NOME: .... **MATRICOLA:** ....

Corso di Laurea in Matematica, A.A. 2013/2014
Analisi Reale e Complessa, Esame del 24.01.2014

1) Sia $f(x)$ la prima cifra decimale di $x \in \big[\,0\,,1\big)$, cioè la parte intera di $10\,x$ (in altre parole $f(x)$ è il più grande intero k soddisfacente $k \leq 10\,x$).

(i) Si verifichi che $f : \big[\,0\,,1\big) \longrightarrow \big[\,0\,,+\infty\big)$ è una funzione di Borel semplice.

(ii) Si calcoli

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

2) (a) È sommabile la funzione $\big(\,0\,,\pi\big) \ni x \longmapsto -\ln(\sin x) \in \big[\,0\,,+\infty\big)$?

(b) Si verifichi che la formula

$$F(s) := \int_0^\pi \ln\big(1 - 2\,s\cos x + s^2\big)\,\mathrm{d}x\,, \qquad s \in \mathbb{R}$$

definisce una funzione continua $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\,.$

(c) Si dimostri che la funzione F di cui sopra è derivabile in ciascuno degli intervalli

$$\big(-\infty\,,-1\big)\,, \quad \big(-1\,,1\big)\,, \quad \big(1\,,+\infty\big)$$

e si esprima la derivata $F'(s)$ mediante un integrale dipendente dal parametro $s\,.$

(d) Si calcoli $F'(s)$ per ogni $s \in \mathbb{R}\,, |s| \neq 1\,.$

3) Esibire una funzione olomorfa limitata non costante $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ oppure dimostrare che ogni funzione olomorfa limitata $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ è costante in ciascuno dei seguenti casi :

$A)$ $\Omega := \mathbb{C} \setminus \left(\left\{ \frac{1}{k} \right\}_{k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \cup \{0\} \right)$,

$B)$ $\Omega = \big\{ z \in \mathbb{C} : \; \Im(z) > 0 \big\}$,

$\Big($**Suggerimento:** si cerchi tra le funzioni del tipo $\frac{z-a}{z-b}$.$\Big)$

$C)$ $\Omega := \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$,

$D)$ $\Omega := \mathbb{C} \setminus [0,1]$.

4) Calcolare

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2 \sqrt{x}}{x^4 + 2x^2 + 1} \, \mathrm{d}x$$

usando il teorema dei residui.

Suggerimento: Detta s la semiretta immaginaria negativa chiusa, si estenda la funzione integranda ad una funzione olomorfa su $\mathbb{C} \setminus s$ e si integri su opportuni cammini contenuti in $\mathbb{C} \setminus s$.

Soluzioni:

1) **:** (i) Poiché $0 \leq 10x < 10$, $f(x)$ è uguale ad uno degli interi

$$0\,,1\,,2\,,3\,,4\,,5\,,6\,,7\,,8\,,9\,.$$

Per un $k \in \{0\,,1\,,2\,,3\,,4\,,5\,,6\,,7\,,8\,,9\}$ abbiamo $f(x) = k$ esattamente quando

$$k \leq 10x < k+1 \iff \frac{k}{10} \leq x < \frac{k+1}{10}\,.$$

Di conseguenza

$$f(x) = \sum_{k=0}^{9} k\,\chi_{\left[\frac{k}{10}\,,\,\frac{k+1}{10}\right)} \tag{*}$$

dove $\chi_{\left[\frac{k}{10}\,,\,\frac{k+1}{10}\right)}$ è la funzione caratteristica dell'intervallo $\left[\frac{k}{10}\,,\,\frac{k+1}{10}\right)$. Poiché gli intervalli sono insieme di Borel, risulta che f è una funzione di Borel semplice.

