NOME: ....   **MATRICOLA:** ....

Corso di Laurea in Matematica, A.A. 2014/2015
Analisi Reale e Complessa, Esame del 23.06.2015

1) Siano $a < b$ numeri reali ed $f : [a\,,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione crescente. Supponiamo che f è derivabile a destra quasi ovunque, cioè che esiste un insieme $E \subset [a\,,b]$ di misura esterna di Lebesgue nulla, contenente per convenienza a e b, tale che per ogni $x \in [a\,,b] \setminus E \subset (a\,,b)$ esiste la derivata destra

$$f_d'(x) := \lim_{0<\delta\to 0} \frac{f(x+\delta)-f(x)}{\delta} \in \mathbb{R}\,.$$

Definiamo $g : [a\,,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ tramite l'ugualità

$$g(x) := \begin{cases} f_d'(x) & \text{se } x \in [a\,,b] \setminus E\,, \\ 0 & \text{se } x \in E\,, \end{cases}$$

e le funzioni $g_k : [a\,,b] \longrightarrow \mathbb{R}\,,\ k \geq 1\,,$ tramite

$$g_k(x) := \begin{cases} \dfrac{k}{b-a}\left(f\left(x+\dfrac{b-a}{k}\right)-f(x)\right) & \text{per } x \in \left[a\,,b-\dfrac{b-a}{k}\right], \\ 0 & \text{per } x \in \left(b-\dfrac{b-a}{k}\,,b\right]. \end{cases}$$

Si verifichi :

α) $g_k(x) \longrightarrow g(x)$ quasi ovunque.

β) Le funzioni $g_k\,,\ k \geq 1\,,$ sono misurabili e positive.

γ) La funzione g è misurabile e positiva.

δ) Vale la disuguaglianza $\displaystyle\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \leq f(b)-f(a)\,,$ in particolare g è sommabile.

Suggerimento: Si calcoli esplicitamente $\displaystyle\int_a^b g_k(x)\,\mathrm{d}x$ e si usi il lemma di Fatou per $k \to \infty\,.$

2) Sia $F : \big(0\,,+\infty\big) \longrightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$F(s) := \int_0^{+\infty} e^{-sx}\,\frac{\sin^2 x}{x}\,\mathrm{d}x\,. \tag{*}$$

(i) Si dimostri che F è ben definita dalla formula (*) e che $\lim\limits_{s\to+\infty} F(s) = 0\,.$

(ii) Si verifichi che F è derivabile e si esprimi $F'(s)$ mediante un integrale dipendente dal parametro $s\,.$

(iii) Si calcolino esplicitamente $F'(s)$ ed $F(s)$ per ogni $s \in \big(0\,,+\infty\big)$.

3) a) Dati $q \in \mathbb{C}$ e $r \in \mathbb{R}_+$, sia $D_{q,r} \subset \mathbb{C}$ il disco aperto di centro q e raggio r e sia $\overline{D}_{q,r} \subset \mathbb{C}$ la sua chiusura.
Sia $f : D_{2,5} \setminus \overline{D}_{1,1} \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa.
Si mostri che esiste una succesione di polinomi $\{p_n\}$ convergente uniformemente a f sui compatti di $D_{2,5} \setminus \overline{D}_{1,1}$ se e solo se f si estende ad una funzione olomorfa su $D_{2,5}\,.$

b) Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ un aperto e sia $\big\{g_n : \Omega \to \overline{D}_{0,1}\big\}$ una successione di funzioni olomorfe convergente puntualmente. Sia $g : \Omega \to \overline{D}_{0,1}$ il limite puntuale della successione $\{g_n\}\,.$ Si dimostri che g è olomorfa e si stabilisca se la convergenza di $\{g_n\}$ su ogni compatto contenuto in Ω è necessariamente uniforme.

4) A) Si calcoli il residuo in 0 delle seguenti funzioni

$$h(z) = z^6 \cos\frac{1}{z^3} \quad ; \quad k(z) = \frac{\sin(z)}{1-(\cos(z))^2 - z^2} \quad ; \quad l(z) = \frac{1}{z^4 - z^6}\,.$$

B) Quali di queste funzioni ammettono una primitiva olomorfa nel loro dominio di definizione?

Soluzioni:

1) **:** α) Mostriamo che $g_k(x) \longrightarrow g(x)$ per ogni $x \in [a\,,b] \setminus E$.

Poiché x si trova in $(a\,,b)$, esiste un intero $k_o \geq 1$ tale che

$$x < b - \frac{b-a}{k_o}\,.$$

Allora

$$g_k(x) = \frac{k}{b-a}\left(f\left(x + \frac{b-a}{k}\right) - f(x)\right), \qquad k \geq k_o$$

D'altro canto, poiché $x \notin E$, abbiamo anche $g(x) = f'_d(x)$. Perciò

$$g(x) = f'_d(x) = \lim_{0<\delta\to 0} \frac{f(x+\delta) - f(x)}{\delta} = \lim_{k\to\infty} \frac{f\left(x + \frac{b-a}{k}\right) - f(x)}{\frac{b-a}{k}}$$

$$= \lim_{k_o\leq k\to\infty} \frac{k}{b-a}\left(f\left(x + \frac{b-a}{k}\right) - f(x)\right) = \lim_{k_o\leq k\to\infty} g_k(x)\,.$$

β) Sia l'intero $k \geq 1$ arbitrario.

