**NOME:** . . . . . . . . . . . . . . . . . **MATRICOLA:** . . . . . . . . . . . . . . . . .

Corso di Laurea in Matematica, A.A. 2013/2014
Analisi Reale e Complessa, Esame del 25.06.2014

1) Si stabilisca se la formula

$$f(x\,,y) = \frac{1}{(1-xy)^p}$$

definisce una funzione sommabile $f$ sul quadrato

$$[0\,,1) \times [0\,,1)$$

per

$$\alpha) \quad p = 1\,;$$

$$\beta) \quad p = 2\,.$$

2) Sia $F : \big[0\,,+\infty\big) \longrightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$F(s) := \int_0^{+\infty} \frac{e^{-sx^2}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

(i) Si dimostri che $F$ è continua.

(ii) Si verifichi che $F$ è derivabile in $\big(0\,,+\infty\big)$ e si esprimi $F'(s)$ mediante un integrale dipendente dal parametro $s$.

(iii) Si verifichi che $F$ soddisfa in $\big(0\,,+\infty\big)$ l'equazione differenziale

$$F'(s) - F(s) = -\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{s}}\,.$$

3) (a) Sia $\Delta_r \subset \mathbb{C}$ il disco aperto di raggio $r$ centrato in 0 e sia $\overline{\Delta}_r \subset \mathbb{C}$ la sua chiusura in $\mathbb{C}$, sia infine $\partial\Delta_r := \overline{\Delta}_r \setminus \Delta_r$ la frontiera di $\overline{\Delta}_r$ Sia $f : \Delta_r \longrightarrow \mathbb{C}$ una funzione olomorfa e sia $g : \mathbb{C} \setminus \overline{\Delta}_{1/r} \longrightarrow \mathbb{C}$ la funzione definita da

$$g(z) := \overline{f(1/\overline{z})}\,.$$

Dimostrare che $g$ è olomorfa.

(b) Sia $h : \Delta_2 \longrightarrow \mathbb{C}$ una funzione olomorfa tale che $h(\partial\Delta_1) \subset \mathbb{R}$. Mostrare che $h$ si estende ad una funzione olomorfa su $\mathbb{C}$.

**Suggerimento:** Notare che $z = 1/\overline{z}$ per ogni $z \in \partial\Delta_1$ e poi usare (a).

(c) Mostrare che $h$ è costante.

(d) Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ un aperto connesso, sia $R \subset \Omega$ un rettangolo chiuso e sia $\partial R$ il suo bordo. Sia $k : \Omega \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa tale che $k(\partial R) \subset \mathbb{R}$. Mostrare che $k$ è costante.

4) Calcolare

$$\text{A)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x^4 + 2x^2 + 1}\,\mathrm{d}x$$

$$\text{B)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^3 + x}\,\mathrm{d}x$$

usando il teorema dei residui.

**Soluzioni:**

1) **:** $\alpha$) La funzione

$$[0\,,1)\times[0\,,1)\ni(x\,,y)\longmapsto f(x\,,y)=\frac{1}{1-xy}$$

è positiva e continua, quindi misurabile. Perciò la sua sommabilità è equivalente alla finitezza dell'integrale

$$\int\limits_{[0\,,1)\times[0\,,1)}\frac{1}{1-xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,. \tag{1}$$

Per calcolare l'integrale (1) possiamo usare il teorema di Tonelli :

$$\int\limits_{[0\,,1)\times[0\,,1)}\frac{1}{1-xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int\limits_0^1\Bigg(\int\limits_0^1\frac{1}{1-xy}\,\mathrm{d}x\Bigg)\mathrm{d}y\,.$$

Poiché

$$\int\limits_0^1\frac{1}{1-xy}\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{y}\,\ln(1-xy)\Bigg|_{x=0}^{x=1}=-\frac{1}{y}\,\ln(1-y)\,,\qquad 0<y<1\,,$$

risulta

$$\begin{aligned}\int\limits_{[0\,,1)\times[0\,,1)}\frac{1}{1-xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y&=\int\limits_0^1\Bigg(-\frac{1}{y}\,\ln(1-y)\Bigg)\mathrm{d}y\\&=\int\limits_0^{1/2}\Bigg(-\frac{1}{y}\,\ln(1-y)\Bigg)\mathrm{d}y+\int\limits_{1/2}^1\Bigg(-\frac{1}{y}\,\ln(1-y)\Bigg)\mathrm{d}y \qquad (2)\\&\leq\int\limits_0^{1/2}\Bigg(-\frac{1}{y}\,\ln(1-y)\Bigg)\mathrm{d}y+2\int\limits_{1/2}^1\Big(-\ln(1-y)\Big)\mathrm{d}y\,.\end{aligned}$$