(ii) Per (*) abbiamo

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{9} k\left(\frac{k+1}{10} - \frac{k}{10}\right) = \frac{1}{10}\sum_{k=0}^{9} k = \frac{45}{10} = \frac{9}{2}\,.$$

2) **:** (a) La funzione

$$\varphi : (0\,,\pi) \ni x \longmapsto -\ln(\sin x) \in [0\,,+\infty)$$

è continua e quindi misurabile. Poiché

$$\int_{\pi/2}^{\pi} \ln(\sin x)\,\mathrm{d}x \overset{x=\pi-y}{=} \int_0^{\pi/2} \ln\big(\sin(\pi-y)\big)\,\mathrm{d}y = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin y)\,\mathrm{d}y$$

e quindi

$$\int_0^{\pi}\Big(-\ln(\sin x)\Big)\mathrm{d}x = 2\int_0^{\pi/2}\Big(-\ln(\sin x)\Big)\mathrm{d}x\,,$$

la sommabilità di φ è equivalente a

$$\int_0^{\pi/2} \Big(-\ln(\sin x)\Big)\,\mathrm{d}x < +\infty\,.$$

Per provare questa finitezza e quindi la sommabilità di φ, possiamo procedere in più modi.

Primo modo.

Maggioriamo la funzione

$$\big(0\,,\pi/2\big) \ni x \longmapsto -\ln(\sin x)$$

con una funzione notoriamente sommabile.

A questo fine cerchiamo di trovare una costante $c > 0$ tale che

$$\sin x \geq c\,x\,, \qquad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\,.$$

Troviamo $c = \dfrac{2}{\pi}$:

Per un $c > 0$ qualsiasi, consideriamo la funzione

$$\psi : \big[0\,,\pi/2\big] \ni x \longmapsto \sin x - c\,x\,.$$

Poiché la derivata

$$\psi'(x) = \cos x - c$$

è decrescente in $\big(0\,,\pi/2\big)$, ψ è concava e risulta

$$\psi(x) \geq \min\big(\psi(0)\,,\psi(\pi/2)\big) = \min\Big(0\,,1 - c\cdot\pi/2\Big)$$

per ogni $0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}$.

Di conseguenza, con $c = \dfrac{2}{\pi}$ otteniamo

$$\psi(x) \geq 0\,, \qquad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\,,$$

cioè

$$\sin x \geq \frac{2}{\pi}\,x\,, \qquad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\,.$$

Ora

$$\sin x \geq \frac{2}{\pi}\,x\,, \qquad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

implica

$$0 \le -\ln(\sin x) \le \ln\frac{\pi}{2} - \ln x\,, \qquad 0 < x \le \frac{\pi}{2}$$

dove la funzione $\big(-\ln x\big)$ è sommabile in $\big(0\,,\pi/2\big)$:

Poiché $x - x\ln x$ è una primitiva di $\big(-\ln x\big)$, abbiamo

$$\int\limits_0^{\pi/2} \big(-\ln x\big)\mathrm{d}x = \big(x - x\ln x\big)\Big|_{x=0}^{x=\pi/2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\ln\frac{\pi}{2} < +\infty\,.$$

Secondo modo.

Integrando per parti otteniamo

$$\begin{aligned}\int\limits_0^{\pi/2} \Big(-\ln(\sin x)\Big)\mathrm{d}x &= -x\ln(\sin x)\Big|_{x=0}^{x=\pi/2} + \int\limits_0^{\pi/2} x\,\frac{\cos x}{\sin x}\,\mathrm{d}x \\ &= \int\limits_0^{\pi/2} \frac{x}{\operatorname{tg} x}\,\mathrm{d}x\,.\end{aligned}$$

Siccome $x < \operatorname{tg} x$ per $0 < x < \pi/2$, risulta

$$\int\limits_0^{\pi/2} \Big(-\ln(\sin x)\Big)\mathrm{d}x = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{x}{\operatorname{tg} x}\,\mathrm{d}x \le \int\limits_0^{\pi/2} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} < +\infty\,.$$

(b) Per ogni $s \in \mathbb{R}$ ed ogni $0 < x < \pi$ abbiamo

$$1 - 2\,s\,\cos x + s^2 \le 1 + 2\,|s| + s^2 = (1 + |s|)^2$$

e

$$\begin{aligned}1 - 2\,s\cos x + s^2 &= \sin^2 x + \cos^2 x - 2\,s\cos x + s^2 \\ &= \sin^2 x + (\cos x - x)^2 \\ &\ge \sin^2 x\,,\end{aligned}$$

perciò

$$0 \ge 2\ln(\sin x) \le \ln\big(1 - 2\,s\cos x + s^2\big) \le 2\ln(1 + |s|\,)\,.$$

Cosicché

$$\Big|\ln\big(1-2\,s\cos x+s^2\big)\Big| \leq \underbrace{2\max\Big(-\ln(\sin x)\,,\ln(1+|s|\,)\Big)}_{=:\,g_s(x)} \qquad (**)$$
$$\text{per ogni } \ 0<x<\pi \ \text{ ed ogni } \ s\in\mathbb{R}$$

e, per quanto visto nel punto (i), le funzioni g_s sono sommabili.