Ricordiamo che le funzioni crescenti sono di Borel e quindi misurabili. In particolare f è misurabile e risulta che anche la funzione

$$h_k : \left[a\,, b - \frac{b-a}{k}\right] \ni x \longmapsto \frac{k}{b-a}\left(f\left(x + \frac{b-a}{k}\right) - f(x)\right)$$

è misurabile. Poiché g_k è uguale a h_k in $\left[a\,, b - \dfrac{b-a}{k}\right]$ e si annulla in $\left(b - \dfrac{b-a}{k}\,, b\right]$, per ogni insieme di Borel $B \subset \mathbb{R}$

$$g_k^{-1}(B) = \begin{cases} h_k^{-1}(B) & \text{se } 0 \notin B\,, \\ h_k^{-1}(B) \cup \left(b - \frac{b-a}{k}\,, b\right] & \text{se } 0 \in B\,, \end{cases}$$

è un insieme misurabile. Cosicché la funzione g_k è misurabile.

D'altro canto, siccome f è una funzione crescente, abbiamo per ogni $x \in \left[a\,, b - \dfrac{b-a}{k}\right]$

$$g_k(x) = \frac{k}{b-a}\left(f\Big(x+\frac{b-a}{k}\Big) - f(x)\right) \geq 0\,.$$

Per $x \in \left(b - \dfrac{b-a}{k}\,,\, b\right]$ vale ovviamente $g_k(x) = 0 \geq 0\,.$

$\gamma)$ g è misurabile quale limite quasi ovunque di una successione di funzioni misurabili :

> Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo e $h_k : I \longrightarrow \mathbb{R}\,,\, k \geq 1\,,$ una successione di funzioni misurabili che converge quasi ovunque a $h : I \longrightarrow \mathbb{R}\,.$ In altre parole, esiste un insieme $N \subset I$ di misura esterna di Lebesgue nulla tale che $h_k(x) \longrightarrow h(x)$ per ogni $x \in I \setminus N$.
>
> N essendo misurabile quale un insieme di misura esterna nulla, la sua funzione caratteristica χ_N è una funzione misurabile. Poiché $h\,\chi_{I\setminus N}$ è il limite puntuale della successione $h_k\,\chi_{I\setminus N}\,,\ k \geq 1\,,$ di funzioni misurabili, lei stessa è pure misurabile. Abbiamo quindi per ogni insieme di Borel $B \subset \mathbb{R}$
>
> $$\begin{aligned} h^{-1}(B) &= \Big(h^{-1}(B) \cap (I \setminus N)\Big) \cup \Big(h^{-1}(B) \cap N\Big) \\ &= \Big((h_k\,\chi_{I\setminus N})^{-1}(B) \cap (I \setminus N)\Big) \cup \Big(h^{-1}(B) \cap N\Big) \end{aligned}$$
>
> dove l'insieme $(h_k\,\chi_{I\setminus N})^{-1}(B) \cap (I \setminus N)$ è misurabile e l'insieme $h^{-1}(B) \cap N \subset N$ è di misura esterna nulla, quindi pure misurabile. Di conseguenza $h^{-1}(B)$ è misurabile per ogni insieme di Borel $B \subset \mathbb{R}\,.$

D'altro canto la positività di g è ovvia:

Siccome f è crescente, per $x \in [\,a\,,\,b\,] \setminus E \subset (\,a\,,\,b\,)$ abbiamo

$$\frac{f(x+\delta) - f(x)}{\delta} \geq 0\,, \qquad 0 < \delta < b - x$$

e di conseguenza

$$g(x) = f'_d(x) = \lim_{0<\delta\to 0} \frac{f(x+\delta) - f(x)}{\delta} \geq 0\,.$$

Se invece $x \in E$ allora, per la definizione di g , $g(x) = 0 \geq 0\,.$

δ) Tenendo conto della convergenza verificata in γ), il lemma di Fatou implica

$$\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \Big(\varliminf_{k\to\infty} g_k(x)\Big)\,\mathrm{d}x \leq \varliminf_{k\to\infty} \int_a^b g_k(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Ma gli integrali $\displaystyle\int_a^b g_k(x)\,\mathrm{d}x$ si calcolano facilmente :

$$\begin{aligned}\int_a^b g_k(x)\,\mathrm{d}x = & \int_a^{b-\frac{b-a}{k}} \frac{k}{b-a}\left(f\Big(x+\frac{b-a}{k}\Big) - f(x)\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{k}{b-a}\left(\int_{a+\frac{b-a}{k}}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^{b-\frac{b-a}{k}} f(x)\,\mathrm{d}x\right) \\ &= \frac{k}{b-a}\int_{b-\frac{b-a}{k}}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{k}{b-a}\int_a^{a+\frac{b-a}{k}} f(x)\,\mathrm{d}x\,.\end{aligned}$$

Cosicché

$$\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \leq \varliminf_{k\to\infty}\left(\frac{k}{b-a}\int_{b-\frac{b-a}{k}}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{k}{b-a}\int_a^{a+\frac{b-a}{k}} f(x)\,\mathrm{d}x\right)$$

e la formula $\displaystyle\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \leq f(b)-f(a)$ risulta se dimostriamo che valgono

$$\lim_{0<\delta\to 0}\frac{1}{\delta}\int_a^{a+\delta} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{a<x\to a} f(x) \geq f(a) \tag{1}$$

e

$$\lim_{0<\delta\to 0}\frac{1}{\delta}\int_{b-\delta}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{b>x\to b} f(x) \leq f(b)\,. \tag{2}$$

Dimostriamo solo (1), la dimostrazione di (2) essendo completamente simile.

