x=0}^{x=+\infty} \\ &\quad +\frac{6\,e^{-sx}(s\sin x+\cos x)}{(s^2+9)(s^2+1)}\bigg|_{x=0}^{x=+\infty} \\ &= -\frac{6}{(s^2+9)(s^2+1)}\,.\end{aligned} \tag{8}$$

Per (8) la funzione F è una primitiva di

$$-\frac{6}{(s^2+9)(s^2+1)}\,.$$

Poiché lo sviluppo di questa funzione razionale in fratti semplici e

$$-\frac{6}{(s^2+9)(s^2+1)} = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{s^2+9} - \frac{1}{s^2+1}\right),$$

otteniamo

$$F(s) = \frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{s}{3} - \frac{3}{4}\operatorname{arctg} s + c$$

con c una costante. Per trovare c usiamo il fatto che $\lim\limits_{s\to+\infty} F(s) = 0$:

$$0 = \lim_{s\to+\infty} F(s) = \frac{1}{4}\,\frac{\pi}{2} - \frac{3}{4}\,\frac{\pi}{2} + c = c - \frac{\pi}{4}$$

implica $c = \dfrac{\pi}{4}$ e concludiamo :

$$F(s) = \frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{s}{3} - \frac{3}{4}\operatorname{arctg} s + \frac{\pi}{4}\,. \tag{9}$$

Osservazione 1.

Mostriamo che l'integrale nella formula (*) esiste anche per $s = 0$, pur nel senso improprio, e che la funzione definita sull'intervallo chiuso $[0\,,+\infty)$ (0 compreso!) tramite la formula (*) sarà continua.

Mostriamo per prima che per ogni $s \geq 0$ l'integrale

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-sx}\,\frac{\sin^3 x}{x}\,\mathrm{d}x$$

esiste nel senso improprio ed abbiamo

$$\begin{aligned}
&\int\limits_\pi^{+\infty} e^{-sx}\,\frac{\sin^3 x}{x}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{6\,e^{-\pi s}}{\pi(s^2+9)(s^2+1)} \\
&\quad - \int\limits_\pi^{+\infty}\left(\frac{s\,\sin^3 x}{s^2+9} + \frac{3\,(\sin^2 x)(\cos x)}{s^2+9} + \frac{6\,(s\sin x + \cos x)}{(s^2+9)(s^2+1)}\right)\frac{e^{-sx}}{x^2}\,\mathrm{d}x\,,
\end{aligned}$$

ossia

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{+\infty} e^{-sx}\frac{\sin^3 x}{x}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\pi} e^{-sx}\frac{\sin^3 x}{x}\,\mathrm{d}x + \frac{6\,e^{-\pi s}}{\pi(s^2+9)(s^2+1)} \\
&\quad - \int_\pi^{+\infty}\biggl(\frac{s\,\sin^3 x}{s^2+9} + \frac{3\,(\sin^2 x)(\cos x)}{s^2+9} \\
&\qquad\qquad + \frac{6\,(s\sin x+\cos x)}{(s^2+9)(s^2+1)}\biggr)\frac{e^{-sx}}{x^2}\,\mathrm{d}x\,.
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Infatti, avendo alla disposizione la primitiva di $e^{-sx}\sin^3 x$ calcolata in (7), otteniamo per ogni $b>\pi$ tramite integrazione per parti

$$
\begin{aligned}
&\int_\pi^{b} e^{-sx}\frac{\sin^3 x}{x}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_\pi^{b} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}\biggl(-\frac{s\,e^{-sx}\sin^3 x}{s^2+9} - \frac{3\,e^{-sx}(\sin^2 x)(\cos x)}{s^2+9} \\
&\qquad\qquad - \frac{6\,e^{-sx}(s\sin x+\cos x)}{(s^2+9)(s^2+1)}\biggr) \\
&= \frac{1}{x}\biggl(-\frac{s\,e^{-sx}\sin^3 x}{s^2+9} - \frac{3\,e^{-sx}(\sin^2 x)(\cos x)}{s^2+9} \\
&\qquad\qquad - \frac{6\,e^{-sx}(s\sin x+\cos x)}{(s^2+9)(s^2+1)}\biggr)\bigg|_{x=\pi}^{x=b} \\
&\quad - \int_\pi^{b} \frac{1}{x^2}\biggl(\frac{s\,e^{-sx}\sin^3 x}{s^2+9} + \frac{3\,e^{-sx}(\sin^2 x)(\cos x)}{s^2+9} \\
&\qquad\qquad + \frac{6\,e^{-sx}(s\sin x+\cos x)}{(s^2+9)(s^2+1)}\biggr)\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

