NOME: .... **MATRICOLA:** ....

Corso di Laurea in Matematica, A.A. 2011/2012
Analisi Reale e Complessa, Esame del 26.09.2012

1) Si verifichi che la formula

$$F(s) := \int_0^1 \ln \frac{1+s^2x^2}{1-s^2x^2}\,\mathrm{d}x$$

definisce una funzione continua $F : \big[\,0\,,1\big) \longrightarrow \mathbb{R}$ che è derivabile in $\big(\,0\,,1\big)$. Si calcoli la derivata $F'(s)$ per ogni $s \in \big(\,0\,,1\big)$.

2) Sia f una funzione intera la cui immagine non interseca la circonferenza unitaria $\big\{z \in \mathbb{C}\,;\,|z| = 1\big\}$. Mostrare che f è costante.

3) Si mostri che la funzione $f(z) = e^{1/z}$, definita sul piano complesso senza l'origine, assume il valore -1 infinite volte su ogni intorno puntato

$$\{z \in \mathbb{C}\,;\, 0 < |z| < \varepsilon\}$$

dell'origine. Se ne deduca che l'origine è una singolarità essenziale per f.

4) Si calcoli l'integrale improprio

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+x^2}{1+x^4}\,\mathrm{d}x = \lim_{r\to+\infty} \int_{-r}^{r} \frac{1+x^2}{1+x^4}\,\mathrm{d}x$$

usando il teorema dei residui per una curva chiusa regolare a tratti adatta nel semipiano superiore.

Soluzioni:

1) **:** Anzitutto F è ben definita in $\big[0\,,1\big)$ perché la funzione

$$\big[0\,,1\big] \ni x \longmapsto \ln\frac{1+s^2x^2}{1-s^2x^2} \in \mathbb{R}$$

è continua e quindi sommabile per ogni $s \in \big[0\,,1\big)$.

Per la continuità di F in $\big[0\,,1\big)$ basta provare che, per ogni $0 < s_o < 1$, F è continua in $\big[0\,,s_o\big)$. Ma poiché

$$0 \leq \ln\frac{1+s^2x^2}{1-s^2x^2} \leq \ln\frac{2}{1-s_o^2}\,, \qquad x \in \big[0\,,1\big]\,,\ s \in \big[0\,,s_o\big)\,,$$

dove la funzione costante $\dfrac{2}{1-s_o^2}$ è sommabile su $\big[0\,,1\big]$, e

$$\big[0\,,s_o\big) \ni s \longmapsto \ln\frac{1+s^2x^2}{1-s^2x^2} \text{ è continua per ogni } x \in \big[0\,,1\big]\,,$$

per il teorema sulla dipendenza continua da parametri reali risulta la continuità di F in $\big[0\,,s_o\big)$.

Riguardante la derivabilità di F in $\big(0\,,1\big)$ ed il calcolo della derivata F' nei punti di $\big(0\,,1\big)$, basta di nuovo considerare F su un intervallo $\big(0\,,s_o\big)$ con $0 < s_o < 1$ arbitrario. Possiamo applicare il teorema sulla derivazione sotto il segno di integrale perché per ogni $x \in \big[0\,,1\big]$ esiste la derivata parziale

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial s}\ln\frac{1+s^2x^2}{1-s^2x^2} &= \frac{1-s^2x^2}{1+s^2x^2}\cdot\frac{2\,s\,x^2(1-s^2x^2)+2\,s\,x^2(1+s^2x^2)}{(1-s^2x^2)^2}\\ &= \frac{4\,s\,x^2}{1-s^4x^4}\end{aligned}$$

ed abbiamo la maggiorazione uniforme

$$\left|\frac{\partial}{\partial s}\ln\frac{1+s^2x^2}{1-s^2x^2}\right| \leq \frac{4}{1-s_o^4}\,, \qquad x \in \big[0\,,1\big]\,,\ s \in \big(0\,,s_o\big).$$

Così F risulta derivabile in $\big(0\,,s_o\big)$ ed abbiamo

$$F'(s) = \int\limits_0^1 \frac{\partial}{\partial s}\ln\frac{1+s^2x^2}{1-s^2x^2}\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \frac{4\,s\,x^2}{1-s^4x^4}\,\mathrm{d}x\,, \qquad s \in \big(0\,,s_o\big).$$

Per calcolare l'integrale alla parte destra, svolgiamo (come si è visto nell'Analisi 1) la decomposizione in fratti semplici

$$\frac{4\,s\,x^2}{1-s^4x^4} = \frac{a}{1-s\,x} + \frac{b}{1+s\,x} + \frac{c\,x+d}{1+s^2x^2}\ .$$