Ora, per il teorema di de l'Hôpital,

$$\lim_{0<y\to 0}\Bigg(-\frac{1}{y}\,\ln(1-y)\Bigg)=\lim_{0<y\to 0}\frac{1}{1-y}=1\,,$$

perciò la funzione

$$\big(0\,,1/2\big] \ni y \longmapsto -\frac{1}{y}\,\ln(1-y)$$

si estende per continuità su $\big[0\,,1/2\big]$ . Risulta

$$\int\limits_0^{1/2}\Big(-\frac{1}{y}\,\ln(1-y)\Big)\mathrm{d}y < +\infty\,.$$

D'altro canto

$$\int\limits_{1/2}^{1}\Big(-\ln(1-y)\Big)\mathrm{d}y \;=\Big((1-y)\ln(1-y)+y\Big)\Big|_{y=1/2}^{y=1} = \frac{1+\ln 2}{2}\,.$$

Cosicché la maggiorazione (2) implica la finitezza dell'integrale (1) e così la sommabilità di $f$.

$\beta$) Similmente come in $\alpha$), la funzione

$$[\,0\,,1)\times[\,0\,,1)\ni(x\,,y)\longmapsto f(x\,,y)=\frac{1}{(1-xy)^2}$$

è positiva e continua, quindi misurabile. Perciò la sua sommabilità è equivalente alla finitezza dell'integrale

$$\int\limits_{[\,0\,,1)\times[\,0\,,1)}\frac{1}{(1-xy)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,. \tag{3}$$

Per calcolare l'integrale (3) possiamo usare il teorema di Tonelli :

$$\int\limits_{[\,0\,,1)\times[\,0\,,1)}\frac{1}{(1-xy)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int\limits_0^1\Big(\int\limits_0^1\frac{1}{(1-xy)^2}\,\mathrm{d}x\Big)\mathrm{d}y\,.$$

Poiché

$$\int\limits_0^1\frac{1}{(1-xy)^2}\,\mathrm{d}x = -\,\frac{1}{y}\,\frac{1}{1-xy}\Big|_{x=0}^{x=1} = -\frac{1}{y}\Big(1-\frac{1}{1-y}\Big)$$

$$=\frac{1}{1-y}\,,\quad 0<y<1\,,$$

risulta

$$\int\limits_{[0,1)\times[0,1)} \frac{1}{(1-xy)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int\limits_0^1 \frac{1}{1-y}\,\mathrm{d}y = -\ln(1-y)\Big|_{y=0}^{y=1} = +\infty\,.$$

Cosicché l'integrale (3) è infinito, quindi $f$ non è sommabile.

## Osservazione.

Possiamo dimostrare che la funzione

$$[0\,,1)\times[0\,,1)\ni(x\,,y)\longmapsto\frac{1}{(1-xy)^p} \tag{4}$$

è sommabile esattamente quando $p<2\,$.

Infatti, poiché la funzione (4) è positiva e continua, quindi misurabile, la sua sommabilità è equivalente alla finitezza dell'integrale

$$\int\limits_{[0,1)\times[0,1)} \frac{1}{(1-xy)^p}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,. \tag{5}$$

Supponiamo prima che $p\leq 1\,$. Siccome

$$0\leq\frac{1}{(1-xy)^p}\leq\frac{1}{1-xy}\,,\qquad (x\,,y)\in[0\,,1)\times[0\,,1)$$

e, secondo $\alpha$), l'integrale (1) è finito, risulta che anche l'integrale (5) è finito. Cosicché la funzione (4) è sommabile.