Indichiamo $l_a := \lim_{a<x\to a} f(x) \geq f(a)\,.$

Poiché f è crescente, abbiamo $f(x) \geq l_a$ per ogni $a < x \leq b$ e risulta

$$\frac{1}{\delta}\int_a^{a+\delta} f(x)\,\mathrm{d}x \geq \frac{1}{\delta}\int_a^{a+\delta} l_a\,\mathrm{d}x = l_a\,, \qquad 0 < \delta < b-a\,,$$

$$\underline{\lim}_{0<\delta\to 0} \frac{1}{\delta}\int_a^{a+\delta} f(x)\,\mathrm{d}x \geq l_a\,. \tag{3}$$

D'altro canto sia $\varepsilon > 0$ arbitrario e scegliamo $0 < \delta_o < b-a$ tale che

$$f(x) \leq l_a + \varepsilon\,, \qquad a < x \leq a + \delta_o\,.$$

Risulta per ogni $0 < \delta < \delta_o$

$$\frac{1}{\delta}\int_a^{a+\delta} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{\delta}\int_a^{a+\delta} \big(l_a + \varepsilon\big)\,\mathrm{d}x = l_a + \varepsilon$$

e di conseguenza

$$\overline{\lim}_{0<\delta\to 0} \frac{1}{\delta}\int_a^{a+\delta} f(x)\,\mathrm{d}x \leq l_a + \varepsilon\,.$$

Poiché $\varepsilon > 0$ era arbitrario, risulta

$$\overline{\lim}_{0<\delta\to 0} \frac{1}{\delta}\int_a^{a+\delta} f(x)\,\mathrm{d}x \leq l_a\,. \tag{4}$$

Chiaramente (3) e (4) implicano (1).

Osservazione.

Per un teorema di Lebesgue, ogni funzione crescente $f : [\,a\,,\,b\,] \longrightarrow \mathbb{R}$ è derivabile quasi ovunque. Una dimostrazione particolarmente elegante (dovuta a F. Riesz) si trova nel libro

> Béla Sz.-Nagy:
> Introduction to real functions and orthogonal expansions,
> Oxford University Press, New York 1965,

nel Capitolo III, Sezioni 1.2 e 1.3.

Usando il risultato del compito precedente risulta che, per qualsiasi funzione crescente $f : [\, a\, ,\, b\,] \longrightarrow \mathbb{R}$, se $g : [\, a\, ,\, b\,] \longrightarrow \mathbb{R}$ è la funzione uguale alla derivata di f nei punti dove la derivata esiste ed a 0 negli altri punti, allora g è una funzione positiva sommabile e vale

$$\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \leq f(b) - f(a)\,.$$

Notiamo che la disuguaglianza di cui sopra diventa uguaglianza se e soltanto se f è *assolutamente continua* :

> Una funzione (reale o complessa) f definita su un intervallo $I \subset \mathbb{R}$ si chiama *assolutamente continua* se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che se $(a_j\, ,\, b_j)\,,\ 1 \leq j \leq k$, sono sottointervalli a due a due disgiunti di I con
>
> $$\sum_{j=1}^{k} (b_j - a_j) \leq \delta$$
>
> allora
>
> $$\sum_{j=1}^{k} \bigl| f(b_j) - f(a_j) \bigr| \leq \varepsilon\,.$$
>
> Chiaramente, se f è di Lipschitz con costante di Lipschitz $L \geq 0$ allora f è assolutamente continua :
>
> $$\sum_{j=1}^{k} \bigl| f(b_j) - f(a_j) \bigr| \leq L \sum_{j=1}^{k} (b_j - a_j)\,.$$
>
> Viceversa però non ogni funzione assolutamente continua è di Lipschitz, come mostra l'esempio $[\, 0\, ,\, 1\,] \ni x \longmapsto \sqrt{x}$ (la verifica è un esercizio).

Una dimostrazione si trova, per esempio, nel libro

> Béla Sz.-Nagy:
> Introduction to real functions and orthogonal expansions,
> Oxford University Press, New York 1965,

nel Capitolo V, Sezione 2.3.

2) **:** (i) È ben noto che

$$\left|\frac{\sin x}{x}\right| \leq 1\,, \qquad x > 0\,.$$

Perciò, per ogni $s > 0$, la funzione continua (quindi misurabile)

$$(0\,,+\infty) \ni x \longmapsto e^{-sx}\,\frac{\sin^2 x}{x}$$

ammette la maggiorazione

$$\left|e^{-sx}\,\frac{\sin^2 x}{x}\right| \leq e^{-sx}\,, \qquad x > 0 \tag{5}$$

con la funzione sommabile e^{-sx}. Risulta che anche essa è sommabile e di conseguenza la funzione F è ben definita.