Si trovano

$$a = b = \frac{1}{s}\,, \quad c = 0\,, \quad d = -\,\frac{2}{s}\ :$$

Infatti,

$$\begin{aligned}
&4\,s\,x^2\\
&= a\,(1+s\,x)(1+s^2x^2) + b\,(1-s\,x)(1+s^2x^2) + (c\,x+d)(1-s^2x^2)\\
&= (a\,s^3 - b\,s^3 - c\,s^2)\,x^3 + (a\,s^2 + b\,s^2 - d\,s^2)\,x^2\\
&\qquad\qquad\qquad + (a\,s - b\,s + c)\,x + a + b + d
\end{aligned}$$

implica

$$\left\{\begin{aligned} a\,s^3 - b\,s^3 - c\,s^2 &= \ 0\\ a\,s^2 + b\,s^2 - d\,s^2 &= 4\,s\\ a\,s - b\,s + c &= \ 0\\ a + b + d &= \ 0 \end{aligned}\right.\ ,$$

cioè

$$\left\{\begin{aligned} a\,s - b\,s - c &= 0\\ a\,s + b\,s - d\,s &= 4\\ a\,s - b\,s + c &= 0\\ a + b + d &= 0 \end{aligned}\right.\ .$$

Dalla prima e la terza equazione si ottiene prima che $c = 0$, e poi $a = b$. Ora dalla quarta equazione risulta che $d = -\,2\,a$ e così la seconda equazione si trasforma in

$$4\,a\,s = 4 \iff a = \frac{1}{s}\ .$$

Risulta per ogni $s \in \big(0\,, s_o\big)$

$$F'(s) = \frac{1}{s}\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1-s\,x} + \frac{1}{s}\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+s\,x} - \frac{2}{s}\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+s^2x^2}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{1}{s^2}\ln(1-s\,x)\Big|_{x=0}^{x=1} + \frac{1}{s^2}\ln(1+s\,x)\Big|_{x=0}^{x=1} - \frac{2}{s^2}\operatorname{arctg}(s\,x)\Big|_{x=0}^{x=1} \\
&= -\frac{1}{s^2}\ln(1-s) + \frac{1}{s^2}\ln(1+s) - \frac{2}{s^2}\operatorname{arctg}(s) \\
&= \frac{1}{s^2}\ln\frac{1+s}{1-s} - \frac{2}{s^2}\operatorname{arctg}(s)\,.
\end{aligned}
$$

Approfondimenti.

(a) In verità la formula

$$F(s) := \int\limits_0^1 \ln\frac{1+s^2x^2}{1-s^2x^2}\,\mathrm{d}x$$

definisce una funzione continua $F : \big[\,0\,,1\big] \longrightarrow \mathbb{R}$. Per la dimostrazione si usa il teorema sulla dipendenza continua da parametri reali tenendo conto dalla maggiorazione uniforme

$$0 \le \ln\frac{1+s^2x^2}{1-s^2x^2} \le \ln\frac{1+x^2}{1-x^2}\,, \qquad x \in \big(\,0\,,1\big)\,,\ s \in \big[\,0\,,1\big]\,,$$

dove la funzione $\ln\dfrac{1+x^2}{1-x^2}$ è sommabile su $\big(\,0\,,1\big)$, e

$$\big[\,0\,,1\big] \ni s \longmapsto \ln\frac{1+s^2x^2}{1-s^2x^2} \text{ è continua per ogni } x \in \big(\,0\,,1\big)\,,$$

La sommabilità della funzione continua positiva $\ln\dfrac{1+x^2}{1-x^2}$ su $\big(\,0\,,1\big)$ si verifica come segue :

Tramite integrazione per parti si trova

$$
\begin{aligned}
\int \ln\frac{1+x^2}{1-x^2}\,\mathrm{d}x &= \int \ln(1+x^2)\,\mathrm{d}x - \int \ln(1+x)\,\mathrm{d}x - \int \ln(1-x)\,\mathrm{d}x \\
&= x\,\ln(1+x^2) - 2\,x + 2\operatorname{arctg}x \\
&\quad - \big((1+x)\,\ln(1+x) - x\big) \\
&\quad - \big(-\,(1-x)\,\ln(1-x) - x\big) \\
&= x\,\ln(1+x^2) + 2\operatorname{arctg}x \\
&\quad - (1+x)\,\ln(1+x) + (1-x)\,\ln(1-x)
\end{aligned}
$$

e risulta

$$\int_0^1 \ln \frac{1+x^2}{1-x^2}\,\mathrm{d}x = x \ln \frac{1+x^2}{1-x^2}\Bigg|_{x=0}^{x=1} + 2\,\mathrm{arctg}\, x\Bigg|_{x=0}^{x=1}$$
$$- (1+x)\ln(1+x)\Bigg|_{x=0}^{x=1} + (1-x)\ln(1-x)\Bigg|_{x=0}^{x=1}$$
$$= \ln 2 + \frac{\pi}{2} - 2\ln 2 = \frac{\pi}{2} - \ln 2 < +\infty\,.$$