Sia ora $1<p<2\,$. Per il teorema di Tonelli abbiamo

$$\int\limits_{[0,1)\times[0,1)} \frac{1}{(1-xy)^p}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int\limits_0^1\Bigg(\int\limits_0^1 \frac{1}{(1-xy)^p}\,\mathrm{d}x\Bigg)\mathrm{d}y\,.$$

Poiché

$$\begin{aligned}\int\limits_0^1 \frac{1}{(1-xy)^p}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{p-1}\,\frac{1}{y}\,\frac{1}{(1-xy)^{p-1}}\Bigg|_{x=0}^{x=1}\\ &= \frac{1}{p-1}\,\frac{1}{y}\Bigg(\frac{1}{(1-y)^{p-1}}-1\Bigg)\,,\quad 0<y<1\,,\end{aligned}$$

risulta

$$\int\limits_{[0,1)\times[0,1)} \frac{1}{(1-xy)^p}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{1}{p-1}\int\limits_0^1 \frac{1}{y}\left(\frac{1}{(1-y)^{p-1}} - 1\right)\mathrm{d}y\,.$$

Ma

$$\frac{1}{(1-y)^{p-1}} - 1 \leq \frac{y}{(1-y)^{p-1}}\,, \qquad 0 < y < 1\ :$$

Per ogni $0 < y < 1$, $\dfrac{1}{(1-y)^{p-1}} - 1 \leq \dfrac{y}{(1-y)^{p-1}}$ è equivalente a

$$(1-y)^{2-p} = \frac{1}{(1-y)^{p-2}} = \frac{1}{(1-y)^{p-1}} - \frac{y}{(1-y)^{p-1}} \leq 1$$

e questa disuguaglianza vale ovviamente perché $0 < 1-y < 1$ e $2-p > 0$.

Di conseguenza

$$\begin{aligned}\int\limits_{[0,1)\times[0,1)} \frac{1}{(1-xy)^p}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &\leq \frac{1}{p-1}\int\limits_0^1 \frac{1}{(1-y)^{p-1}}\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{p-1}\left(-\frac{1}{2-p}(1-y)^{2-p}\Big|_{y=0}^{y=1}\right) \\ &= \frac{1}{p-1}\cdot\frac{1}{2-p} < +\infty\,,\end{aligned}$$

cioè l'integrale (5) è finito. Cosicché la funzione (4) è anche in questo caso sommabile.

D'altro canto, per $p \geq 2$ la disuguaglianza

$$\frac{1}{(1-xy)^p} \geq \frac{1}{(1-xy)^2}\,, \qquad (x\,,y) \in [0\,,1)\times[0\,,1)$$

e l'infinitezza dell'integrale (3) in $\beta$) implicano l'infinitezza dell'integrale (5), cioè la non sommabilità della funzione (4).

**2) :** (i) Poiché le funzioni

$$[0\,,+\infty) \ni x \longmapsto \frac{e^{-sx^2}}{1+x^2}\,, \qquad s \in [0\,,+\infty) \tag{6}$$

sono continue, quindi misurabili, ed abbiamo

$$0 \leq \frac{e^{-sx^2}}{1+x^2} \leq \frac{1}{1+x^2}\,, \qquad x \in [0\,,+\infty)\,, s \in [0\,,+\infty)\,, \tag{7}$$

dove

$$[0\,,+\infty) \ni x \longmapsto \frac{1}{1+x^2}$$

è sommabile, le funzioni (6) sono sommabili. Perciò $F : [0\,,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ è ben definita.

Inoltre, siccome vale la condizione di dominanza (7) e le funzioni

$$[0\,,+\infty) \ni s \longmapsto \frac{e^{-sx^2}}{1+x^2}\,, \qquad x \in [0\,,+\infty)$$

sono continue, il teorema sulla dipendenza continua da parametri reali implica la continuità di $F$.

(ii) Siccome le funzioni

$$(0\,,+\infty) \ni s \longmapsto \frac{e^{-sx^2}}{1+x^2}\,, \qquad x \in [0\,,+\infty)$$

sono derivabili e, per ogni $\varepsilon > 0$, le derivate parziali

$$\frac{\partial}{\partial s}\,\frac{e^{-sx^2}}{1+x^2} = -\,\frac{x^2 e^{-sx^2}}{1+x^2}$$

ammettono la maggiorazione

$$\left|\frac{\partial}{\partial s}\,\frac{e^{-sx^2}}{1+x^2}\right| \leq e^{-\varepsilon x^2}\,, \qquad x \in [0\,,+\infty)\,, s \in [\varepsilon\,,+\infty)\,,$$

dove la funzione

$$[0\,,+\infty) \ni x \longmapsto e^{-\varepsilon x^2}$$

è sommabile, per il teorema sulla dipendenza derivabile da parametri reali la funzione $F$ è derivabile e vale la formula

$$F'(s) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial s}\,\frac{e^{-sx^2}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = -\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2 e^{-sx^2}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\,, \qquad s \in (0\,,+\infty)\,. \tag{8}$$