$$= \frac{6\,e^{-\pi s}}{\pi(s^2+9)(s^2+1)} - \frac{e^{-sb}}{b}\Bigg(\frac{s\,\sin^3 b}{s^2+9} + \frac{3\,(\sin^2 b)(\cos b)}{s^2+9} + \frac{6\,(s\sin b + \cos b)}{(s^2+9)(s^2+1)}\Bigg)$$

$$- \int\limits_{\pi}^{b} \left(\frac{s\,\sin^3 x}{s^2+9} + \frac{3\,(\sin^2 x)(\cos x)}{s^2+9} + \frac{6\,(s\sin x + \cos x)}{(s^2+9)(s^2+1)}\right)\frac{e^{-sx}}{x^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

Siccome

$$\left|\frac{s\,\sin^3 x}{s^2+9} + \frac{3\,(\sin^2 x)(\cos x)}{s^2+9} + \frac{6\,(s\sin x + \cos x)}{(s^2+9)(s^2+1)}\right|$$
$$\leq \frac{s}{s^2+9} + \frac{3}{s^2+9} + \frac{6\,(s+1)}{(s^2+9)(s^2+1)}\,, \qquad x > 0$$

e

$$0 \leq \frac{e^{-sx}}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}\,, \qquad x > 0\,,$$

risulta che esiste

$$\int\limits_{\pi}^{+\infty} e^{-sx}\,\frac{\sin^3 x}{x}\,\mathrm{d}x := \lim_{b\to+\infty}\int\limits_{\pi}^{b} e^{-sx}\,\frac{\sin^3 x}{x}\,\mathrm{d}x$$

ed è uguale a

$$\frac{6\,e^{-\pi s}}{\pi(s^2+9)(s^2+1)}$$
$$-\int\limits_{\pi}^{+\infty}\left(\frac{s\,\sin^3 x}{s^2+9} + \frac{3\,(\sin^2 x)(\cos x)}{s^2+9} + \frac{6\,(s\sin x + \cos x)}{(s^2+9)(s^2+1)}\right)\frac{e^{-sx}}{x^2}\,\mathrm{d}x\,,$$

dove l'integrando è sommabile.

Abbiamo quindi dimostrato che la funzione

$$F : [0\,, +\infty) \ni s \longmapsto \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-sx}\,\frac{\sin^3 x}{x}\,\mathrm{d}x\,,$$

dove l'integrando è sommabile per $s > 0$ ma l'integrale esiste solo nel senso improprio per $s = 0$, è ben definita e vale (10). In altre parole

$$F(s) = F_1(s) + \frac{6\,e^{-\pi s}}{\pi(s^2+9)(s^2+1)} - F_2(s)\,, \qquad s \geq 0\,,$$

dove

$$F_1(s) := \int_0^{\pi} e^{-sx}\,\frac{\sin^3 x}{x}\,\mathrm{d}x\,,$$

$$F_2(s) := \int_{\pi}^{+\infty} \left(\frac{s\,\sin^3 x}{s^2+9} + \frac{3\,(\sin^2 x)(\cos x)}{s^2+9} + \frac{6\,(s\sin x + \cos x)}{(s^2+9)(s^2+1)} \right) \frac{e^{-sx}}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

ed ambo gli integrandi sono sommabili. Così la continuità di F risulterà se dimostriamo la continuità di F_1 e di F_2 .

La continuità di F_1 risulta usando il teorema sulla dipendenza continua da parametri reali. Infatti, l'integrando è una funzione continua di s ed abbiamo la maggiorazione uniforme

$$\left| e^{-sx}\,\frac{\sin^3 x}{x} \right| \leq 1\,, \qquad x \in (0\,,\pi]\,,\, s \geq 0$$

dove la funzione costante 1 è sommabile su $(0\,,\pi]$.

Anche la continuità di F_2 risulta applicando il teorema sulla dipendenza continua da parametri reali, poiché l'integrando è una funzione continua di s e vale la maggiorazione uniforme

$$\begin{aligned}
&\left| \left(\frac{s\,\sin^3 x}{s^2+9} + \frac{3\,(\sin^2 x)(\cos x)}{s^2+9} + \frac{6\,(s\sin x + \cos x)}{(s^2+9)(s^2+1)} \right) \frac{e^{-sx}}{x^2} \right| \\
&\leq \Bigg(\underbrace{\frac{s}{s^2+9}}_{\leq 1/6} + \underbrace{\frac{3}{s^2+9}}_{\leq 1/3} + \underbrace{\frac{6\,(s+1)}{(s^2+9)(s^2+1)}}_{\leq 4/3} \Bigg) \frac{1}{x^2} \\
&\leq \frac{2}{x^2}\,, \qquad\qquad x \in [\pi\,,+\infty)\,,\, s \geq 0
\end{aligned}$$

dove la funzione $\dfrac{2}{x^2}$ è sommabile su $[\pi\,,+\infty)$ (ma non su $(0\,,+\infty)$, per questa ragione abbiamo diviso l'integrale che definisce F in una somma di due integrali, uno su $(0\,,\pi]$ ed un altro su $[\pi\,,+\infty)$!).

