NOME: ....   **MATRICOLA:** ....

Corso di Laurea in Fisica, A.A. 2011/2012
Calcolo 1, Esame scritto del 26.01.2012

1) Data la funzione

$$f(x) = \frac{1}{x}\, e^{\frac{x+1}{x}} ,$$

a) determinare il dominio (massimale) di f ;

b) trovare tutti gli asintoti di f ;

c) trovare tutti i massimi e minimi locali di f ;

d) studiare la convessità di f ;

e) tracciare un grafico qualitativo di f .

2) Studiare la convergenza delle serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(2\pi\left(k+\frac{1}{k}\right)^2\right) \quad \text{e} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(2\pi\left(k+\frac{1}{k}\right)^3\right) .$$

Sugerimento: si sviluppino $\left(k+\frac{1}{k}\right)^2$ e $\left(k+\frac{1}{k}\right)^3$ e poi si tenga conto che la funzione sin è periodica di periodo 2π .

3) Trovare una primitiva della funzione

$$f(x) = \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2}\,, \qquad x > 0$$

e calcolare l'integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

4) Sia data in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ la forma differenziale

$$\omega = \frac{2x + y}{x^2 + 2y^2 + xy}\,dx + \frac{x + 2\alpha y}{x^2 + 2y^2 + xy}\,dy\,,$$

dove α è un parametro reale.

a) Determinare i valori del parametro α per quali la forma ω è chiusa.

b) Determinare i valori del parametro α per quali la forma ω è esatta e trovare per ogniuno di questi valori una primitiva di ω.

c) Per ogni α per quale ω è esatta, calcolare l'integrale curvilineo $\int_\gamma \omega$ dove γ è la curva data dal grafico della funzione $y = 1 + \sqrt{x}$ per $x \in [0\,,4]$.

Soluzioni:

1) **:** a) $f(x)$ è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$ per quale ha senso $\dfrac{1}{x}$. Perciò il dominio di f è $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

b) Per trovare gli asintoti verticali calcoliamo i seguenti limiti :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0+0} f(x) &= \lim_{x\to 0+0} \frac{1}{x}\, e^{\frac{x+1}{x}} = \lim_{x\to 0+0} \frac{1}{x}\, e^{1+\frac{1}{x}} \\
&\overset{t=\frac{1}{x}}{=} \lim_{t\to +\infty} t e^{1+t} \\
&= +\infty\, , \\
\lim_{x\to 0-0} f(x) &= \lim_{x\to 0-0} \frac{1}{x}\, e^{\frac{x+1}{x}} = \lim_{x\to 0-0} \frac{1}{x}\, e^{1+\frac{1}{x}} \\
&\overset{t=\frac{1}{x}}{=} \lim_{t\to -\infty} t\, e^{1+t} \\
&\overset{s=-t}{=} \lim_{s\to +\infty} \frac{-\,s\,e}{e^s} \\
&= 0\, .
\end{aligned}$$

Risulta che, ponendo $f(0)=0$, f si estende ad una funzione su $\mathbb{R}$ che è continua a sinistra in $x=0$ e per quale la retta verticale $x=0$ è un asintoto verticale a destra.

Si vede poi subito che

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x}\, e^{\frac{x+1}{x}} = 0$$

e perciò la retta $y=0$ è un asintoto orizzontale sia per $x \to +\infty$ che per $x \to -\infty$.

c) Per trovare gli intervalli di monotonia e gli extremi locali di f, dobbiamo prima calcolare la sua derivata :

$$f'(x) = \left(-\,\frac{1}{x^2}\right) e^{1+\frac{1}{x}} + \frac{1}{x}\, e^{1+\frac{1}{x}} \left(-\,\frac{1}{x^2}\right) = -\,\frac{x+1}{x^3}\, e^{1+\frac{1}{x}}\ .$$

Risulta che il solo zero di f' è -1 e

$$f' \text{ è } < 0 \text{ in } \big(-\infty\, , -1\big)\, ,$$

$$f' \text{ è } > 0 \text{ in } \big(-1\,,0\big)\,,$$
$$f' \text{ è } < 0 \text{ in } \big(0\,,+\infty\big)\,.$$