(iii) Usando la formula (8) deduciamo per ogni $s > 0$ :

$$\begin{aligned}
F'(s) - F(s) = &\quad - \int_0^{+\infty} \frac{x^2 e^{-sx^2}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-sx^2}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\
= &\quad - \int_0^{+\infty} \frac{(x^2+1)\,e^{-sx^2}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = - \int_0^{+\infty} e^{-sx^2}\mathrm{d}x \\
\overset{t=\sqrt{s}x}{=} &\quad - \frac{1}{\sqrt{s}} \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t = - \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{s}} \,.
\end{aligned}$$

**3) :** (a) Abbiamo

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to z_0} \frac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0} &= \lim_{z\to z_0} \frac{\overline{f(1/\overline{z})} - \overline{f(1/\overline{z}_0)}}{z-z_0} \\
&= \lim_{z\to z_0} \overline{\left( \frac{f(1/\overline{z}) - f(1/\overline{z}_0)}{\overline{z}-\overline{z}_0} \right)} \\
&= \overline{\left( \lim_{z\to z_0} \frac{f(1/\overline{z}) - f(1/\overline{z}_0)}{\overline{z}-\overline{z}_0} \right)} \\
&= \overline{\left( \lim_{z\to \overline{z}_0} \frac{f(1/z) - f(1/\overline{z}_0)}{z-\overline{z}_0} \right)} \\
&= \overline{\left( \frac{d}{dz} f(1/z) \right)}\Bigg|_{z=\overline{z}_0} .
\end{aligned}$$

Nella terza e nella quarta uguaglianza abbiamo usato la bicontinuità del coniugio, nell'ultima uguaglianza abbiamo usato la derivabilità in senso complesso della composizione $f(1/z)$.

Quindi, per ogni $z_0 \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{\Delta}_{1/r}$ , la funzione $g$ è derivabile in senso complesso in $z_0$ e il valore della derivata di $g$ in $z_0$ è $\overline{\left( \frac{d}{dz} f(1/z) \right)}\Bigg|_{z=\overline{z}_0}$ .

(b) Sia $\widetilde{h} : \mathbb{C} \setminus \overline{\Delta}_{1/r} \to \mathbb{C}$ la funzione definita ponendo $\widetilde{h}(z) := \overline{h(1/\overline{z})}$ . Per il punto (a) la funzione $\widetilde{h}$ è olomorfa.

Siccome $h$ e $\widetilde{h}$ sono olomorfe nei loro domini e l'unione dei loro domini è $\Delta_2 \cup \big(\mathbb{C} \setminus \overline{\Delta}_{1/2}\big) = \mathbb{C}$ , se le restrizioni di $h$ e $\widetilde{h}$ all'intersezione dei loro domini $\Delta_2 \setminus \overline{\Delta}_{1/2}$ coincidono, allora $h$ e $\widetilde{h}$ si incollano ad una funzione olomorfa su tutto $\mathbb{C}$.

Siccome $\Delta_2 \setminus \overline{\Delta}_{1/2}$ è connesso, le restrizioni di $h$ e $\widetilde{h}$ sono uguali su $\Delta_2 \setminus \overline{\Delta}_{1/2}$ se e solo se sono uguali su un qualsiasi sottoinsieme non discreto di $\Delta_2 \setminus \overline{\Delta}_{1/2}$. Quindi basta mostrare che $h(z) = \widetilde{h}(z)$ per ogni $z \in \partial\Delta_1$. Se $z \in \partial\Delta_1$ si ha

$$\widetilde{h}(z) := \overline{h}(1/\overline{z}) = \overline{h}(z) = h(z)\,.$$

La terza uguaglianza vale perché, se $|z| = 1$, allora $z = 1/\overline{z}$ e la quarta uguaglianza è vera perché $h(z) \in \mathbb{R}$.