Una volta verificata che la formula (*) definisce una funzione continua su $[0\,,+\infty)$, (9) implica

$$\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-sx}\frac{\sin^3 x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\,\mathrm{arctg}\frac{s}{3} - \frac{3}{4}\,\mathrm{arctg}\, s + \frac{\pi}{4}\,, \quad s \in [0\,, +\infty)\,. \ (11)}$$

In particolare, per $s = 0$ abbiamo

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}\,.$$

Osservazione 2.

Usando (11) possiamo calcolare anche gli integrali

$$G(s) := \int_0^{+\infty} e^{-sx}\frac{\sin^3 x}{x^2}\,\mathrm{d}x\,,\ H(s) := \int_0^{+\infty} e^{-sx}\frac{\sin^3 x}{x^3}\,\mathrm{d}x\,, \quad s \geq 0\,.$$

Sia G che H è una funzione ben definita e continua su $[0\,, +\infty)$. Infatti, poiché

- le funzioni
$$(0\,, +\infty) \ni x \longmapsto e^{-sx}\frac{\sin^3 x}{x^2}\,,\ (0\,, +\infty) \ni x \longmapsto e^{-sx}\frac{\sin^3 x}{x^3}$$
sono continue, quindi misurabili, per ogni $s \geq 0$,
- le funzioni
$$[0\,, +\infty) \ni s \longmapsto e^{-sx}\frac{\sin^3 x}{x^2}\,,\ [0\,, +\infty) \ni s \longmapsto e^{-sx}\frac{\sin^3 x}{x^3}$$
sono continue per ogni $x > 0$,
- e valgono le maggiorazioni uniformi
$$\left| e^{-sx}\frac{\sin^3 x}{x^2}\right| \leq g(x) := \begin{cases} 1 & \text{per } 0 < x < \dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{1}{x^2} & \text{per } x \geq \dfrac{\pi}{2} \end{cases}, \quad x > 0\,, s \geq 0\,,$$
$$\left| e^{-sx}\frac{\sin^3 x}{x^3}\right| \leq h(x) := \begin{cases} 1 & \text{per } 0 < x < \dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{1}{x^3} & \text{per } x \geq \dfrac{\pi}{2} \end{cases}, \quad x > 0\,, s \geq 0\,,$$
dove le funzioni g e h sono sommabili su $(0\,, +\infty)$,

possiamo applicare il teorema sulla dipendenza continua da parametri reali.

Poi, usando il teorema sulla dipendenza derivabile da parametri reali, possiamo verificare che G e H sono derivabili su $(0\,,+\infty)$ e

$$G'(s) = -\,F(s)\,,\, H'(s) = -\,G(s)\,, \qquad s > 0\,.$$

A questo fine basta osservare che le funzioni

$$(0\,,+\infty) \ni s \longmapsto e^{-sx}\frac{\sin^3 x}{x^2}\,,\, (0\,,+\infty) \ni s \longmapsto e^{-sx}\frac{\sin^3 x}{x^3}\,, \quad x > 0$$

sono derivabili e le derivate parziali

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(e^{-sx}\frac{\sin^3 x}{x^2}\right) = -\,e^{-sx}\frac{\sin^3 x}{x}\,,\, \frac{\partial}{\partial s}\left(e^{-sx}\frac{\sin^3 x}{x^3}\right) = -\,e^{-sx}\frac{\sin^3 x}{x^2}$$

ammettono le maggiorazioni

$$\left|\frac{\partial}{\partial s}\left(e^{-sx}\frac{\sin^3 x}{x^2}\right)\right| \le e^{-\varepsilon x}\,, \quad x \in (0\,,+\infty)\,, s \in (\varepsilon\,,+\infty)\,, \varepsilon > 0\,,$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial s}\left(e^{-sx}\frac{\sin^3 x}{x^3}\right)\right| \le g(x)\,, \quad x \in (0\,,+\infty)\,, s \in (0\,,+\infty)\,,$$

dove le funzioni

$$(0\,,+\infty) \ni x \longmapsto e^{-\varepsilon x}\,, \quad (0\,,+\infty) \ni x \longmapsto g(x)$$

sono sommabili.