Risulta la sommabilità delle funzioni continue

$$\big(0\,,\pi\big)\ni x\longmapsto \ln\big(1-2\,s\cos x+s^2\big)\in\mathbb{R}\,,\qquad s\in\mathbb{R}$$

e perciò la funzione

$$F:\mathbb{R}\ni s\longmapsto \int_0^\pi \ln\big(1-2\,s\cos x+s^2\big)\,\mathrm{d}x\in\mathbb{R}$$

è ben definita.

Inoltre, per ogni $s_o>0$, la continuità delle funzioni

$$\mathbb{R}\ni s\longmapsto \ln\big(1-2\,s\cos x+s^2\big)\in\mathbb{R}\,,\qquad 0<x<\pi$$

e la maggiorazione uniforme

$$\Big|\ln\big(1-2\,s\cos x+s^2\big)\Big|\leq g_{s_o}(x)\,,\qquad 0<x<\pi\,,\ |s|\leq s_o\,,$$

che risulta da (**), implicano la continuità di F in $[-s_o\,,s_o]$. Siccome $s_o>0$ era arbitrario, concludiamo che F è continua su tutto $\mathbb{R}$.

Osservazione 1.

La continuità di F nei punti $s\neq\pm1$ è più facile da dimostrare, senza usare (i).

Infatti, per ogni $s\in\mathbb{R}$ con $|s|\neq1$ e per ogni $0<x<\pi/2$ abbiamo

$$1-2\,s\,\cos x+s^2\leq 1+2\,|s|+s^2=(1+|s|)^2\,,$$
$$1-2\,s\,\cos x+s^2\geq 1-2\,|s|+s^2=(1-|s|)^2\,,$$

perciò

$$\ln\big(1-2\,s\cos x+s^2\big)\leq \ln\,(1+|s|)^2,$$
$$-\ln\big(1-2\,s\cos x+s^2\big)\leq -\ln\,(1-|s|)^2=\ln\frac{1}{(1-|s|)^2}$$

e così

$$\left|\ln\bigl(1-2s\cos x+s^2\bigr)\right| \leq \max\left(\ln(1+|s|)^2, \ln\frac{1}{(1-|s|)^2}\right)$$

Risultano le maggiorazioni seguenti :

- se $a<b<-1$ abbiamo
$$\left|\ln\bigl(1-2s\cos x+s^2\bigr)\right| \leq \max\left(\ln(|a|+1)^2, \ln\frac{1}{(|b|-1)^2}\right)$$
per ogni $0<x<\pi$ e $s\in[a\,,b]$;
- se $-a=b<1$ abbiamo
$$\begin{aligned}\left|\ln\bigl(1-2s\cos x+s^2\bigr)\right| &\leq \max\left(\ln(1+b)^2, \ln\frac{1}{(1-b)^2}\right)\\ &= \ln\frac{1}{(1-b)^2}\end{aligned}$$
per ogni $0<x<\pi$ e $s\in[a\,,b]$;
- se $1<a<b$ abbiamo
$$\left|\ln\bigl(1-2s\cos x+s^2\bigr)\right| \leq \max\left(\ln(b+1)^2, \ln\frac{1}{(a-1)^2}\right)$$
per ogni $0<x<\pi$ e $s\in[a\,,b]$.

Queste maggiorazioni e la continuità delle funzioni

$$\mathbb{R}\ni s\longmapsto \ln\bigl(1-2s\cos x+s^2\bigr)\in\mathbb{R}\,,\qquad 0<x<\pi$$

implicano la continuità di F in $[a\,,b]$ in ciascuno dei casi di cui sopra, quindi in ogni punto $s\in\mathbb{R}$ diverso da 1 e -1 . Però la continuità di F proprio in 1 e -1 è particolarmente rilevante (vedi Osservazione 2).