(b) È naturale chiedersi se la funzione F di cui sopra è derivabile da destra in 0 ed a sinistra in 1 o no. Osserviamo che la funzione derivata F' ha limite destro finito in 0 e limite sinistro infinito in 1 :

$$\lim_{s\to 0+0} F'(s) = \lim_{s\to 0+0} \frac{1}{s^2}\left(\ln\frac{1+s}{1-s} - 2\,\mathrm{arctg}\,(s)\right) = 0\ ,$$
$$\lim_{s\to 1-0} F'(s) = \lim_{s\to 1-0} \frac{1}{s^2}\left(\ln\frac{1+s}{1-s} - 2\,\mathrm{arctg}\,(s)\right) = +\infty\ .$$

Perciò c'è da aspettarsi che F abbia in 0 la derivata destra 0 ed in 1 la derivata sinistra infinita $+\infty$. Che avviene veramente così, risulta dal teorema seguente:

Teorema. *Sia $f : [a\,,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua che è derivabile in $(a\,,b)$ e tale che esiste il limite*

$$L := \lim_{s\to a+0} f'(s) \in \mathbb{R}\cup\{-\infty\,,+\infty\}\,.$$

Allora esiste la derivata destra

$$f_d'(a) = \lim_{s\to a+0} \frac{f(s)-f(a)}{s-a} = L\,.$$

Siano $L' < L < L''$ arbitrari (se $L = +\infty$, allora non c'è L'', mentre se $L = -\infty$, allora non c'è L'). Allora esiste $a < a' < b$ tale che

$$L' < f'(s) < L''\,, \qquad a < s < a'\,.$$

Ora il teorema del valor medio di Lagrange implica che per ogni $a < s < a'$ esiste un $a < \sigma_s < s < a'$ tale che

$$\frac{f(s)-f(a)}{s-a} = f'(\sigma_s) \in \big(L'\,,L''\big)\,.$$

Cosicché

$$\lim_{s\to a+0}\frac{f(s)-f(a)}{s-a}=L\ .$$

(c) Rimarchiamo che è possibile calcolare esplicitamente $F(s)$ usando la formula ottenuta in (a) per la primitiva di $\dfrac{1+x^2}{1-x^2}$:

$$\begin{aligned}\int \ln\frac{1+x^2}{1-x^2}\,\mathrm{d}x = {} & \ln(1+x^2)+2\,\mathrm{arctg}\,x \\ & -(1+x)\ln(1+x)+(1-x)\ln(1-x) \\ = {} & x\ln\frac{1+x^2}{1-x^2}+\ln\frac{1-x}{1+x}+2\,\mathrm{arctg}\,x\end{aligned}$$

che la useremo con la lettera t al posto di x,:

$$\int \ln\frac{1+t^2}{1-t^2}\,\mathrm{d}t = t\ln\frac{1+t^2}{1-t^2}+\ln\frac{1-t}{1+t}+2\,\mathrm{arctg}\,t\ . \qquad (*)$$

Risulta per ogni $s\in\big(0\,,1\big)$

$$\begin{aligned}\int \ln\frac{1+s^2x^2}{1-s^2x^2}\,\mathrm{d}x & \overset{t=sx}{=} \frac{1}{s}\int \ln\frac{1+t^2}{1-t^2}\,\mathrm{d}t \\ & \overset{(*)}{=} \frac{1}{s}\Big(t\ln\frac{1+t^2}{1-t^2}+\ln\frac{1-t}{1+t}+2\,\mathrm{arctg}\,t\Big) \\ & = x\ln\frac{1+s^2x^2}{1-s^2x^2}+\frac{1}{s}\ln\frac{1-s\,x}{1+s\,x}+\frac{2}{s}\,\mathrm{arctg}\big(sx\big)\end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned}F(s) & = \int_0^1 \ln\frac{1+s^2x^2}{1-s^2x^2}\,\mathrm{d}x \\ & = \ln\frac{1+s^2}{1-s^2}+\frac{1}{s}\ln\frac{1-s}{1+s}+\frac{2}{s}\,\mathrm{arctg}\,s\ .\end{aligned}$$

2) : Il complementare $\mathbb{C}\setminus\big\{z\in\mathbb{C}\,;\,|z|=1\big\}$ della circonferenza unitaria ha due componenti connessi:

$$\big\{z\in\mathbb{C}\,;\,|z|<1\big\}\ \text{ e }\ \big\{z\in\mathbb{C}\,;\,|z|>1\big\}\,.$$

Poiché l'immagine continua $f(\mathbb{C})$ dell'insieme connesso $\mathbb{C}$ è connesso, essa dev'essere contenuta in uno di questi due componenti connessi.