Cosicché f risulta ad essere

$$\text{strettamente decrescente in } \big(-\infty\,,-1\big)\,,$$
$$\text{strettamente crescente in } \big(-1\,,0\big)\,,$$
$$\text{strettamente decrescente in } \big(0\,,+\infty\big)\,.$$

In particolare -1 è un punto di minimo locale ed il valore di minimo locale corrispondente è $f(-1) = -1$.

d) Per studiare la convessità di f calcoliamo la sua seconda derivata :

$$\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\left(-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)e^{1+\frac{1}{x}}\right)\\
&= \left(\frac{2}{x^3}+\frac{3}{x^4}\right)e^{1+\frac{1}{x}} + \left(-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)e^{1+\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)\\
&= \left(\frac{2}{x^3}+\frac{4}{x^4}+\frac{1}{x^5}\right)e^{1+\frac{1}{x}}\\
&= \frac{2x^2+4x+1}{x^5}\,e^{1+\frac{1}{x}}\,.
\end{aligned}$$

Risulta che f'' si annulla nei punti

$$-1-\frac{1}{\sqrt{2}} \approx -1,7071\,, \qquad -1+\frac{1}{\sqrt{2}} \approx -0,2929$$

e

$$f'' \text{ è } < 0 \text{ in } \left(-\infty\,,-1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$
$$f'' \text{ è } > 0 \text{ in } \left(-1-\frac{1}{\sqrt{2}}\,,-1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$
$$f'' \text{ è } < 0 \text{ in } \left(-1-\frac{1}{\sqrt{2}}\,,0\right),$$
$$f'' \text{ è } > 0 \text{ in } \big(0\,,+\infty\big)\,.$$

Di conseguenza f è

$$
\begin{aligned}
&\text{concava in } \left(-\infty\,, -1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right],\\
&\text{convessa in } \left[-1-\frac{1}{\sqrt{2}}\,, -1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right],\\
&\text{concava in } \left[-1+\frac{1}{\sqrt{2}}\,, 0\right],\\
&\text{convessa in } \big(0\,, +\infty\big)
\end{aligned}
$$

ed ha quindi due punti di flesso :

$$a := -1-\frac{1}{\sqrt{2}} \approx -1,7071\,, \qquad b := -1+\frac{1}{\sqrt{2}} \approx -0,2929\,.$$

I valori di f e f' in a sono

$$
\begin{aligned}
f\left(-1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) &= \left(-2+\sqrt{2}\right)e^{\sqrt{2}-1} \approx -0,8864\,,\\
f'\left(-1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) &= \left(14-10\sqrt{2}\right)e^{\sqrt{2}-1} \approx -0,2151\,,
\end{aligned}
$$

mentre in b abbiamo

$$
\begin{aligned}
f\left(-1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right) &= \left(-2-\sqrt{2}\right)e^{-1-\sqrt{2}} \approx -0,3054\,,\\
f'\left(-1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right) &= \left(14+10\sqrt{2}\right)e^{-1-\sqrt{2}} \approx 2,517\,.
\end{aligned}
$$

e) Riportiamo il comportamento di f', f'' e f nella seguente tabella :

x	$-\infty$		$-1-1/\sqrt{2}$		-1		$-1+1/\sqrt{2}$		0		$+\infty$
f'		$-$	$(-14-10\sqrt{2})\,e^{\sqrt{2}-1}$	$-$	0	$+$	$(-14+10\sqrt{2})\,e^{\sqrt{2}-1}$	$+$	$0\,\vert$	$-$	
f''		$-$	0		$+$		0	$-$	$\vert$	$+$	
f	0	$\searrow$	$(-2+\sqrt{2})\,e^{\sqrt{2}-1}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$(-2-\sqrt{2})\,e^{-1-\sqrt{2}}$	$\nearrow$	$0\,\vert+\infty$	$\searrow$	0