La maggiorazione (5) di cui sopra serve anche al calcolo del limite di F all'infinito :

$$\big|F(s)\big| = \left|\int_0^{+\infty} e^{-sx}\,\frac{\sin^2 x}{x}\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_0^{+\infty}\left|e^{-sx}\,\frac{\sin^2 x}{x}\right|\mathrm{d}x \leq \int_0^{+\infty} e^{-sx}\mathrm{d}x = \frac{1}{s}$$

implica $\lim\limits_{s\to+\infty} F(s) = 0$.

(ii) Sia $\varepsilon > 0$ arbitrario. Siccome le funzioni

$$(\varepsilon\,,+\infty) \ni s \longmapsto e^{-sx}\,\frac{\sin^2 x}{x}\,, \quad x \in (0\,,+\infty)$$

sono derivabili e le derivate parziali

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(e^{-sx}\,\frac{\sin^2 x}{x}\right) = -\,e^{-sx}\sin^2 x$$

ammettono la maggiorazione

$$\left|\frac{\partial}{\partial s}\left(e^{-sx}\,\frac{\sin^2 x}{x}\right)\right| \leq e^{-\varepsilon x}\,, \quad x \in (0\,,+\infty)\,, s \in (\varepsilon\,,+\infty)$$

dove la funzione

$$[0\,,+\infty) \ni x \longmapsto e^{-\varepsilon x}$$

è sommabile, per il teorema sulla dipendenza derivabile da parametri reali la funzione F è derivabile in $(\varepsilon\,,+\infty)$ e vale la formula

$$F'(s) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial s}\Big(e^{-sx}\frac{\sin^2 x}{x}\Big)\mathrm{d}x = -\int_0^{+\infty} e^{-sx}\sin^2 x\,\mathrm{d}x\,, \quad s \in (\varepsilon\,,+\infty)\,.$$

Ma $\varepsilon > 0$ è arbitrario, perciò concludiamo che F è derivabile su tutto $(0\,,+\infty)$ ed abbiamo

$$F'(s) = -\int_0^{+\infty} e^{-sx}\sin^2 x\,\mathrm{d}x\,, \quad s \in (0\,,+\infty)\,. \tag{6}$$

(iii) Usando la formula (6) possiamo calcolare $F'(s)$ esplicitamente per ogni $s \in (0\,,+\infty)$.

A questo fine ci serve la primitiva di $e^{-sx}\sin^2 x$.

Tramite integrazione per parti otteniamo

$$\begin{aligned}
\int e^{-sx}\sin^2 x\,\mathrm{d}x &= \int \sin^2 x\,\mathrm{d}\frac{e^{-sx}}{-s} \\
&= -\,\frac{e^{-sx}\sin^2 x}{s} + \frac{2}{s}\int e^{-sx}(\sin x)(\cos x)\,\mathrm{d}x \\
&= -\,\frac{e^{-sx}\sin^2 x}{s} + \frac{2}{s}\int (\sin x)(\cos x)\,\mathrm{d}\frac{e^{-sx}}{-s} \\
&= -\,\frac{e^{-sx}\sin^2 x}{s} - \frac{2\,e^{-sx}(\sin x)(\cos x)}{s^2} \\
&\qquad + \frac{2}{s^2}\int e^{-sx}\big(\underbrace{\cos^2 x - \sin^2 x}_{=\,1-2\sin^2 x}\big)\mathrm{d}x \\
&= -\,\frac{e^{-sx}\sin^2 x}{s} - \frac{2\,e^{-sx}(\sin x)(\cos x)}{s^2} \\
&\qquad + \frac{2}{s^2}\int e^{-sx}\,\mathrm{d}x - \frac{4}{s^2}\int e^{-sx}\sin^2 x\,\mathrm{d}x \\
&= -\,\frac{e^{-sx}\sin^2 x}{s} - \frac{2\,e^{-sx}(\sin x)(\cos x)}{s^2} - \frac{2\,e^{-sx}}{s^3} \\
&\qquad - \frac{4}{s^2}\int e^{-sx}\sin^2 x\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

e risulta

$$\int e^{-sx}\sin^2 x\mathrm{d}x = -\,\frac{e^{-sx}}{s^2+4}\Big(s\sin^2 x + 2\,(\sin x)(\cos x) + \frac{2}{s}\Big). \tag{7}$$

Usiamo ora (6) e (7) per il calcolo di $F'(s)$:

$$\begin{aligned} F'(s) &= \frac{e^{-sx}}{s^2+4}\left(s\sin^2 x + 2\,(\sin x)(\cos x) + \frac{2}{s}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=+\infty} \\ &= -\,\frac{2}{(s^2+4)\,s}\,. \end{aligned} \tag{8}$$

Per (8) la funzione F è una primitiva di

$$-\,\frac{2}{(s^2+4)\,s}\,.$$

Poiché lo sviluppo di questa funzione razionale in fratti semplici e

$$-\,\frac{2}{(s^2+4)\,s} = \frac{1}{2}\left(\frac{s}{s^2+4} - \frac{1}{s}\right),$$

otteniamo

$$F(s) = \frac{1}{4}\ln(s^2+4) - \frac{1}{2}\ln s + c = \frac{1}{4}\ln\frac{s^2+4}{s^2} + c$$

con c una costante. Per trovare c usiamo il fatto che $\lim\limits_{s\to+\infty} F(s) = 0$:

$$0 = \lim_{s\to+\infty} F(s) = \frac{1}{4}\ln 1 + c = c$$

implica

$$F(s) = \frac{1}{4}\ln\frac{s^2+4}{s^2}\,. \tag{9}$$

Osservazione.

