NOME: . . . . **MATRICOLA: . . . .**

Corso di Laurea in Matematica, A.A. 2009/2010
Analisi Reale e Complessa, Esame del 25.01.2010

1) Si può applicare il teorema della convergenza dominata al calcolo dei limiti

$$\lim_{t\to+\infty}\int_0^2 t\,e^{-t\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x\ , \qquad \lim_{t\to+\infty}\int_0^2 t\,e^{-t\,x}\,\mathrm{d}x\ ?$$

Si giustifichi la risposta.

2) Si verifichi che la funzione $F:\big(0\,,+\infty\big)\longrightarrow\mathbb{R}$ definita da

$$F(s):=\int_0^{\pi/2}\frac{\operatorname{arctg}(s\operatorname{tg}x)}{\operatorname{tg}x}\,\mathrm{d}x\ , \qquad s>0$$

è derivabile ed ammette limite finito in 0. Si calcoli F' e si trovi il valore dell'integrale $F(s)$ per ogni $s>0$.

3) Esiste una funzione olomorfa f sul semipiano superiore aperto tale che

$$\mathrm{Im} f(z) = 3 + x^2 - y^2 - \frac{y}{2\,(x^2+y^2)} \ ?$$

Nel caso affermativo si trovino tutte tali funzioni f .

4) Dato $b > 0$, si calcoli l'integrale improprio

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2-b^2}{x^2+b^2}\,\frac{e^{ix}}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{\substack{r\to+\infty \\ 0<\varepsilon\to 0}} \left(\int\limits_{-r}^{-\varepsilon} \frac{x^2-b^2}{x^2+b^2}\,\frac{e^{ix}}{x}\,\mathrm{d}x + \int\limits_{\varepsilon}^{r} \frac{x^2-b^2}{x^2+b^2}\,\frac{e^{ix}}{x}\,\mathrm{d}x \right)$$

usando il teorema dei residui per una curva chiusa regolare a tratti adatta nel semipiano superiore.

Soluzioni:

1) **:** Discuteremo il problema generale dell'applicabilità del teorema della convergenza dominata al calcolo del limite

$$\lim_{t\to+\infty}\int_0^2 t\,e^{-t x^\alpha}\,\mathrm{d}x$$

ove α è un parametro reale.

Il teorema della convergenza dominata si applica se esiste una funzione integrabile $g:[0\,,2]\longrightarrow[0\,,+\infty)$ tale che la dominazione

$$t\,e^{-t x^\alpha}\le g(x)\,,\qquad x\in[0\,,2]$$

sia soddisfatta per tutti i $t\in\mathbb{R}$ (almeno) da un t_o in poi, cioè tale che

$$\sup_{t>t_o}\Big(t\,e^{-t x^\alpha}\Big)\le g(x)\,,\qquad x\in[0\,,2] \tag{*}$$

valga per un $t_o\in\mathbb{R}$. Allora, tenendo conto che

$$\lim_{t\to+\infty} t\,e^{-t x^\alpha}=0\,,\qquad x>0\,,$$

abbiamo

$$\lim_{t\to+\infty}\int_0^2 t\,e^{-t x^\alpha}\,\mathrm{d}x=\int_0^2\Big(\underbrace{\lim_{t\to+\infty} t\,e^{-t x^\alpha}}_{=0}\Big)\,\mathrm{d}x=0\,.$$

Ma per ogni $x>0$ la funzione

$$(0\,,+\infty)\ni t\longmapsto t\,e^{-t x^\alpha}$$

ha un punto di massimo assoluto $t(x)=\dfrac{1}{x^\alpha}$:

Infatti, $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(t\,e^{-t x^\alpha}\Big)=e^{-t x^\alpha}+t\,e^{-t x^\alpha}\big(-x^\alpha\big)=e^{-t x^\alpha}\big(1-t\,x^\alpha\big)$ implica

t	0		$1/x^\alpha$		$+\infty$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(t\,e^{-t x^\alpha}\big)$		$+$	0	$-$	
$t\,e^{-t x^\alpha}$	0	$\nearrow$	$1/e x^\alpha$	$\searrow$	0

Risulta che

$$\sup_{t>0} \left(t\, e^{-t\, x^\alpha} \right) \leq t(x)\, e^{-t(x)\, x^\alpha} = \frac{1}{e\, x^\alpha}\,, \qquad x \in [0\,,2]\,,$$

cioè per $t_o = 0$ (*) è verificata con $g(x) = \dfrac{1}{e\, x^\alpha}$.