(c) Per la derivabilità di F in

$$\bigl(-\infty\,,-1\bigr)\cup\bigl(-1\,,1\bigr)\cup\bigl(1\,,+\infty\bigr)$$

e la possibilità di calcolare $F'(s)$ tramite derivazione sotto il segno di integrale basta verificare che, per ogni intervallo compatto $[a\,,b]\subset\mathbb{R}$ con $b<-1$ oppure $-a=b<1$ oppure $b>1$, f è derivabile in $(a\,,b)$ e possiamo derivare sotto il segno di integrale.

A questo fine osserviamo che le funzioni

$$(a\,,b)\ni s\longmapsto \ln\bigl(1-2s\cos x+s^2\bigr)\in\mathbb{R}\,,\qquad 0<x<\pi$$

sono derivabili e le derivate parziali

$$\frac{\partial}{\partial s}\Big(\ln\big(1-2\,s\cos x+s^2\big)\Big)=2\,\frac{s-\cos x}{1-2\,s\cos x+s^2}$$

ammettono la seguente magggiorazione uniforme :

$$\left|\frac{\partial}{\partial s}\Big(\ln\big(1-2\,s\cos x+s^2\big)\Big)\right|\leq\frac{2\,(|s|+1)}{1-2\,|s|+s^2}=\frac{2\,(|s|+1)}{(|s|-1)^2}$$

$$\leq\begin{cases}\dfrac{2\,(|a|+1)}{(|b|-1)^2} & \text{se } \ b<-1\,,\\ \dfrac{2\,(1+b)}{(1-b)^2} & \text{se } \ -a=b<1\,,\\ \dfrac{2\,(b+1)}{(a-1)^2} & \text{se } \ a>1\end{cases}$$

per ogni $0<x<\pi$ ed ogni $s\in(a\,,b)$.

Le funzioni costanti essendo sommabili su intervalli limitati, il teorema sulla dipendenza derivabile da parametri reali implica che la funzione F è derivabile in $(a\,,b)$ e vale la formula

$$F'(s)=2\int\limits_0^{\pi}\frac{s-\cos x}{1-2\,s\cos x+s^2}\,\mathrm{d}x\,,\qquad s\in(a\,,b)\,.\qquad (***)$$

(d) Sia $s\in\mathbb{R}\,,|s|\neq 1$, arbitrario. Usando (***) si vede facilmente che $F'(0)=0$, perciò ci occuperemo nel seguito solo con il caso $s\neq 0$.

Tramite la sostituzione $u=\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$ otteniamo da (***)

$$F'(s)=4\int\limits_0^{+\infty}\frac{s-1+(s+1)\,u^2}{(1+u^2)\big((s-1)^2+(s+1)^2u^2\big)}\,\mathrm{d}u\,.$$

Per calcolare l'integrale alla parte destra svolgiamo la decomposizione in fratti semplici

$$\frac{s-1+(s+1)\,u^2}{(1+u^2)\big((s-1)^2+(s+1)^2u^2\big)}=\frac{\alpha\,u+\beta}{1+u^2}+\frac{\gamma\,u+\delta}{(s-1)^2+(s+1)^2u^2}\,.$$

Tenendo conto che $s\neq 0\,,1\,,-1$, si trovano

$$\alpha=\gamma=0\,,\quad \beta=\frac{1}{2\,s}\,,\quad \delta=\frac{s^2-1}{2\,s}\,,$$

perciò

$$
\begin{aligned}
F'(s) &= \frac{2}{s}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}+\frac{2}{s}\,(s^2-1)\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{(s-1)^2+(s+1)^2u^2} \\
&= \frac{\pi}{s}+\frac{2}{s}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}\Big(\dfrac{s+1}{s-1}\,u\Big)}{1+\Big(\dfrac{s+1}{s-1}\,u\Big)^2} \\
&= \begin{cases} \dfrac{\pi}{s}+\dfrac{2}{s}\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}v}{1+v^2}=\frac{2\,\pi}{s} & \text{se } \ |s|>1\,, \\ \dfrac{\pi}{s}-\dfrac{2}{s}\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}v}{1+v^2}=0 & \text{se } \ 0<|s|<1\,. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Possiamo quindi concludere che per ogni $s\in\mathbb{R}\,,|s|\neq 1\,,$

$$
F'(s)=\begin{cases} \dfrac{2\,\pi}{s} & \text{se } \ |s|>1\,, \\ 0 & \text{se } \ |s|<1\,. \end{cases}
$$

Osservazione 2.