Usando (9) possiamo calcolare anche l'integrale

$$G(s) := \int_0^{+\infty} e^{-sx}\,\frac{\sin^2 x}{x^2}\,\mathrm{d}x\,, \quad s \geq 0\,.$$

G è una funzione ben definita e continua su $[\,0\,,\,+\infty)$. Infatti, poiché

- le funzioni

  $$(0\,,\,+\infty) \ni x \longmapsto e^{-sx}\,\frac{\sin^2 x}{x^2}\,, \qquad s \geq 0$$

  sono continue, quindi misurabili,

- le funzioni
$$[0\,,+\infty)\ni s\longmapsto e^{-sx}\frac{\sin^2 x}{x^2}\,,\qquad x>0$$
sono continue
- e vale la maggiorazione uniforme
$$\left|e^{-sx}\frac{\sin^2 x}{x^2}\right|\leq g(x):=\begin{cases}1 & \text{per } 0<x<\dfrac{\pi}{2}\\ \dfrac{1}{x^2} & \text{per } x\geq\dfrac{\pi}{2}\end{cases}\,,\quad x>0\,,\,s\geq 0\,,$$
dove la funzione g è sommabile su $(0\,,+\infty)$,

possiamo applicare il teorema sulla dipendenza continua da parametri reali.

Poi, usando il teorema sula dipendenza derivabile da parametri reali, posiamo verificare che G è derivabile su $(0\,,+\infty)$ e
$$G'(s)=-F(s)\,,\qquad s>0\,.$$
A questo fine basta osservare che le funzioni
$$(0\,,+\infty)\ni s\longmapsto e^{-sx}\frac{\sin^2 x}{x^2}\,,\quad x>0$$
sono derivabili e la derivata parziale
$$\frac{\partial}{\partial s}\left(e^{-sx}\frac{\sin^2 x}{x^2}\right)=-\,e^{-sx}\frac{\sin^2 x}{x}$$
ammette la maggiorazione
$$\left|\frac{\partial}{\partial s}\left(e^{-sx}\frac{\sin^2 x}{x^2}\right)\right|\leq e^{-\varepsilon x}\,,\quad x\in(0\,,+\infty)\,,s\in(\varepsilon\,,+\infty)\,,\varepsilon>0\,,$$
dove la funzione $(0\,,+\infty)\ni x\longmapsto e^{-\varepsilon x}$ è sommabile.

Per di più, poiché
$$\big|G(s)\big|=\left|\int_0^{+\infty}e^{-sx}\frac{\sin^2 x}{x^2}\,\mathrm{d}x\right|\leq\int_0^{+\infty}\left|e^{-sx}\frac{\sin^2 x}{x^2}\right|\mathrm{d}x\leq\int_0^{+\infty}e^{-sx}\mathrm{d}x=\frac{1}{s}\,,$$
abbiamo anche $\lim\limits_{s\to+\infty}G(s)=0$.

Ora, sapendo che G è una primitiva di $-F$ e usando (9), otteniamo

$$\begin{aligned} G(s) &= -\frac{1}{4}\int \ln\frac{s^2+4}{s^2}\,\mathrm{d}s \\ &= -\frac{s}{4}\ln\frac{s^2+4}{s^2}+\frac{1}{4}\int\Big(s\,\frac{s^2}{s^2+4}\,\frac{2\,s\,s^2-2\,s\,(s^2+4)}{s^4}\Big)\mathrm{d}s \\ &= -\frac{s}{4}\ln\frac{s^2+4}{s^2}-\int\frac{2}{s^2+4}\,\mathrm{d}s \\ &= -\frac{s}{4}\ln\frac{s^2+4}{s^2}-\operatorname{arctg}\frac{s}{2}+c \end{aligned}$$

con c una opportuna costante che dobbiamo calcolare. Sapendo però che $\lim\limits_{s\to+\infty} G(s)=0$, deduciamo :

$$c=\lim_{s\to+\infty}\left(\frac{s}{4}\ln\frac{s^2+4}{s^2}+\operatorname{arctg}\frac{s}{2}\right)=\frac{\pi}{2}+\lim_{s\to+\infty}\frac{s}{4}\ln\frac{s^2+4}{s^2}\,.$$