(c) Per il teorema di Liouville sarà sufficiente mostrare che l'estensione olomorfa di $h$ a tutto $\mathbb{C}$ è limitata. Siccome tale estensione è continua, basterà mostrare che essa ammette limite finito per $z$ che tende a $\infty$. Per $|z| > 2$ il valore della nostra estensione di $h$ a $\mathbb{C}$ è $\widetilde{h}(z) = \overline{h}(1/\overline{z})$ e si ha

$$\lim_{z\to\infty} \overline{h}(1/\overline{z}) = \lim_{z\to 0} \overline{h}(z) = \overline{h}(0)\,.$$

Nella prima uguaglianza abbiamo usato il cambio di variabile continuo $z \mapsto \dfrac{1}{\overline{z}}$ e nella secondala continuità di $\overline{h}$.

(d) Per il teorema della funzione aperta, se $k$ non è costante, l'immagine dell'interno $U$ di $R$ deve essere un aperto. Siccome l'insieme dei numeri reali non contiene nessun aperto di $\mathbb{C}$, basterà mostrare che, nelle nostre ipotesi l'immagine dell'interno di $R$ è incluso in $\mathbb{R}$. Un punto $w \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ appartiene a $k(U)$ se e soltanto se la funzione $k(z) - w$ si annulla in qualche punto di $U$. Per il principio dell'argomento, siccome $k(z) - w$ è olomorfa in un intorno di $R$, essa si annulla in qualche punto di $U$ se e solo se l'indice di avvolgimento intorno a 0 della curva orientata immagine di $\partial R$ tramite $k(z) - w$ è non nullo. Tale indice eguaglia l'indice di avvolgimento di $k(\partial R)$ intorno a $w$. Siccome $k(\partial R)$ è un segmento incluso in $\mathbb{R}$, l'indice di avvolgimento di $k(\partial R)$ intorno a $w$ è nullo. Quindi ogni $w$ non reale non appartiene a $K(U)$ e, di conseguenza, $k(U)$ non è aperto. Ne segue che $k$ è costante.

**4) :** A) La funzione integranda è continua e il suo modulo è dominato da $1/|x^3|$ per $|x| \to +\infty$. L'integrale improprio proposto è quindi convergente. Sia $\gamma_{1,r}$ il segmento reale orientato compreso tra $-r$ e $r$ e sia $\gamma_{2,r}$ la semicirconferenza di centro 0 e raggio $r$ inclusa nel semipiano superiore di $\mathbb{C}$ orientata in senso antiorario.

Siccome l'integrale improprio converge, abbiamo

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x^4+2x^2+1}\,\mathrm{d}x = \Re e\left(\lim_{r\to+\infty}\int_{\gamma_{1,r}} \frac{e^{iz}}{z^4+2z^2+1}\,\mathrm{d}z\right).$$

Nel semipiano superiore la funzione $f(z) := \dfrac{e^{iz}}{z^4+2z^2+1}$ è olomorfa ovunque eccetto nel punto $i$, dove ammette un polo doppio. Per il teorema dei residui otteniamo

$$\lim_{r\to+\infty}\int_{\gamma_{1,r}} \frac{e^{iz}}{z^4+2z^2+1}\,\mathrm{d}z = Res(f,i) - \lim_{r\to+\infty}\int_{\gamma_{2,r}} \frac{e^{iz}}{z^4+2z^2+1}\,\mathrm{d}z.$$

Per ogni $z = a+ib$ nel supporto di $\gamma_{2,r}$ si ha $|e^{iz}| = e^{-b} \le 1$, e siccome il denominatore è polinomio di quarto grado, per il lemma del grande cerchio otteniamo

$$\lim_{r\to+\infty}\int_{\gamma_{2,r}} \frac{e^{iz}}{z^4+2z^2+1}\,\mathrm{d}z = 0\,.$$

Siccome $i$ è un polo di ordine 2 abbiamo

$$\begin{aligned} Res(f,i) &= 2\pi i \lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\big((z-i)^2 f(z)\big) = 2\pi i \lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\frac{e^{iz}}{(z+i)^2} \\ &= 2\pi i \lim_{z\to i}\frac{ie^{iz}(z+i)^2 - 2e^{iz}(z+i)}{(z+i)^4} \\ &= 2\pi i \lim_{z\to i} e^{iz}\frac{i(z+i)-2}{(z+i)^3} \\ &= 2\pi i\,\frac{1}{e}\,\frac{-4}{-8i} = \frac{\pi}{e}\,. \end{aligned}$$

In conclusione otteniamo

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x^4+2x^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{e}\,.$$

B) La funzione integranda ha una sola discontinuità eliminabile in $0$, è continua altrove e il suo modulo è dominato da $1/|x^2|$ per $|x| \to +\infty$. L'integrale improprio proposto è quindi convergente.