Per di più, poiché

$$\big|G(s)\big| = \left|\int\limits_0^{+\infty} e^{-sx}\frac{\sin^3 x}{x^2}\,\mathrm{d}x\right| \le \int\limits_0^{+\infty}\left|e^{-sx}\frac{\sin^3 x}{x^2}\right|\mathrm{d}x \le \int\limits_0^{+\infty} e^{-sx}\mathrm{d}x = \frac{1}{s}\,,$$

$$\big|H(s)\big| = \left|\int\limits_0^{+\infty} e^{-sx}\frac{\sin^3 x}{x^3}\,\mathrm{d}x\right| \le \int\limits_0^{+\infty}\left|e^{-sx}\frac{\sin^3 x}{x^3}\right|\mathrm{d}x \le \int\limits_0^{+\infty} e^{-sx}\mathrm{d}x = \frac{1}{s}\,,$$

abbiamo anche $\lim\limits_{s\to+\infty} G(s) = \lim\limits_{s\to+\infty} H(s) = 0\,.$

Ora, per calcolare G, una primitiva di $-\,F$, sapendo che secondo (11)

$$F(s) = \frac{1}{4}\,\mathrm{arctg}\,\frac{s}{3} - \frac{3}{4}\,\mathrm{arctg}\,s + \frac{\pi}{4}\,, \quad s \ge 0\,,$$

ci serve la primitiva di $\operatorname{arctg} s$:

$$\int \operatorname{arctg} s \, \mathrm{d}s = s \operatorname{arctg} s - \int \frac{s}{1+s^2} \, \mathrm{d}s = s \operatorname{arctg} s - \frac{1}{2} \ln(1+s^2) \, .$$

Allora abbiamo anche

$$\begin{aligned} \int \operatorname{arctg} \frac{s}{3} \, \mathrm{d}s &= 3\Big(\frac{s}{3} \operatorname{arctg} \frac{s}{3} - \frac{1}{2} \ln \Big(1 + \frac{s^2}{9}\Big)\Big) \\ &= s \operatorname{arctg} \frac{s}{3} - \frac{3}{2} \ln \Big(1 + \frac{s^2}{9}\Big) \end{aligned}$$

e risulta

$$G(s) =$$
$$-\frac{s}{4} \operatorname{arctg} \frac{s}{3} + \frac{3}{8} \ln \Big(1 + \frac{s^2}{9}\Big) + \frac{3\,s}{4} \operatorname{arctg} s - \frac{3}{8} \ln(1+s^2) - \frac{\pi}{4} s + c_1$$

ossia

$$G(s) = -\frac{s}{4} \operatorname{arctg} \frac{s}{3} + \frac{3\,s}{4} \operatorname{arctg} s + \frac{3}{8} \ln \frac{s^2+9}{s^2+1} - \frac{\pi}{4} s - \frac{3}{4} \ln 3 + c_1$$

con c_1 una opportuna costante che dobbiamo calcolare. Sapendo però che $\lim\limits_{s \to +\infty} G(s) = 0$, deduciamo :

$$c_1 = \lim_{s \to +\infty} \Big(\frac{s}{4} \operatorname{arctg} \frac{s}{3} - \frac{3\,s}{4} \operatorname{arctg} s - \frac{3}{8} \ln \frac{s^2+9}{s^2+1} + \frac{\pi}{4} s + \frac{3}{4} \ln 3 \Big).$$

Ma, usando la regola di de l'Hôpital, otteniamo

$$\begin{aligned} &\lim_{s \to +\infty} \Big(\frac{s}{4} \operatorname{arctg} \frac{s}{3} - \frac{3\,s}{4} \operatorname{arctg} s + \frac{\pi}{4} s \Big) \\ &= \lim_{s \to +\infty} \frac{s}{4} \Big(\operatorname{arctg} \frac{s}{3} - 3 \operatorname{arctg} s + \pi \Big) \\ &= \lim_{0<t \to 0} \frac{1}{4\,t} \Big(\operatorname{arctg} \frac{1}{3\,t} - 3 \operatorname{arctg} \frac{1}{t} + \pi \Big) \\ &= \lim_{0<t \to 0} \frac{1}{4} \Big(\frac{1}{1+\dfrac{1}{9\,t^2}} \Big(-\frac{1}{3\,t^2} \Big) - \frac{3}{1+\dfrac{1}{t^2}} \Big(-\frac{1}{t^2} \Big) \Big) \\ &= \lim_{0<t \to 0} \frac{1}{4} \Big(-\frac{3}{9\,t^2+1} + \frac{3}{t^2+1} \Big) = \frac{1}{4} \big(-3+3 \big) = 0 \, . \end{aligned}$$