Ma, usando la regola di de l'Hôpital, otteniamo

$$\begin{aligned} \lim_{s\to+\infty}\frac{s}{4}\ln\frac{s^2+4}{s^2} &= \lim_{0<t\to 0}\frac{1}{4\,t}\ln\frac{\dfrac{1}{t^2}+4}{\dfrac{1}{t^2}}=\lim_{0<t\to 0}\frac{1}{4\,t}\ln(1+4\,t^2) \\ &= \lim_{0<t\to 0}\frac{1}{4}\,\frac{8\,t}{1+4\,t^2}=0\,. \end{aligned}$$

Di conseguenza $c=\dfrac{\pi}{2}$ e risulta

$$\boxed{\int\limits_0^{+\infty} e^{-sx}\,\frac{\sin^2 x}{x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\frac{s}{2}-\frac{s}{4}\ln\frac{s^2+4}{s^2}\,,\qquad s\geq 0\,.}$$

In particolare, per $s=0$ abbiamo

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}-\lim_{0<s\to 0}\frac{s}{4}\ln\frac{s^2+4}{s^2}=\frac{\pi}{2}\,.$$

3) : $a)$ Se f ammette una estensione olomorfa $\widetilde{f}:D_{2,5}\longrightarrow\mathbb{C}$ allora lo sviluppo in serie di Taylor di $\widetilde{f}$ intorno a 2 ha raggio di convergenza almeno pari a 5 e le sue somme parziali forniscono la successione di polinomi convergente uniformemente sui compatti di $D_{2,5}$.

Per provare l'altra implicazione poniamo $C := \overline{D}_{2,4} \setminus D_{2,3}$. Se $\{p_n\}$ converge uniformemente a f sui compatti del dominio $D_{2,5} \setminus \overline{D}_{1,1}$, allora f è uniformemente di Cauchy su C. Per il principio del massimo modulo $\{p_n\}$ è uniformemente di Cauchy su tutto $\overline{D}_{2,4}$. Quindi $\{p_n\}$ converge uniformemente ad una funzione $\widehat{f} : \overline{D}_{2,4} \longrightarrow \mathbb{C}$. Inoltre $\widehat{f}$ è olomorfa per il teorema di Weierstrass. Essendo limiti della stessa succesione di polinomi, le funzioni f ed $\widehat{f}$ coincidono nell'intersezione dei loro domini. Pertanto esiste $\widetilde{f} : D_{2,5} \to \mathbb{C}$, olomorfa, che estende entrambe.

b) $\{g_n\}$ è una successione di funzioni olomorfe uniformemente limitata in modulo dalla costante 1 . Per il teorema di Montel esiste una sotto-successione $\{g_{n_k}\}$ di $\{g_n\}$ convergente uniformemente sui compatti di Ω . Per il teorema di Weierstrass, il limite di questa sottosuccesione è una funzione olomorfa e, siccome la sottosuccessione $\{g_{n_k}\}$ di $\{g_n\}$ converge puntualmente a g, tale limite è proprio g .

Inoltre la convergenza della successione stessa $\{g_n\}$ è uniforme su ogni compatto di Ω . Per mostrarlo ricordiamo, dalla teoria vista a lezione, che l'equilimitatezza di $\{g_n\}$ sui compatti di Ω implica l'equicontinuità di $\{g_n\}$ sui compatti di Ω .

Per completezza ridimostriamo l'equicontinuità $\{g_n\}$ sui compatti di Ω in questo caso particolare.

Dato un compatto $K \subset \Omega$, indichiamo con $\operatorname{dist}(K, \mathbb{C} \setminus \Omega)$ la distanza di K dal complementare di Ω e poniamo $d := \dfrac{1}{3} \operatorname{dist}(K, \mathbb{C} \setminus \Omega)$. Se w_1 e w_2 sono punti di K che distano meno di d , abbiamo $w_2 \in \overline{D}_{w_1,2d} \subset \Omega$. Per la formula di Cauchy otteniamo

$$\begin{aligned}
\big|g_n(w_2) - g_n(w_1)\big| &= \frac{1}{2\pi}\left| \int\limits_{\partial^+ D_{w_1,2d}} \frac{g_n(z)}{z - w_1}\,\mathrm{d}z - \int\limits_{\partial^+ D_{w_1,2d}} \frac{g_n(z)}{z - w_2}\,\mathrm{d}z \right| \\
&= \frac{1}{2\pi}\left| (w_2 - w_1) \int\limits_{\partial^+ D_{w_1,2d}} \frac{g_n(z)}{(z - w_1)(z - w_2)}\,\mathrm{d}z \right| .
\end{aligned}$$

Siccome w_2 dista da w_1 meno di d , abbiamo $\operatorname{dist}(w_2, \partial D_{w_1,2d}) > d$ e, siccome $|g_n(z)| \leq 1$ per ogni $z \in \Omega$, otteniamo

$$\frac{1}{2\pi}\left|(w_2-w_1)\int\limits_{\partial^+ D_{w_1,2d}}\frac{g_n(z)}{(z-w_1)(z-w_2)}\,\mathrm{d}z\right| \le \frac{1}{2\pi}\,\frac{4\pi d}{2d^2}\,\big|w_2-w_1\big|$$
$$= \frac{1}{d}\,\big|w_2-w_1\big|\,.$$

Quindi, fissato un numero reale strettamente positivo ϵ, per ogni w_1, w_2 in K e tali che $|w_2 - w_1| < \mathrm{Min}\,(d, d\epsilon)$, si ha

$$\big|\,g_n(w_2) - g_n(w_1)\big| < \epsilon \text{ per ogni } n \in \mathbb{N}\,.$$

Cioè $\{g_n\}$ è una successione di funzioni equicontinua.