Ora, per $\alpha < 1$ la funzione $g(x) = \dfrac{1}{e\, x^\alpha}$ è integrabile su $[0\,,2]$ e quindi il teorema della convergenza dominata si applica :

$$\lim_{t\to+\infty} \int_0^2 \underbrace{t\, e^{-t\, x^\alpha}}_{\leq\, 1/e x^\alpha} \mathrm{d}x = \int_0^2 \left(\lim_{t\to+\infty} t\, e^{-t\, x^\alpha} \right) \mathrm{d}x = 0\,.$$

In particolare, per $\alpha = \dfrac{1}{3}$ abbiamo

$$\lim_{t\to+\infty} \int_0^2 \underbrace{t\, e^{-t\, \sqrt[3]{x}}}_{\leq\, 1/e\, \sqrt[3]{x}} \mathrm{d}x = \int_0^2 \left(\lim_{t\to+\infty} t\, e^{-t\, \sqrt[3]{x}} \right) \mathrm{d}x = 0\,.$$

Per $\alpha = 1$ invece non possiamo applicare il teorema della convergenza dominata. Infatti, se si potesse applicarlo, allora avremmo

$$\lim_{t\to+\infty} \int_0^2 t\, e^{-t\, x}\, \mathrm{d}x = \int_0^2 \Big(\underbrace{\lim_{t\to+\infty} t\, e^{-t\, x}}_{=\,0} \Big) \mathrm{d}x = 0\,,$$

mentre per calcolo diretto risulta

$$\int_0^2 t\, e^{-t\, x}\, \mathrm{d}x = -\, e^{-t\, x} \Big|_{x=0}^{x=2} = 1 - e^{-2t}\,,$$

$$\lim_{t\to+\infty} \int_0^2 t\, e^{-t\, x}\, \mathrm{d}x = \lim_{t\to+\infty} \left(1 - e^{-2t} \right) = 1\,.$$

2) : L'esistenza del limite $\lim\limits_{0<s\to 0} F(s) = 0$ si può ottenere usando il teorema della convergenza dominata :

Siccome

$$\varphi \leq \operatorname{tg}\varphi\,,\ 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}\,,\ \text{ cioè }\ \operatorname{arctg} y \leq y\,,\ y \geq 0\,,$$

vale la condizione di dominazione

$$\frac{\operatorname{arctg}(s \operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x} \leq \frac{s \operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x} = s \leq 1\,, \qquad x \in \left[0\,,\frac{\pi}{2}\right]$$

per ogni $0 < s \leq 1$. Ora la funzione costante 1 è integrabile su $\left[0\,,\frac{\pi}{2}\right]$ e per il teorema della convergenza dominata risulta

$$\lim_{0<s\to 0} \int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{arctg}(s \operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \Big(\underbrace{\lim_{0<s\to 0} \frac{\operatorname{arctg}(s \operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x}}_{=\,0}\Big)\,\mathrm{d}x = 0\,.$$

La derivabilità di $F(s)$ sotto il segno dell'integrale è possibile perché la derivata parziale

$$\frac{\partial}{\partial s}\frac{\operatorname{arctg}(s \operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x} = \frac{1}{1+s^2\operatorname{tg}^2 x} \leq 1$$

esiste e la funzione costante 1, che la maggiora, è integrabile su $\left[0\,,\frac{\pi}{2}\right]$. Così F è derivabile in ogni $s > 0$ ed abbiamo

$$F'(s) = \int_0^{\pi/2} \frac{\partial}{\partial s}\frac{\operatorname{arctg}(s \operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+s^2\operatorname{tg}^2 x}\,\mathrm{d}x\,.$$