D'altro canto,

$$\lim_{s\to+\infty}\left(\frac{3}{8}\ln\frac{s^2+9}{s^2+1}\right)=\frac{3}{8}\ln 1=0\,.$$

Di conseguenza $c_1=\dfrac{3}{4}\ln 3$ e risulta

$$\boxed{\int\limits_0^{+\infty} e^{-sx}\frac{\sin^3 x}{x^2}\,\mathrm{d}x=-\frac{s}{4}\operatorname{arctg}\frac{s}{3}+\frac{3\,s}{4}\operatorname{arctg}s+\frac{3}{8}\ln\frac{s^2+9}{s^2+1}-\frac{\pi}{4}\,s\,. \quad (12)}$$

In particolare, per $s=0$ abbiamo

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin^3 x}{x^2}\,\mathrm{d}x=0\,.$$

Per il calcolo di H, una primitiva di $-G$, procediamo similmente. Ci serve la primitiva di $s\operatorname{arctg}s$:

$$\begin{aligned}\int s\operatorname{arctg}s\,\mathrm{d}s&=\int\operatorname{arctg}s\,\mathrm{d}\frac{s^2}{2}=\frac{s^2}{2}\operatorname{arctg}s-\int\left(\frac{s^2}{2}\,\frac{1}{1+s^2}\right)\mathrm{d}s\\&=\frac{s^2}{2}\operatorname{arctg}s-\frac{s}{2}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}s\,.\end{aligned}$$

Così abbiamo anche

$$\begin{aligned}\int s\operatorname{arctg}\frac{s}{3}\,\mathrm{d}s&=9\left(\frac{s^2}{18}\operatorname{arctg}\frac{s}{3}-\frac{s}{6}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{s}{3}\right)\\&=\frac{s^2}{2}\operatorname{arctg}\frac{s}{3}-\frac{3\,s}{2}+\frac{9}{2}\operatorname{arctg}\frac{s}{3}\,.\end{aligned}$$

D'altro canto, tramite integrazione per parti otteniamo

$$\begin{aligned}&\int\ln\frac{s^2+9}{s^2+1}\,\mathrm{d}s\\&=s\ln\frac{s^2+9}{s^2+1}-\int\left(s\,\frac{s^2+1}{s^2+9}\,\frac{2s(s^2+1)-2s(s^2+9)}{(s^2+1)^2}\right)\mathrm{d}s\\&=s\ln\frac{s^2+9}{s^2+1}+\int\frac{16\,s^2}{(s^2+9)(s^2+1)}\,\mathrm{d}s\end{aligned}$$

Usando la decomposizione in fratti semplici

$$\frac{16\,s^2}{(s^2+9)(s^2+1)} = \frac{18}{s^2+9} - \frac{2}{s^2+1}$$

risulta

$$\int \ln\frac{s^2+9}{s^2+1}\,\mathrm{d}s = s\ln\frac{s^2+9}{s^2+1} + 6\operatorname{arctg}\frac{s}{3} - 2\operatorname{arctg} s\,.$$

Cosicché, usando (12), otteniamo per la primitiva H di $-G$ la formula

$$\begin{aligned}
&H(s)\\
&= \frac{s^2}{8}\operatorname{arctg}\frac{s}{3} - \frac{3\,s}{8} + \frac{9}{8}\operatorname{arctg}\frac{s}{3} - \frac{3\,s^2}{8}\operatorname{arctg} s + \frac{3\,s}{8} - \frac{3}{8}\operatorname{arctg} s\\
&\quad - \frac{3\,s}{8}\ln\frac{s^2+9}{s^2+1} - \frac{9}{4}\operatorname{arctg}\frac{s}{3} + \frac{3}{4}\operatorname{arctg} s + \frac{\pi}{8}\,s^2 + c_2\\
&= \frac{s^2}{8}\operatorname{arctg}\frac{s}{3} - \frac{3\,s^2}{8}\operatorname{arctg} s - \frac{9}{8}\operatorname{arctg}\frac{s}{3} + \frac{3}{8}\operatorname{arctg} s + \frac{\pi}{8}\,s^2\\
&\quad - \frac{3\,s}{8}\ln\frac{s^2+9}{s^2+1} + c_2
\end{aligned}$$

con c_2 una oportuna costante e dovendo avere $\lim\limits_{s\to+\infty} H(s) = 0$ risulta

$$\begin{aligned}
c_2 = \lim_{s\to+\infty}\Big(&-\frac{s^2}{8}\operatorname{arctg}\frac{s}{3} + \frac{3\,s^2}{8}\operatorname{arctg} s + \frac{9}{8}\operatorname{arctg}\frac{s}{3} - \frac{3}{8}\operatorname{arctg} s\\
&- \frac{\pi}{8}\,s^2 + \frac{3\,s}{8}\ln\frac{s^2+9}{s^2+1}\Big).
\end{aligned}$$