Avendo calcolato $F'(s)$ per $|s|\neq 1$ e sapendo che F è continua su tutto $\mathbb{R}$, possiamo calcolare $F(s)$ per ogni $s\in\mathbb{R}$.

Poiché F' si annulla su $(-1\,,1)$, F è costante su $[-1\,,1]$. Ma $F(0)=0$, perciò $F(s)=0$ per ogni $s\in[-1\,,1]$.

Ora $F(1)=0$ e $F'(s)=\dfrac{2\,\pi}{s}$, $s>1$, implicano

$$
F(s)=\int_1^s\frac{2\,\pi}{\sigma}\,\mathrm{d}\sigma=2\,\pi\ln s\,,\qquad s>1\,.
$$

Similmente si verifica che $F(s)=2\,\pi\ln|s|$ per $s<-1$.

Possiamo quindi concludere :

$$
\int_0^{\pi}\ln\!\big(1-2\,s\cos x+s^2\big)\,\mathrm{d}x=\begin{cases} 2\,\pi\ln|s| & \text{se } \ s\in\mathbb{R}\,,|s|\geq 1\,, \\ 0 & \text{se } \ s\in\mathbb{R}\,,|s|\leq 1\,. \end{cases}
$$

Risulta in particolare che F non è derivabile in 1 e -1:

- in 1 la derivata sinistra è 0, mentre la derivata destra è 2π,
- in -1 la derivata sinistra è -2π, mentre la derivata destra è 0.

Notiamo che l'uguaglianza $F(1) = 0$ serve anche al calcolo dell'integrale noto $\int_0^{\pi/2} \ln(\sin t)\,\mathrm{d}t$. Infatti, avendo

$$0 = F(1) = \int_0^{\pi} \ln\bigl(2 - 2\cos x\bigr)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} \ln\left(4\sin^2\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^{\pi} \bigl(\ln 2\bigr)\,\mathrm{d}x + 2\int_0^{\pi} \ln\sin\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x \overset{x=2t}{=} 2\pi\ln 2 + 4\int_0^{\pi/2} \ln(\sin t)\,\mathrm{d}t$$

risulta

$$\int_0^{\pi/2} \ln(\sin t)\,\mathrm{d}t = -\frac{\pi}{2}\ln 2\,.$$

3) : A) Se $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ è una funzione olomorfa limitata, i punti del tipo $1/k$ con $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ sono punti di singolarità isolate. Sicome f è limitata ovunque, questi punti sono di singolarità eliminabili. Quindi f si estende ad una funzione olomorfa limitata $\hat{f} : \mathbb{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C}$. Lo 0 è un punto di singolarità isolata per $\hat{f}$ e siccome $\hat{f}$ è limitata, anche questa singolarità è eliminabile. Quindi $\hat{f}$ si estende ad una funzione olomorfa limitata $\widetilde{f} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$. Per il teorema di Liouville, $\widetilde{f}$ è costante e quindi anche $\hat{f}$ e f lo sono.

B) Se $z \in \Omega$, la distanza di z da $-i$ è strettamnete maggiore della sua distanza da i. Quindi $\dfrac{|z-i|}{|z+i|} < 1$ e la funzione $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ definita ponendo $f(z);= \dfrac{z-i}{z+i}$ per $z \in \Omega$ è una funzione olomorfa limitata non costante.

C) Su Ω si definisce un logaritmo olomorfo $Log_+(z)$ di z ponendo

$$Log_+(z) := \ln(|z|) + i\, arg_+(z)\,,$$

dove $arg_+(z)$ è l'unico numero reale tale che

$$z = |z|\, e^{i \cdot arg_+(z)} \text{ e } 0 < arg_+(z) < 2\pi\,.$$

La funzione $g : \Omega \to \mathbb{C}$ definita da

$$g(z) := \exp\big(Log_+(z)/2\big) = \sqrt{|z|}\, e^{i \cdot arg_+(z)/2}$$

è una radice quadrata olomorfa di z su Ω. Inoltre

$$g(\Omega) = \big\{ z \in \mathbb{C}\,;\ \Im(z) > 0 \big\}\,.$$

Per quanto visto nel punto B), ponendo

$$f(z) := \frac{g(z) - i}{g(z) + i}\,, \qquad z \in \Omega\,,$$

si ottiene una funzione olomorfa limitata non costante.