Il calcolo dell'integrale alla parte destra si riduce all'integrazione di una funzione razionale usando la sostituzione $t = \operatorname{tg} x \iff x = \operatorname{arctg} t$:

$$F'(s) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+s^2t^2}\cdot\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

Se $s \neq 1$ allora (come visto nell'Analisi 1) abbiamo la decomposizione in fratti semplici

$$\frac{1}{1+s^2t^2}\cdot\frac{1}{1+t^2} = \frac{1}{1-s^2}\cdot\frac{1}{1+t^2} - \frac{s^2}{1-s^2}\cdot\frac{1}{1+s^2t^2}$$

e risulta

$$\begin{aligned}
F'(s) &= \frac{1}{1-s^2}\,\mathrm{arctg}\, t\Big|_{t=0}^{t=+\infty} - \frac{s}{1-s^2}\,\mathrm{arctg}\,(st)\Big|_{t=0}^{t=+\infty} \\
&= \frac{1}{1-s^2}\,\frac{\pi}{2} - \frac{s}{1-s^2}\,\frac{\pi}{2} = \frac{1-s}{1-s^2}\,\frac{\pi}{2} \\
&= \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{1+s} \ \ :
\end{aligned}$$

Infatti, sappiamo che esistono costanti $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tali che

$$\frac{1}{1+s^2t^2} \cdot \frac{1}{1+t^2} = \frac{a\,t+b}{1+t^2} + \frac{c\,t+d}{1+s^2t^2}$$

e queste costanti si calcolano come segue :

$$\begin{aligned}
1 &= \big(a\,t+b\big)\big(1+s^2t^2\big) + \big(c\,t+d\big)\big(1+t^2\big) \\
&= (a\,s^2+c)\,t^3 + (b\,s^2+d)\,t^2 + (a+c)\,t + b + d
\end{aligned}$$

implica

$$\begin{cases} a\,s^2+c=0 \\ b\,s^2+d=0 \\ a+c=0 \\ b+d=1 \end{cases}$$

e dalla prima e la terza equazione risulta $a=c=0$, mentre la seconda e la quarta equazione hanno come soluzione

$$b = \frac{1}{1-s^2}\,, \qquad d = -\frac{s^2}{1-s^2}\ .$$

Se invece $s=1$, allora $\Bigg($usando il metodo di integrazione della funzione $\dfrac{1}{(1+t^2)^2}$ imparato nell'Analisi 1$\Bigg)$ si ottiene

$$F'(s) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t = \left(\frac{1}{2}\,\frac{t}{1+t^2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\, t\right)\Big|_{t=0}^{t=+\infty} = \frac{\pi}{4}\,,$$

quindi anche in questo caso vale

$$F'(s) = \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{1+s} \ \ :$$

Tramite integrazione per parti si ottiene

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t &= \frac{t}{1+t^2} - \int t\left(-\frac{2t}{(1+t^2)^2}\right)\mathrm{d}t \\
&= \frac{t}{1+t^2} + \int \frac{2t^2+2-2}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{t}{1+t^2} + 2\int \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t - 2\int \frac{1}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

e da questa relazione si esprime

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{2}\,\frac{t}{1+t^2} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\,\frac{t}{1+t^2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\, t\,.
\end{aligned}
$$

Concludiamo che F è una primitiva della funzione

$$(0\,,+\infty) \ni s \longmapsto \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{1+s}$$

e così della forma $F(s) = \dfrac{\pi}{2}\ln(1+s) + C$. Ma, poiché $\lim\limits_{0<s\to 0} F(s) = 0$, la costante C deve annullarsi e risulta

$$F(s) = \frac{\pi}{2}\ln(1+s)\,, \qquad s>0\,.$$

3) : La funzione $v(x\,,y)$ definita sul semipiano superiore aperto tramite la formula

$$v(x\,,y) = 3 + x^2 - y^2 - \frac{y}{2\,(x^2+y^2)}$$

può essere la parte immaginaria di una funzione olomorfa solo se è armonica. Verifichiamola :