Mostriamo ora la convergenza uniforme di $\{g_n\}$ su ogni sottoinsieme compatto $K \subset \Omega$.

Usando l'equicontinuità di $\{g_n\}$ su K , per ogni $\epsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ tale che, se $w_1, w_2 \in K$ e $|w_2 - w_1| < \delta$, allora

$$|g_n(w_2) - g_n(w_1)| < \frac{\epsilon}{3} \text{ per ogni } n \in \mathbb{N}\,.$$

Siccome g è limite puntuale di $\{g_n\}$, abbiamo anche

$$|g(w_2) - g(w_1)| \le \frac{\epsilon}{3}\,.$$

Inoltre, per compattezza di K, esiste un sottoinsieme finito $I \subset K$ tale che la distanza di ogni punto di K da I è strettamente minore di δ . Quindi per ogni $z \in K$ possiamo scegliere $p_z \in I$ tale che $|z - p_z| < \delta$.

Siccome I è finito e $\{g_n\}$ converge puntualmente a g , possiamo anche scegliere un $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $|g(p) - g_n(p)| < \dfrac{\epsilon}{3}$ per ogni $p \in I$ e per ogni $n > n_0$.

Se $n > n_0$ abbiamo per ogni $z \in K$

$$\begin{aligned}|g(z) - g_n(z)| \le\ & |g(z) - g(p_z)| + |g(p_z) - g_n(p_z)| + |g_n(p_z) - g_n(z)| \\ <\ & \epsilon\ :\end{aligned}$$

Infatti il primo e il terzo addendo della disuguaglianza sono minori o uguali a $\dfrac{\epsilon}{3}$ perché $|z - p_z| < \delta$ e il secondo è minore di $\dfrac{\epsilon}{3}$ perché $n > n_0$.

Quindi la successione $\{g_n\}$ converge a g uniformemente su K.

Osservazione.

Se $\{g_n\}$ è una successione di funzioni olomorfe su un aperto $\Omega \subset \mathbb{C}$, che converge puntualmente ed è uniformemente limitata, allora $\{g_n\}$ pur essendo uniformemente convergente su ogni compatto di Ω, non è necessariamente uniformemente convergente sull'intero Ω.

Sia, per esempio, $g : D_{1,1} \longrightarrow \mathbb{C}$ definita da

$$g(z) := e^{-\frac{1}{z}}, \qquad z \in D_{1,1}$$

e consideriamo la successione $g_n : D_{1,1} \longrightarrow \mathbb{C}$ definita tramite

$$g_n(1+w) := g\Big(1 + (1-n^{-1})w\Big) = e^{-\frac{1}{1+(1-n^{-1})w}}, \qquad w \in D_{0,1}.$$

Chiaramente, $\{g_n\}$ è una successione di funzioni olomorfe, convergente puntualmente a g. La successione $\{g_n\}$ è anche uniformemente limitata perché la funzione g è limitata :

Infatti, siccome abbiamo per ogni $w \in D_{0,1}$

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\,\frac{1}{1+w} &= \mathrm{Re}\,\frac{1+\overline{w}}{|1+w|^2} = \frac{1+\mathrm{Re}\,w}{|1+w|^2} = \frac{1+\mathrm{Re}\,w}{(1+w)(1+\overline{w})} \\ &= \frac{1+\mathrm{Re}\,w}{1+w+\overline{w}+|w|^2} = \frac{1+\mathrm{Re}\,w}{1+|w|^2+2\mathrm{Re}\,w} \\ &= \frac{1}{2}\underbrace{\frac{2+2\mathrm{Re}\,w}{1+|w|^2+2\mathrm{Re}\,w}}_{\geq 1} \\ &\geq \frac{1}{2},\end{aligned} \tag{10}$$

vale

$$\big|g(1+w)\big| = \Big|e^{-\frac{1}{1+w}}\Big| = e^{-\mathrm{Re}\,\frac{1}{1+w}} \leq e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

Però $\{g_n\}$ non converge uniformemente su $D_{1,1}$.

Infatti, ogni g_n si estende ad una funzione continua $\widetilde{g}_n$ sulla chiusura $\overline{D}_{1,1}$ di $D_{1,1}$ e se la successione $\{g_n\}$ convergesse uniformemente su $D_{1,1}$, allora la successione $\{\widetilde{g}_n\}$ convergerebbe uniformemente su $\overline{D}_{1,1}$ ad una funzione $\widetilde{g}$ che sarebbe chiaramente estensione continua di g su $\overline{D}_{1,1}$.