D) Sia $h : \Omega \to \mathbb{C}$ la funzione olomorfa definita ponendo $h(z) = \dfrac{1}{z} - 1\,.$
Si ha $h(\Omega) = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$. Per quanto visto al punto C), tramite la formula

$$f(z) := \frac{g\Big(\dfrac{1}{z} - 1\Big) - i}{g\Big(\dfrac{1}{z} - 1\Big) + i}$$

possiamo definire una funzione olomorfa non costante $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}\,.$

4) : Sia

$$s := \{ib :\ b \leq 0\} \subset \mathbb{C}$$

la semiretta immaginaria negativa chiusa. Su $\mathbb{C} \setminus s$ possiamo definire un logaritmo olomorfo $\log_s(z)$ di z che coincide con il logaritmo reale sulla semiretta reale positiva. Esplicitamente

$$log_s(z) := \ln|z| + i\, \Theta_s(z)$$

con $-\frac{1}{2}\pi < \Theta_s(z) < \frac{3}{2}\pi\,.$ Qunidi su $\mathbb{C} \setminus s$ esiste una radice quadrata di z olomorfa data esplicitamente da

$$z^{1/2} := e^{1/2\big(\log|z| + i\Theta_s(z)\big)} = |z|^{1/2} e^{i\Theta_s(z)/2}$$

con $-\frac{1}{2}\pi < \Theta_s(z) < \frac{3}{2}\pi$,. La funzione

$$f(z) := \frac{z^2 z^{1/2}}{z^4 + 2z^2 + 1}$$

è quindi una estensione meromorfa della funzione integranda a $\mathbb{C} \setminus s$. Siccome $z^4+2z^2+1 = (z^2+1)^2$, la funzione f è olomorfa in $\mathbb{C}\setminus\big(s\cup\{i\}\big)$ e ha un polo doppio in i. Notiamo che se x è reale positivo, si ha

$$f(-x) = e^{i\pi/2}\frac{x^2\sqrt{x}}{x^4+2x^2+1} = if(x)\,.$$

Passiamo ora a considerare l'integrale improprio. Siccome

$$\frac{x^2\sqrt{x}}{x^4+2x^2+1}$$

è continua ed è asintotica a $\dfrac{1}{x^{3/2}}$ per $x \to +\infty$, l'integrale improprio è convergente e

$$\int_0^\infty \frac{x^2\sqrt{x}}{x^4+2x^2+1}\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to+\infty}\int_{1/R}^{R} \frac{x^2\sqrt{x}}{x^4+2x^2+1}\,\mathrm{d}x\,.$$

Per calcolare il limite usiamo il metodo dei residui integrando la 1-forma $f(z)\,\mathrm{d}z$ lungo il cammino

$$\gamma_R = \gamma_{1,R} + \gamma_{2,R} + \gamma_{3,R} + \gamma_{4,R}$$

dove

- $\gamma_{1,R}$ è il segmento che va da $1/R$ a R,
- $\gamma_{2,R}$ è la semicirconferenza $\{x+iy\ : x^2+y^2 = R\,, y \geq 0\}$ percorsa in senso antiorario,
- $\gamma_{3,R}$ è il segmento che va da $-R$ a $-1/R$,
- $\gamma_{2,R}$ è la semicirconferenza $\{x+iy\ : x^2+y^2 = 1/R\,, y \geq 0\}$ percorsa in senso orario.

Se $R > 1$ per il teorema dei residui abbiamo

$$\int_{\gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z = Res(f,i)$$

Ma

$$\int_{\gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{j=1}^{4}\int_{\gamma_{j,R}} f(z)\,\mathrm{d}z\,,$$

$$\int_{\gamma_{1,R}} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{1/R}^{R} \frac{x^2\sqrt{x}}{x^4+2x^2+1}\,\mathrm{d}x$$

e

$$\int_{\gamma_{3,R}} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{-R}^{-1/R} \frac{ix^2\sqrt{|x|}}{x^4+2x^2+1}\,\mathrm{d}x = i\int_{1/R}^{R} \frac{x^2\sqrt{x}}{x^4+2x^2+1}\,\mathrm{d}x\,.$$

implicano

$$(1+i)\int_{1/R}^{R} \frac{x^2\sqrt{x}}{x^4+2x^2+1}\,\mathrm{d}x + \sum_{j=2,4}\int_{\gamma_{j,R}} f(z)\,\mathrm{d}z = Res(f,i)\,.$$