Anzitutto le derivate parziali di v di primo ordine sono:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial x}(x\,,y) &= 2\,x + \frac{y}{2\,(x^2+y^2)^2}\,2\,x = 2\,x + \frac{x\,y}{(x^2+y^2)^2}\,, \\
\frac{\partial v}{\partial y}(x\,,y) &= -2\,y - \frac{1}{2\,(x^2+y^2)^2}\,2\,x + \frac{y}{2\,(x^2+y^2)^2}\,2\,y
\end{aligned}
$$

$$= -2y + \frac{y^2 - x^2}{2(x^2 + y^2)^2} \; .$$

Risultano

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x\,,y) &= 2 + \frac{y}{(x^2+y^2)^2} - \frac{2\,x\,y}{(x^2+y^2)^3}\,2\,x \\
&= 2 + \frac{y^3 - 3\,x^2\,y}{(x^2+y^2)^3} \; , \\
\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(x\,,y) &= \; -2 + \frac{2\,y}{2\,(x^2+y^2)^2} - \frac{2\,(y^2-x^2)}{2\,(x^2+y^2)^3}\,2\,y \\
&= \; -2 + \frac{3\,x^2\,y - y^3}{2\,(x^2+y^2)^3}
\end{aligned}$$

e quindi

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x\,,y) + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(x\,,y) = 0 \; .$$

Ora l'armonicità di v implica che la forma differenziale

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial y}(x\,,y)\,\mathrm{d}x - \frac{\partial v}{\partial x}(x\,,y)\,\mathrm{d}y$$

è chiusa e, poiché il semipiano superiore aperto è convesso, anche esatta. Se $u(x\,,y)$ è una primitiva della forma differenziale ω , cioè una funzione differenziabile $u(x\,,y)$ sul semipiano superiore aperto tale che

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x\,,y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x\,,y)\,, \qquad \frac{\partial u}{\partial y}(x\,,y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x\,,y)\;,$$

allora per la funzione $f(z) := u(x\,,y) + v(x\,,y)\,i$ valgono le equazioni di Cauchy-Riemann, quindi f sarà una funzione olomorfa avendo la parte immaginaria uguale a v .

Di conseguenza dobbiamo risolvere il sistema di equazioni a derivate parziali

$$\begin{cases}
\dfrac{\partial u}{\partial x}(x\,,y) = \;\;\dfrac{\partial v}{\partial y}(x\,,y) = -2\,y + \dfrac{y^2 - x^2}{2\,(x^2+y^2)^2} \\
\dfrac{\partial u}{\partial y}(x\,,y) = -\dfrac{\partial v}{\partial x}(x\,,y) = -2\,x - \dfrac{x\,y}{(x^2+y^2)^2}
\end{cases} \; .$$

Dalla seconda equazione si ottiene

$$
\begin{aligned}
u(x\,,y) &= \int \left(-\,2\,x - \frac{x\,y}{(x^2+y^2)^2} \right) \mathrm{d}y \\
&= -\,2\,x\,y - \frac{x}{2} \int \frac{\frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}y \\
&= -\,2\,x\,y + \frac{x}{2\,(x^2+y^2)} + C(x)
\end{aligned}
$$

ove $C(x)$ è una funzione di solo x . Troviamo successivamente $C(x)$ tale che anche la prima equazione sia soddisfatta, cioè tale che

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x}(x\,,y) &= -\,2\,y + \frac{1}{2\,(x^2+y^2)} - \frac{x}{2\,(x^2+y^2)^2}\,2\,x + C'(x) \\
&= -\,2\,y + \frac{y^2-x^2}{2\,(x^2+y^2)^2} + C'(x)
\end{aligned}
$$

sia uguale a

$$
-2\,y + \frac{y^2-x^2}{2\,(x^2+y^2)^2}\ .
$$

Risulta che $C'(x)$ deve annularsi identicamente e quindi $C(x)$ dev'essere una costante reale C .