Sia $\alpha_{1,r}$ il segmento reale orientato compreso tra $1/r$ e $r$, sia $\alpha_{2,r}$ la semicirconferenza di centro 0 e raggio $r$ inclusa nel semipiano superiore di $\mathbb{C}$ orientata in senso antiorario, sia $\alpha_{3,r}$ il segmento reale orientato compreso tra $-r$ e $-1/r$, sia infine $\alpha_{4,r}$ la semicirconferenza di centro 0 e raggio $1/r$ inclusa nel semipiano superiore di $\mathbb{C}$ orientata in senso orario.

Siccome l'integrale improprio converge, abbiamo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^3+x}\,\mathrm{d}x = \Im m\left(\lim_{r\to+\infty}\left(\int_{\alpha_{1,r}} \frac{e^{iz}}{z^3+z}\,\mathrm{d}z + \int_{\alpha_{3,r}} \frac{e^{iz}}{z^3+z}\,\mathrm{d}z\right)\right).$$

Nel semipiano superiore la funzione $g(z) := \dfrac{e^{iz}}{z^3+z}$ è olomorfa ovunque eccetto nel punto $i$, dove ammette un polo semplice. Per il teorema dei residui otteniamo

$$\begin{aligned}&\lim_{r\to+\infty}\left(\int_{\alpha_{1,r}} \frac{e^{iz}}{z^3+z}\,\mathrm{d}z + \int_{\alpha_{3,r}} \frac{e^{iz}}{z^3+z}\,\mathrm{d}z\right)\\ &= Res(g,i) - \lim_{r\to+\infty}\left(\int_{\alpha_{2,r}} \frac{e^{iz}}{z^3+z}\,\mathrm{d}z + \int_{\alpha_{4,r}} \frac{e^{iz}}{z^3+z}\,\mathrm{d}z\right).\end{aligned}$$

Per ogni $z = a+ib$ nel supporto di $\alpha_{2,r}$ si ha $|e^{iz}| = e^{-b} \le 1$, e siccome il denominatore è polinomio di terzo grado, per il lemma del grande cerchio otteniamo

$$\lim_{r\to+\infty}\int_{\alpha_{2,r}} \frac{e^{iz}}{z^3+z}\,\mathrm{d}z = 0\,.$$

Inoltre $g$ presenta un polo semplice in 0 e, siccome $\alpha_{4,r}$ percorre un angolo di ampiezza $\pi$ in senso orario, per il lemma del piccolo cerchio otteniamo

$$\lim_{r\to+\infty}\int_{\alpha_{4,r}} \frac{e^{iz}}{z^3+z}\,\mathrm{d}z = -\pi i \lim_{z\to 0} zg(z) = -\pi i \lim_{z\to 0}\frac{e^{iz}}{z^2+1} = -\pi i\,.$$

Infine, siccome $i$ è un polo semplice per $g$, abbiamo

$$Res(g,i) = 2\pi i \lim_{z\to i}(z-i)g(z) = 2\pi i \lim_{z\to i} \frac{e^{iz}}{z^2+iz} = \frac{2\pi i}{-2e} = -\frac{\pi i}{e}\,.$$

In conclusione otteniamo

$$\lim_{r\to+\infty}\left(\int_{\alpha_{1,r}} \frac{e^{iz}}{z^3+z}\,\mathrm{d}z + \int_{\alpha_{1,3}} \frac{e^{iz}}{z^3+z}\,\mathrm{d}z\right) = -\frac{\pi i}{e} + \pi i = \pi i\,\frac{e-1}{e}$$

e quindi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^3+x}\,\mathrm{d}x = \Im m\left(\pi i\,\frac{e-1}{e}\right) = \pi\,\frac{e-1}{e}\,.$$