Quindi se mostriamo che per $j=2$ e $j=4$ si ha

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{\gamma_{j,R}} f(z)\,\mathrm{d}z = 0\,,$$

otterremo

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{x^2\sqrt{x}}{x^4+2x^2+1}\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to+\infty}\int_{1/R}^{R} \frac{x^2\sqrt{x}}{x^4+2x^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{Res(f,i)}{1+i}\,.$$

In effetti si ha $\lim\limits_{R\to+\infty}\int_{\gamma_{2,R}} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$ perché

$$\left|\int_{\gamma_{2,R}} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \le \pi R \sup\left\{|f(z)|\,;\, z\in\gamma_{2,R}\right\} \le \pi\, R\,\frac{R^{5/2}}{(R^2-1)^2}$$

e $\lim\limits_{R\to+\infty}\pi\, R\,\dfrac{R^{5/2}}{(R^2-1)^2} = 0\,.$

Inoltre $\lim\limits_{R\to+\infty}\int_{\gamma_{4,R}} f(z)\,dz = 0$ perché

$$\left|\int_{\gamma_{4,R}} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \le \frac{\pi}{R}\sup\left\{\left|\frac{z^2}{z^4+2z^2+1}\right|\left|z^{1/2}\right|\,;\, z\in\gamma_{4,R}\right\}$$

e

$$\lim_{R\to+\infty} \frac{\pi}{R} \sup\left\{ \left| \frac{z^2}{z^4+2z^2+1} \right| \left|z^{1/2}\right| \; ; z \in \gamma_{4,R} \right\} = 0$$

essendo le funzioni $\dfrac{z^2}{z^4+2z^2+1}$ e $z^{1/2}$ limitate nell'intersezione di $\mathbb{C} \setminus s$ con un qualsiasi disco chiuso con centro in 0 e non contenente i.

Quindi abbiamo

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2\sqrt{x}}{x^4+2x^2+1}\, dx = \frac{Res(f,i)}{1+i}$$

e rimane da calcolare il residuo.

Siccome i è un polo doppio per f, abbiamo

$$\begin{aligned}
Res(f,i) &= 2\pi i \lim_{z\to i} \frac{d}{dz}\left(\frac{z^2 z^{1/2}}{z^4+2z^2+1}(z-i)^2 \right) \\
&= 2\pi i \, \frac{d}{dz}\left(\frac{z^2 z^{1/2}}{(z+i)^2} \right)\bigg|_{z=i} \\
&= 2\pi i \left(\frac{d}{dz}\left(\frac{z^2}{(z+i)^2} \right) z^{1/2} + \frac{z^2}{(z+i)^2} \, \frac{d}{dz}\big(z^{1/2}\big) \right)\bigg|_{z=i} \\
&= 2\pi i \left(\frac{2iz}{(z+i)^3}\, z^{1/2} + \frac{z^2}{(z+i)^2} \, \frac{d}{dz}\big(z^{1/2}\big) \right)\bigg|_{z=i} .
\end{aligned}$$

Siccome $z^{1/2}$ è una radice quadrata olomorfa di z (cioè una funzione inversa locale di z^2), abbiamo

$$\left(\frac{d}{dz} z^{1/2} \right)\bigg|_{z=i} = \left(\frac{1}{2w} \right)\bigg|_{w=i^{1/2}} = \frac{1}{2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \right)} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \right).$$

Quindi

$$\begin{aligned}
Res(f,i) &= 2\pi i \left(\frac{2iz}{(z+i)^3}\, z^{1/2} + \frac{z^2}{(z+i)^2} \, \frac{d}{dz}\big(z^{1/2}\big) \right)\bigg|_{z=i} \\
&= 2\pi i \left(\frac{-2}{(2i)^3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \right) + \frac{-1}{(2i)^2}\, \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right) \\
&= 2\pi i \left(\frac{2}{8i}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \right) + \frac{1}{8}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 2\pi i\left(\frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{1}{8}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) \\
&= \frac{3}{4}\,\pi i\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{8}\,\pi\,(1+i)\,.
\end{aligned}
$$

In conclusione,

$$
\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2\sqrt{x}}{x^4+2x^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{Res(f,i)}{1+i} = \frac{3\sqrt{2}}{8}\,\pi\,.
$$