Concludiamo che le funzioni $f(z)$ con la parte immaginaria uguale a v sono della forma

$$
\begin{aligned}
f(z) &= -\,2\,x\,y + \frac{x}{2\,(x^2+y^2)} + C + \left(3 + x^2 - y^2 - \frac{y}{2\,(x^2+y^2)} \right) i \\
&= -\,2\,x\,y + (x^2-y^2)\,i + \frac{x - y\,i}{2\,(x^2+y^2)} + 3\,i + C \\
&= i\,\big(x^2 - y^2 + 2\,x\,y\,i\big) + \frac{1}{2\,(x+y\,i)} + 3\,i + C \\
&= i\,z^2 + \frac{1}{2\,z} + 3\,i + C\ ,
\end{aligned}
$$

ove C è una costante reale.

4) **:** Indichiamo

$$
f(z) := \frac{z^2-b^2}{z^2+b^2}\,\frac{e^{iz}}{z}\,, \qquad z \in \mathbb{C} \setminus \big\{0\,, b\,i\,, -b\,i\big\}\ .
$$

Allora f è una funzione mermorfa sul piano complesso con poli semplici in 0, bi e $-bi$. Il residuo di f in 0 è

$$\operatorname{Res}(f,0) = \lim_{z\to 0} z\, f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{z^2-b^2}{z^2+b^2}\, e^{iz} = -1\,,$$

mentre il residuo di f in $\pm bi$ è

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}(f,\pm bi) &= \lim_{z\to\pm bi} z\, f(z) = \lim_{z\to\pm bi} \bigl(z\mp bi\bigr)\,\frac{z^2-b^2}{z^2+b^2}\,\frac{e^{iz}}{z}\\ &= \lim_{z\to\pm bi} \frac{z^2-b^2}{z\pm bi}\,\frac{e^{iz}}{z} = \frac{-2b^2}{\pm 2bi}\,\frac{e^{\mp b}}{\pm bi}\\ &= e^{\mp b}\,.\end{aligned}$$

Indichiamo pure, per $r>0$, con $\partial^+ U_r^+(0)$ e $\partial^- U_r^+(0)$ il semicerchio

$$\bigl\{z\in\mathbb{C}\,;\,|z|=r\,,\operatorname{Im} z\geq 0\bigr\}$$

orientato in senso antiorario (positivo) rispettivamente in senso orario (negativo) :

$$\begin{aligned}\partial^+ U_r^+(0) &\text{ è la curva } [0\,,\pi]\ni t\longmapsto r\,e^{it}\in\mathbb{C}\,,\\ \partial^- U_r^+(0) &\text{ è la curva } [0\,,\pi]\ni t\longmapsto r\,e^{i(\pi-t)} = -r\,e^{-it}\in\mathbb{C}\,.\end{aligned}$$

Siano adesso $0<\varepsilon<b<r$ e consideriamo la curva chiusa regolare a tratti $\gamma_{\varepsilon,r}$ nel semipiano superiore chiuso che si ottiene componendo

il segmento $[-r\,,-\varepsilon]$,
il semicerchio $\partial^- U_\varepsilon^+(0)$,
il segmento $[\varepsilon\,,r]$,
il semicerchio $\partial^+ U_r^+(0)$.

Poiché $\gamma_{\varepsilon,r}$ aggira il solo polo bi, per il teorema dei residui abbiamo

$$\begin{aligned}2\pi i\, e^{-b} &= 2\pi i \operatorname{Res}(f,bi)\\ &= \int_{\gamma_{\varepsilon,r}} f(z)\,\mathrm{d}z\\ &= \int_{-r}^{-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\partial^- U_\varepsilon^+(0)} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\varepsilon}^{r} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\partial^+ U_r^+(0)} f(z)\,\mathrm{d}z\end{aligned}$$

quindi

$$\int_{-r}^{-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\varepsilon}^{r} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi\, i\, e^{-b} + \int\limits_{\partial^+ U_\varepsilon^+(0)} f(z)\,\mathrm{d}z - \int\limits_{\partial^+ U_r^+(0)} f(z)\,\mathrm{d}z \;.$$