Ora calcoliamo i limiti. Usando la regola di de l'Hôpital otteniamo

$$\begin{aligned}
&\lim_{s\to+\infty}\Big(-\frac{s^2}{8}\operatorname{arctg}\frac{s}{3} + \frac{3\,s^2}{8}\operatorname{arctg} s - \frac{\pi}{8}\,s^2\Big)\\
&= \lim_{s\to+\infty}\frac{s^2}{8}\Big(3\operatorname{arctg} s - \operatorname{arctg}\frac{s}{3} - \pi\Big)\\
&= \lim_{0<t\to0}\frac{1}{8\,t^2}\Big(3\operatorname{arctg}\frac{1}{t} - \operatorname{arctg}\frac{1}{3\,t} - \pi\Big)\\
&= \lim_{0<t\to0}\frac{1}{16\,t}\Bigg(\frac{3}{1+\frac{1}{t^2}}\Big(-\frac{1}{t^2}\Big) - \frac{1}{1+\frac{1}{9\,t^2}}\Big(-\frac{1}{3\,t^2}\Big)\Bigg)\\
&= \lim_{0<t\to0}\frac{1}{16\,t}\Big(-\frac{3}{t^2+1} + \frac{3}{9\,t^2+1}\Big) = \lim_{0<t\to0}\frac{-3\,t}{2\,(t^2+1)(t^2+9)} = 0\,.
\end{aligned}$$

Usando la regola di de l'Hôpital otteniamo anche

$$\begin{aligned}
\lim_{s\to+\infty} \frac{3\,s}{8} \ln \frac{s^2+9}{s^2+1} &= \lim_{0<t\to 0} \frac{1}{t} \ln \frac{1+9\,t^2}{1+t^2} \\
&= \lim_{0<t\to 0} \frac{1+t^2}{1+9\,t^2} \, \frac{18\,t\,(1+t^2) - 2\,t\,(1+9\,t^2)}{(1+t^2)^2} \\
&= \lim_{0<t\to 0} \frac{16\,t}{(1+9\,t^2)(1+t^2)} = 0\,.
\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\lim_{s\to+\infty} \left(\frac{9}{8} \operatorname{arctg} \frac{s}{3} - \frac{3}{8} \operatorname{arctg} s \right) = \frac{9}{8}\,\frac{\pi}{2} - \frac{3}{8}\,\frac{\pi}{2} = \frac{3}{8}\,\pi\,.$$

Di conseguenza $c_2 = \dfrac{3}{8}\,\pi$ e risulta

$$\boxed{\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} e^{-sx} \frac{\sin^3 x}{x^3}\,\mathrm{d}x = {}& \frac{s^2}{8} \operatorname{arctg} \frac{s}{3} - \frac{3\,s^2}{8} \operatorname{arctg} s - \frac{9}{8} \operatorname{arctg} \frac{s}{3} + \frac{3}{8} \operatorname{arctg} s \\
& + \frac{\pi}{8}\,s^2 - \frac{3\,s}{8} \ln \frac{s^2+9}{s^2+1} + \frac{3}{8}\,\pi\,.
\end{aligned}}$$

In particolare, per $s = 0$ abbiamo

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 x}{x^3}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{8}\,\pi\,.$$

3) : a) **Soluzione usando le equazioni di Cauchy-Riemann.**

Posto $w = x+iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$, per la definizione di integrale curvilineo, abbiamo

$$\Phi(x+iy) = \int_{\partial^+ D_{(0,1)}} \frac{g(z)}{f(z) - (x+iy)}\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} \frac{i\,e^{it} g(e^{it})}{f(e^{it}) - (x+iy)}\,\mathrm{d}t\,.$$

La funzione $\phi : [0, 2\pi] \times \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$, definita ponendo

$$\phi(t, x, y) := \frac{i\,e^{it} g(e^{it})}{f(e^{it}) - (x+iy)}$$

per ogni $(t,x,y) \in [0,2\pi] \times \Omega$, è di classe $\mathcal{C}^\infty$ sul suo dominio. Siccome $[0,2\pi]$ è compatto, per dipendenza differenziabile dal parametro, anche Φ è di classe $\mathcal{C}^\infty$ e inoltre

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x+iy) = \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial x}\phi(t,x,y)\,\mathrm{d}t$$

e

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y}(x+iy) = \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial y}\phi(t,x,y)\,\mathrm{d}t\,.$$

In particolare Φ è di classe $\mathcal{C}^1$ e per dimostrare che è olomorfa basta far vedere che sono verificate le condizioni di Cauchy-Riemann, cioè che $\dfrac{\partial \Phi}{\partial x} = -i\,\dfrac{\partial \Phi}{\partial y}$. Abbiamo

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x+iy) &= \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial x}\phi(t,x,y)\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} -i\,\frac{\partial}{\partial y}\phi(t,x,y)\,\mathrm{d}t \\ &= -\,i\,\frac{\partial \Phi}{\partial y}(x+iy)\end{aligned}$$

(la seconda uguaglianza è vera perché, per t costante, la funzione ϕ è olomorfa in $x+iy$).