Se $0 \neq z \in \partial D_{1,1}$, cioè se $z = 1+w$ con $-1 \neq w \in \mathbb{C}$ e $|w| = 1$, allora

$$\widetilde{g}(z) = \lim_{n\to\infty} \widetilde{g}_n(z) = \lim_{n\to\infty} e^{-\frac{1}{1+(1-n^{-1})w}} = e^{-\frac{1}{1+w}}$$

e, siccome per (10) abbiamo

$$\mathrm{Re}\frac{1}{1+w} = \frac{1}{2}\,\frac{2+2\mathrm{Re}\,w}{1+|w|^2+2\mathrm{Re}\,w} = \frac{1}{2}\,\frac{2+2\mathrm{Re}\,w}{1+1+2\mathrm{Re}\,w} = \frac{1}{2}\,,$$

risulta

$$\big|\widetilde{g}(z)\big| = e^{-\mathrm{Re}\frac{1}{1+w}} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}\,.$$

Per la continuità di $\widetilde{g}$ in 0 risulterebbe quindi

$$\big|\widetilde{g}(0)\big| = \lim_{\partial D_{1,1}\setminus\{0\}\ni z\to 0} \big|\widetilde{g}(z)\big| = \frac{1}{\sqrt{e}}\,. \tag{11}$$

Ma nello stesso tempo dovremmo avere anche

$$\widetilde{g}(0) = \lim_{k\to\infty} \widetilde{g}\left(\frac{1}{k}\right) = \lim_{k\to\infty} g\left(\frac{1}{k}\right) = \lim_{k\to\infty} e^{-k} = 0\,,$$

in contraddizione con (11).

4) **:** *A*) **La funzione** h :

Siccome $\cos(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}$ per ogni $z\in\mathbb{C}$, abbiamo

$$\begin{aligned} h(z) = z^6\cos\frac{1}{z^3} &= z^6\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{-6n}}{(2n)!} \\ &= z^6 - \frac{1}{2} + \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{-6(n-1)}}{(2n)!} \end{aligned}$$

per ogni $0\neq z\in\mathbb{C}$. Per l'unicità dello sviluppo in serie di Laurent, siccome il termine di grado -1 non compare in questa espressione, il residuo di h in 0 è nullo.

La funzione k :

Se k ha un polo di ordine ≤ 4 in 0 e se

$$k(z) = \frac{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + o(z^3)}{z^4} \quad \text{per } z\to 0\,,$$

allora $Res(k,0) = a_3$.

Abbiamo

$$\cos(z) = 1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{24} - \frac{z^6}{720} + o(z^7)$$

per $z \to 0$. Ne segue che

$$\begin{aligned}\cos^2(z) &= 1 - z^2 + \frac{z^4}{4} + \frac{z^4}{12} - \frac{z^6}{360} - \frac{z^6}{24} + o(z^7) \\ &= 1 - z^2 + \frac{z^4}{3} - \frac{2\,z^6}{45} + o(z^7)\end{aligned}$$

per $z \to 0$. Quindi

$$1 - \cos^2(z) - z^2 = -\frac{1}{3}\, z^4 \left(1 - \frac{2}{15} z^2 + o(z^3)\right)$$

per $z \to 0$. Ma, usando al serie geometrica,

$$\frac{1}{1 - \frac{2}{15}\, z^2 + o(z^3)} = 1 + \frac{2}{15}\, z^2 + o(z^3)$$

per $z \to 0$. Perciò

$$\begin{aligned}k(z) &= \frac{\sin(z)}{1 - (\cos(z))^2 - z^2} \\ &= -\,3\,\frac{\left(z - \frac{z^3}{3!} + o(z^3)\right)\left(1 + \frac{2}{15}\, z^2 + o(z^3)\right)}{z^4} \\ &= \frac{-3\,z + \frac{z^3}{10} + o(z^3)}{z^4}\end{aligned}$$

per $z \to 0$. Ne concludiamo che $Res(k,0) = \dfrac{1}{10}$.

La funzione l:

Abbiamo infine

$$l(z) = \frac{1}{z^4 - z^6} = \frac{1}{z^4(1 - z^2)} = \frac{1 + z^2 + o(z^3)}{z^4}$$

per $z \to 0$. Quindi anche in questo caso $Res(l,0) = 0$.

B) La funzione k ha residuo non nullo in 0, quindi la 1-forma $k(z)\,\mathrm{d}z$ non è esatta e quindi k non ammette una primitiva olomorfa nel suo dominio.

La funzione l ha un polo semplice in 1 (ed un altro in -1), pertanto ha residuo non nullo in 1 e, come nel caso di k, non può ammettere primitiva olomorfa nel suo dominio.

Infine h è olomorfa su $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Siccome h ha residuo nullo in 0, dalla teoria sviluppata a lezione, si deduce che h ammette primitiva olomorfa nel suo dominio.

Alternativamente si può trovare esplicitamente una primitiva tramite integrazione termine a termine dell'espressione seguente, trovata nello svolgimento della parte A) :

$$h(z) = z^6 - \frac{1}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{-6(n-1)}}{(2n)!} \,.$$

Una primitiva olomorfa ϕ di h su $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ è quindi data da

$$\begin{aligned}\phi(z) &= \frac{z^7}{7} - \frac{z}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{-6(n-1)+1}}{\big(-6(n-1)+1\big)(2n)!} \\ &= \frac{z^7}{7} - \frac{z}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{7-6n}}{(7-6n)(2n)!} \,.\end{aligned}$$