Ora per il lemma di Jordan vale

$$\lim_{r\to+\infty} \int\limits_{\partial^+ U_r^+(0)} f(z)\,\mathrm{d}z = \lim_{r\to+\infty} \int\limits_{\partial^+ U_r^+(0)} \frac{z^2-b^2}{(z^2+b^2)\,z}\, e^{iz}\,\mathrm{d}z = 0$$

e risulta

$$\begin{aligned}
&\lim_{r\to+\infty}\left(\int_{-r}^{-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\varepsilon}^{r} f(x)\,\mathrm{d}x\right)\\
&= 2\pi\, i\, e^{-b} + \int\limits_{\partial^+ U_\varepsilon^+(0)} f(z)\,\mathrm{d}z\\
&= 2\pi\, i\, e^{-b} + \int\limits_{\partial^+ U_\varepsilon^+(0)} \frac{z^2-b^2}{z^2+b^2}\,\frac{e^{iz}}{z}\,\mathrm{d}z\\
&= 2\pi\, i\, e^{-b} + \int\limits_{\partial^+ U_\varepsilon^+(0)} \frac{1}{z}\left(\frac{z^2-b^2}{z^2+b^2}\, e^{iz} + 1\right)\mathrm{d}z - \int\limits_{\partial^+ U_\varepsilon^+(0)} \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z\\
&= 2\pi\, i\, e^{-b} + \int\limits_{\partial^+ U_\varepsilon^+(0)} \frac{1}{z}\left(\frac{z^2-b^2}{z^2+b^2}\, e^{iz} + 1\right)\mathrm{d}z - \pi\, i\;.
\end{aligned}$$

Successivamente, poiché esiste il limite

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to 0} \frac{1}{z}\left(\frac{z^2-b^2}{z^2+b^2}\, e^{iz} + 1\right) &= \lim_{z\to 0} \frac{1}{z}\left(\frac{2\,z^2 - z^2 - b^2}{z^2+b^2}\, e^{iz} + 1\right)\\
&= \lim_{z\to 0}\left(\frac{2\,z}{z^2+b^2}\, e^{iz} + \frac{1-e^{iz}}{z}\right)\\
&= -i\;,
\end{aligned}$$

la funzione $z \longmapsto \dfrac{1}{z}\left(\dfrac{z^2-b^2}{z^2+b^2}\, e^{iz} + 1\right)$ ha singolarità eliminabile in 0 e quindi è limitata in un intorno di 0. Risulta che

$$\lim_{0<\varepsilon\to 0} \int\limits_{\partial^+ U_\varepsilon^+(0)} \frac{1}{z}\left(\frac{z^2-b^2}{z^2+b^2}\, e^{iz}+1\right)\mathrm{d}z = 0$$

e concludiamo :

$$\begin{aligned}
\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2-b^2}{x^2+b^2}\,\frac{e^{ix}}{x}\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{\substack{r\to+\infty\\ 0<\varepsilon\to 0}} \left(\int\limits_{-r}^{-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{\varepsilon}^{r} f(x)\,\mathrm{d}x\right) \\
&= 2\pi i\, e^{-b} - \pi i \\
&= \pi\left(2e^{-b}-1\right) i\ .
\end{aligned}$$

Rimarco: Poiché $e^{ix} = \cos x + i\,\sin x$ e

$$\int\limits_{-r}^{-\varepsilon} \frac{x^2-b^2}{x^2+b^2}\,\frac{\cos x}{x}\,\mathrm{d}x + \int\limits_{\varepsilon}^{r} \frac{x^2-b^2}{x^2+b^2}\,\frac{\cos x}{x}\,\mathrm{d}x = 0\ ,$$

$$\int\limits_{-r}^{-\varepsilon} \frac{x^2-b^2}{x^2+b^2}\,\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x + \int\limits_{\varepsilon}^{r} \frac{x^2-b^2}{x^2+b^2}\,\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = 2\int\limits_{\varepsilon}^{r} \frac{x^2-b^2}{x^2+b^2}\,\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x\ ,$$

abbiamo

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x^2-b^2}{x^2+b^2}\,\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{\substack{r\to+\infty\\ 0<\varepsilon\to 0}} \int\limits_{\varepsilon}^{r} \frac{x^2-b^2}{x^2+b^2}\,\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \pi\left(e^{-b}-\frac{1}{2}\right).$$