Ora abbiamo tutte le informazioni per tracciare il grafico di f :

$y=0$ è asintoto orizzontale di f per $x\to -\infty$. Il grafico di f scende da 0 fino al punto di minimo locale $\big(-1\,, -1\big)$, nel quale ha tangente orizzontale, attraversando il punto di flesso

$$\left(-1-\frac{1}{\sqrt{2}}\,,\left(-2+\sqrt{2}\right)e^{\sqrt{2}-1}\right)\approx\left(-1,7071\,,-0,8864\right),$$

dove ha tangente con il coefficiente angolare uguale a

$$\left(14-10\sqrt{2}\right)e^{\sqrt{2}-1}\approx -0,2151\ .$$

Prima del punto di flesso il grafico è concavo e poi diventa convesso.

Dal punto di minimo locale $\left(-1\,,-1\right)$ il grafico di f sale fino al punto $\left(0\,,0\right)$, nel quale ha semiretta tangente orizzontale a sinistra, passando attraverso il punto di flesso

$$\left(-1+\frac{1}{\sqrt{2}}\,,\left(-2-\sqrt{2}\right)e^{-1-\sqrt{2}}\right)\approx\left(-0,2929\,,-0,3054\right),$$

dove ha tangente con il coefficiente angolare uguale a

$$\left(14+10\sqrt{2}\right)e^{-1-\sqrt{2}}\approx 2,517\ .$$

Prima del punto di flesso il grafico è convesso e poi diventa concavo.

Finalmente, con $x=0$ asintoto verticale a destra, il grafico di f scende da $+\infty$ avvicinando sempre di più l'asintoto orizzontale $y=0$ per $x\to+\infty$. In questo tratto il grafico di f è convesso.

2) **:** Per la periodicità di sin abbiamo

$$\begin{aligned}\sin\left(2\pi\left(k+\frac{1}{k}\right)^2\right) &= \sin\left(2\pi\left(k^2+2+\frac{1}{k^2}\right)\right)\\ &= \sin\left(2\pi\left(k^2+2\right)+\frac{2\pi}{k^2}\right)\\ &= \sin\frac{2\pi}{k^2}\ .\end{aligned}$$

Poiché

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\sin\dfrac{2\pi}{k^2}}{\dfrac{2\pi}{k^2}}\overset{t=\frac{2\pi}{k^2}}{=}\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$$

e la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2\pi}{k^2}=2\pi\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$$

converge, il criterio del confronto asintotico implica la convergenza della serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(2\,\pi\Big(k+\frac{1}{k}\Big)^2\right)\ .$$

Similmente, poiché

$$\begin{aligned}\sin\left(2\,\pi\Big(k+\frac{1}{k}\Big)^3\right) &= \sin\left(2\,\pi\Big(k^3+3\,k+3\,\frac{1}{k}+\frac{1}{k^3}\Big)\right)\\ &= \sin\left(2\,\pi\big(k^3+3\,k\big)+\frac{6\,\pi}{k}+\frac{2\,\pi}{k^3}\right)\\ &= \sin\left(\frac{6\,\pi}{k}+\frac{2\,\pi}{k^3}\right)\ .\end{aligned}$$

e

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\sin\left(\dfrac{6\,\pi}{k}+\dfrac{2\,\pi}{k^3}\right)}{\dfrac{6\,\pi}{k}+\dfrac{2\,\pi}{k^3}} \overset{t=\frac{6\,\pi}{k}+\frac{2\,\pi}{k^3}}{=} \lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = 1\ ,$$

la divergenza della serie

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{6\,\pi}{k}+\frac{2\,\pi}{k^3}\right) = 6\,\pi\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}}_{\text{divergente}} + 2\,\pi\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3}}_{\text{convergente}}$$

ed il criterio del confronto asintotico implicano la divergenza della serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(2\,\pi\Big(k+\frac{1}{k}\Big)^3\right)\ .$$

Rimarco 1.