Soluzione imitando la dimostrazione della sviluppabilità locale delle funzioni olomorfe in serie di potenze.

Sia $w_o \in \Omega = \mathbb{C} \setminus f(\partial D_{(0,1)})$ arbitrario e scegliamo un $r > 0$ tale che il disco $D_{(w_o,2r)}$ sia ancora contenuto in Ω, cioè disgiunto a $f(\partial D_{(0,1)})$. In altre parole abbiamo

$$|f(z) - w_o| \geq 2\,r\,, \qquad z \in \partial D_{(0,1)}\,.$$

Risulta che possiamo sviluppare $\dfrac{g(z)}{f(z)-w}$ in una serie geometrica come segue :

$$\frac{g(z)}{f(z)-w} = \frac{g(z)}{(f(z)-w_o)-(w-w_o)}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{g(z)}{f(z)-w_o} \frac{1}{1-\dfrac{w-w_o}{f(z)-w_o}} \\
&= \frac{g(z)}{f(z)-w_o} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{w-w_o}{f(z)-w_o} \right)^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g(z)}{\big(f(z)-w_o\big)^{k+1}} \big(w-w_o\big)^k , \ w \in D_{(w_o,r)} \, , z \in \partial D_{(0,1)} \, ,
\end{aligned}
$$

dove la convergenza è totale perché abbiamo per qualsiasi $w \in D_{(w_o,r)}$ e $z \in \partial D_{(0,1)}$

$$
\begin{aligned}
&\left| \frac{g(z)}{\big(f(z)-w_o\big)^{k+1}} \big(w-w_o\big)^k \right| \\
&< \frac{1}{(2r)^{k+1}} r^k \sup_{\zeta \in \partial D_{(0,1)}} |g(\zeta)| \\
&= \frac{1}{2^{k+1} r} \sup_{\zeta \in \partial D_{(0,1)}} |g(\zeta)| \, , \qquad\qquad w \in D_{(w_o,r)} \, , z \in \partial D_{(0,1)}
\end{aligned}
$$

e la serie numerica $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1} r} \sup_{\zeta \in \partial D_{(0,1)}} |g(\zeta)|$ converge. Perciò possiamo integrare rispetto alla variabile z termine a termine ottenendo

$$
\begin{aligned}
\Phi(w) &= \int\limits_{\partial^+ D_{(0,1)}} \frac{g(z)}{f(z)-w} \, \mathrm{d}z \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \Bigg(\int\limits_{\partial^+ D_{(0,1)}} \frac{g(z)}{\big(f(z)-w_o\big)^{k+1}} \, \mathrm{d}z \Bigg) \big(w-w_o\big)^k , \quad w \in D_{(w_o,r)} \, .
\end{aligned}
$$

Concludiamo che ogni punto nel dominio Ω di Φ ha un intorno circolare nel quale Φ si sviluppa in una serie di potenze. In altre parole la funzione Φ è olomorfa.

b) Per ogni w in Ω sia $\phi_w : U \setminus f^{-1}(w) \longrightarrow \mathbb{C}$ la funzione definita da $\phi_w(z) := \dfrac{z f'(z)}{f(z)-w}$.

Se $w \in \Omega$ e $w \notin f(\overline{D_{(0,1)}})$ allora ϕ_w é una funzione olomorfa su un aperto contenente il disco $\overline{D_{(0,1)}}$. Pertanto, per il Teorema integrale di Cauchy, $\Phi(w) = \displaystyle\int_{\partial^+ D_{(0,1)}} \frac{g(z)}{f(z)-w}\,\mathrm{d}z = 0$.