Si può mostrare che la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(2\,\pi\Big(k+\frac{1}{k}\Big)^n\right)$$

converge per ogni numero naturale pari $n \geq 2$ e diverge per ogni numero naturale dispari $n \geq 1$.

Rimarco 2.

Si può mostrare che per ogni $0 < \alpha < 1$ il termine generale della serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(2\pi\left(k + \frac{1}{k}\right)^{\alpha}\right)$$

non converge a 0, quindi la serie non converge.

3) **:** Poiché la derivata di $\operatorname{arctg} x$ è razionale e $\frac{1}{x^2}$ ha la primitiva razionale $-\frac{1}{x}$, tramite integrazione per parti possiamo ridurre il calcolo delle primitive di

$$f(x) = \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2}\,, \qquad x > 0$$

all'integrazione di una funzione razionale :

$$\begin{aligned}\int \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2}\,\mathrm{d}x &= \int \operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}\left(-\frac{1}{x}\right) \\ &= -\frac{\operatorname{arctg} x}{x} + \int \frac{1}{x\,(1+x^2)}\,\mathrm{d}x\,.\end{aligned}$$

Lo sviluppo di $\dfrac{1}{x\,(1+x^2)}$ in fratti semplici è dalla forma

$$\frac{1}{x\,(1+x^2)} = \frac{a}{x} + \frac{b\,x + c}{1+x^2}$$

ed allora

$$1 = a\,(1+x^2) + (b\,x + c)\,x\,.$$

Risultano

$$a = 1\,, \quad b = -1\,, \quad c = 0$$

e di conseguenza

$$\begin{aligned}\int \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2}\,\mathrm{d}x &= -\frac{\operatorname{arctg} x}{x} + \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x - \int \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{\operatorname{arctg} x}{x} + \ln x - \frac{1}{2}\int \frac{(1+x^2)'}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$= -\frac{\operatorname{arctg} x}{x} + \ln x - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + C$$
$$= -\frac{\operatorname{arctg} x}{x} + \frac{1}{2}\ln\frac{x^2}{1+x^2} + C\ .$$

Ora il calcolo dell'integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

è immediato :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \lim_{b\to+\infty} \int_1^{b} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \lim_{b\to+\infty} \left(-\frac{\operatorname{arctg} x}{x} + \frac{1}{2}\ln\frac{x^2}{1+x^2}\,\Bigg|_{x=1}^{x=b} \right) =$$
$$= \lim_{b\to+\infty} \left(-\frac{\operatorname{arctg} b}{b} + \frac{1}{2}\ln\frac{b^2}{1+b^2} + \frac{\operatorname{arctg} 1}{1} - \frac{1}{2}\ln\frac{1^2}{1+1^2} \right) =$$
$$= -0 + 0 + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln\frac{1}{2} =$$
$$= \frac{\pi}{4} + \frac{\ln 2}{2}\ .$$

4) **:** Ricordiamo che una forma differenziale

$$\omega = P(x\,,y)\,\mathrm{d}x + Q(x\,,y)\,\mathrm{d}y\ ,$$

dove P e Q sono funzioni continue definite su un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^2$, si chiama *esatta* se ammette una *primitiva*, cioè una funzione $F(x\,,y)$ definita sul dominio comune di P e Q che soddisfa le condizioni

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P\,, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = Q\ . \tag{*}$$

Allora l'integrale $\int\limits_\gamma \omega$ di ω lungo un cammino regolare a tratti

$$\gamma : [a\,,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

è uguale a $F\big(\gamma(b)\big) - F\big(\gamma(a)\big)$.

Ammettiamo ora che P e Q sono continuamente differenziabili. Allora la forma ω si chiama *chiusa* se

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}\ .$$

Per il teorema di Schwarz sulle derivate parziali di second'ordine, se ω è esatta allora è necessariamente chiusa :

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}\ .$$

L'implicazione reciproca in generale non è vera, ma se ω è chiusa ed il dominio di P e Q è stellato (un dominio convesso è stellato !), allora ω risulta d'essere esatta.

a) Nel nostro caso

$$P(x\,y) = \frac{2\,x+y}{x^2+2\,y^2+xy}\,, \qquad Q(x\,,y) = \frac{x+2\,\alpha\,y}{x^2+2\,y^2+xy}$$

perciò ω è chiusa esattamente quando

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{x^2+2\,y^2+xy-(2\,x+y)\,(4\,y+x)}{(x^2+2\,y^2+xy)^2}$$

è uguale a

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{x^2+2\,y^2+xy-(x+2\,\alpha\,y)\,(2\,x+y)}{(x^2+2\,y^2+xy)^2}\ .$$

Risultano le condizioni equivalenti

$$\begin{aligned}(2\,x+y)\,(4\,y+x) = (x+2\,\alpha\,y)\,(2\,x+y)\,, &\quad (x\,,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\big\{(0,0)\big\}\,,\\ 4\,y+x = x+2\,\alpha\,y\,, &\quad (x\,,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\big\{(0,0)\big\}\,,\\ \alpha = 2\,. &\end{aligned}$$

b) La forma ω può essere esatta soltanto se è chiusa, quindi soltanto se $\alpha = 2$. Poiché il dominio $\mathbb{R}^2\setminus\big\{(0,0)\big\}$ di ω non è stellato, il solo modo di rendersene conto se per questo α la forma ω è esatta o no è di

– o produrre una primitiva per ω , verificando così l'esattezza di γ ,

– o indicare un cammino regolare a tratti e chiuso γ in $\mathbb{R}^2 \setminus \big\{(0,0)\big\}$ per quale $\displaystyle\int_\gamma \omega \neq 0$, verificando in questo modo la non-esattezza di ω .

Cerchiamo prima di trovare una primitiva F risolvendo il sistema (*) . A questo fine integriamo P rispetto ad x ottenendo

$$\begin{aligned} F(x\,,y) &= \int \frac{2\,x+y}{x^2+2\,y^2+xy}\,\mathrm{d}x = \int \frac{(x^2+2\,y^2+xy)'}{x^2+2\,y^2+xy}\,\mathrm{d}x \\ &= \ln\big(x^2+2\,y^2+xy\big)+C(y)\,, \end{aligned}$$

ove $C(y)$ è un valore costante rispetto ad x , ossia una funzione solo di y . Ora scegliamo $C(y)$ tale che anche la seconda equazione del sistema (*) (con $\alpha = 2$!) sia soddisfatta : poiché

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial y}(x\,,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\Big(\ln\big(x^2+2\,y^2+xy\big)+C(y)\Big) \\ &= \frac{x+4\,y}{x^2+2\,y^2+xy}+C'(y) \end{aligned}$$

sia uguale a

$$Q(x,y) = \frac{x+4\,y}{x^2+2\,y^2+xy}\ ,$$

deve valere $C'(y) = 0 \iff C(y)$ costante. Di conseguenza le funzioni

$$F(x\,,y) = \ln\big(x^2+2\,y^2+xy\big)+C$$

sono ben definite primitive di ω e quindi per $\alpha = 2$ la forma differenziale ω è non solo chiusa, ma addirittura esatta.

c) Usando le primitive trovate per ω nel caso di esattezza $\alpha = 2$, è facile calcolare in questo caso integrale di ω lungo la curva γ indicata

$$\gamma : \big[0\,,4\big] \ni x \longmapsto \big(x\,,1+\sqrt{x}\big) \in \mathbb{R}^2$$

che ha le estremità $\gamma(0) = \bigl(0\,,1\bigr)$ e $\gamma(4) = \bigl(4\,,3\bigr)$:

$$\begin{aligned}\int_\gamma \omega = F\bigl(\gamma(4)\bigr) - F\bigl(\gamma(0)\bigr) &= F(4\,,3) - F(0\,,1) \\ &= \ln\bigl(16+18+12\bigr) - \ln\bigl(0+2+0\bigr) = \ln 46 - \ln 2 \\ &= \ln 23\,.\end{aligned}$$