Se $w \in f(D_{(0,1)})$, siccome f è iniettiva, la controimmagine di w tramite f consiste di un unico numero complesso $f^{-1}(w)$ e questo è contenuto in $D_{(0,1)}$. La funzione ϕ_w è allora olomorfa in $U \setminus \{f^{-1}(w)\}$ e per il Teorema dei residui abbiamo

$$\Phi(w) = \int_{\partial^+ D_{(0,1)}} \frac{zf'(z)}{f(z)-w}\,\mathrm{d}z = 2\pi i Res(\phi_w, f^{-1}(w))\,.$$

Siccome f è iniettiva, la funzione $f(z) - w$ ha uno zero semplice in $f^{-1}(w)$. Siccome $\dfrac{f'(z)}{f(z)-w}\,\mathrm{d}z$ è il differenziale logaritmico di $f(z)-w$, la funzione $\dfrac{f'(z)}{f(z)-w}$ ha un polo semplice in $f^{-1}(w)$ e si ha

$$Res\left(\frac{f'(z)}{f(z)-w}\,, f^{-1}(w)\right) = 1\,.$$

Ne segue che

$$Res(\phi_w\,, f^{-1}(w)) = Res\left(z\frac{f'(z)}{f(z)-w}\,, f^{-1}(w)\right) = f^{-1}(w)\,.$$

In conclusione, se $w \in f(D_{(0,1)})$, si ha $\Phi(w) = 2\pi i f^{-1}(w)$.

Osservazione. Questo esercizio ridimostra l'olomorfia della funzione inversa di una funzione olomorfa invertibile.

4) **:** A) Sia $\rho < r$ tale che $|z| < \rho$ per ogni $z \in I$. Per la teoria delle funzioni olomorfe sulle corone circolari sappiamo che esistono numeri complessi $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ tali che, per ogni $z \in \mathbb{C}$ con $|z| > \rho$, si ha

$$h(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n} z^{-n}$$

e (13)

$$\int_{\partial^+ D_{(0,r)}} h(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i\, a_{-1}\,.$$

Ne segue che, per ogni z non nullo contenuto nel disco aperto $D_{\left(0,\frac{1}{\rho}\right)}$ di centro 0 e raggio $\dfrac{1}{\rho}$, abbiamo

$$h\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^{-n} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n} z^n .$$

Quindi

$$\begin{aligned} \frac{1}{z^2}\, h\left(\frac{1}{z}\right) &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^{-n-2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n} z^{n-2} \\ &= \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} z^{-n} + a_{-1} z^{-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_{-n-2} z^n . \end{aligned}$$

Infine, per l'unicità dello sviluppo in serie di Laurent, otteniamo

$$Res\left(\frac{1}{z^2}\, h\left(\frac{1}{z}\right), 0\right) = a_{-1}$$

e, confrontando con (13), deduciamo il risultato desiderato.

B) La funzione k è definita ed olomorfa su $\mathbb{C}\setminus\{0,1,2,3\}$. Per il teorema dei residui, applicato al cerchio di centro 0 e raggio r con $r > 3$, abbiamo

$$\begin{aligned} & Res\,(k(z),0) + Res\,(k(z),1) + Res\,(k(z),2) + Res\,(k(z),3) \\ &= \frac{\displaystyle\int_{\partial^+ D_{(0,r)}} k(z)\; dz}{2\pi i} . \end{aligned} \tag{14}$$

Per il punto A) inoltre

$$\int_{\partial^+ D_{(0,r)}} k(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i\, Res\left(\frac{1}{z^2}\, k\left(\frac{1}{z}\right), 0\right)$$

e, siccome

$$\begin{aligned} \frac{1}{z^2}\, k\left(\frac{1}{z}\right) &= \frac{1}{z^2}\frac{(1+z)^4(1+2z)^3}{\frac{1}{z}(1-z)^3(1-2z)^2(1-3z)^2} \\ &= \frac{(1+z)^4(1+2z)^3}{z(1-z)^3(1-2z)^2(1-3z)^2} , \end{aligned}$$

$\dfrac{1}{z^2}\, k\left(\dfrac{1}{z}\right)$ ha un polo semplice in 0 e abbiamo

$$Res\left(\frac{1}{z^2}\, k\left(\frac{1}{z}\right), 0\right) = \lim_{z\to 0} \frac{(1+z)^4(1+2z)^3}{(1-z)^3(1-2z)^2(1-3z)^2} = 1\,.$$

Analogamente, siccome k ha un polo semplice in 0, abbiamo

$$\begin{aligned} Res\,(k(z), 0) &= \lim_{z\to 0} \frac{(z+1)^4(z+2)^3}{(z-1)^3(z-2)^2(z-3)^2} = \frac{2^3}{(-1)^3(-2)^2(-3)^2} \\ &= -\frac{2}{9}\,. \end{aligned}$$

In conclusione, sostituendo nell'equazione (14),

$$Res\,(k(z), 1) + Res\,(k(z), 2) + Res\,(k(z), 3) = 1 - \left(-\frac{2}{9}\right) = \frac{11}{9}\,.$$