Se $f(\mathbb{C}) \subset \{z \in \mathbb{C}\,;\ |z| < 1\}$ allora

$$|f(z)| < 1\,, \qquad z \in \mathbb{C}$$

e quindi la funzione f è limitata. Usando il teorema di Liouville risulta che f è costante.

Se invece $f(\mathbb{C}) \subset \{z \in \mathbb{C}\,;\ |z| > 1\}$ allora

$$|f(z)| > 1\,, \qquad z \in \mathbb{C}\,.$$

Di conseguenza $\dfrac{1}{f}$ è una funzione intera ben definita ed abbiamo

$$\left|\frac{1}{f}(z)\right| = \left|\frac{1}{f(z)}\right| = \frac{1}{|f(z)|} < 1\,, \qquad z \in \mathbb{C}\,.$$

Usando ora il teorema di Liouville concludiamo che $\dfrac{1}{f}$, e quindi anche f è costante.

3) **:** Risolviamo l'equazione

$$e^{1/z} = -1\ :$$

l'ugualità $e^{1/z} = -1 = e^{\pi i} \iff e^{(1/z)-\pi i} = 1$ vale esattamente quando $\dfrac{1}{z} - \pi i$ è un multiplo intero di $2\pi i$, cioè se e soltanto se

$$\frac{1}{z} - \pi i = 2k\pi i \iff z = \frac{1}{(2k+1)\pi i} = -\frac{i}{(2k+1)\pi}$$

per un intero k . Poiché

$$\lim_{k\to\infty}\left(-\frac{i}{(2k+1)\pi}\right) = 0\,, \tag{**}$$

ogni intorno dell'origine contiene una infinità di questi punti.

Ora (**) e

$$f\left(-\frac{i}{(2k+1)\pi}\right) = -1$$

implicano che non abbiamo $\lim\limits_{z\to 0}|f(z)| = +\infty$, cioè l'origine non è polo per f .

D'altro canto se l'origine fosse singolarità eliminabile, cioè se f avesse una estensione olomorfa su $\mathbb{C}$, allora l'egualità di f a -1 sull'insieme

$$\left\{ - \frac{i}{(2k+1)\pi}\ , \, k \in \mathbb{Z} \right\} ,$$

che ha punto di accumulazione in 0 , implicherebbe per il principio dell'unità per le funzioni olomorfe che f è identicamente uguale a -1 , che non è vero ($f(1) = e\,!$).

Cuncludiamo quindi che -1 è una singolarità essenziale per f .

4) : La funzione

$$f(z) := \frac{1+z^2}{1+z^4}$$

è meromorfa sul piano complesso, con poli semplici nelle radici quarte di -1 , cioè in

$$z_k = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{(k-1)\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{(k-1)\pi}{2}\right) , \qquad 1 \le k \le 4 \, .$$

Per facilitare i calcoli rimarchiamo che

$$\begin{aligned} &z_1 = \cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}\ , \ z_1^2 = i \, , \\ &z_2 = -\overline{z_1}\, , \ z_2^2 = -i\, , \ z_3 = -z_1\, , \ z_4 = \overline{z_1}\, . \end{aligned}$$

Tenendo conto che

$$\begin{aligned} z^4 + 1 &= \big(z^2 - i\big)\big(z^2 + i\big) \\ &= \big(z - z_1\big)\big(z - z_3\big)\big(z^2 + i\big) \\ &= \big(z^2 - i\big)\big(z - z_2\big)\big(z - z_4\big) \ , \end{aligned}$$

calcoliamo i residui di f nei poli $z_1 \, , z_2$:

$$\begin{aligned} \operatorname*{Res}_{z_1}(f) &= \lim_{z\to z_1}(z - z_1)\, f(z) = \lim_{z\to z_1} \frac{1+z^2}{\big(z - z_3\big)\big(z^2 + i\big)} \\ &= \frac{1+z_1^2}{\big(z_1 - z_3\big)\big(z_1^2 + i\big)} = \frac{1+i}{\big(2\,z_1\big)\big(2\,i\big)} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}\, i}\ ,$$

$$\operatorname*{Res}_{z_2}(f) = \lim_{z\to z_2} (z - z_2)\, f(z) = \lim_{z\to z_2} \frac{1+z^2}{\big(z^2 - i\big)\big(z - z_4\big)}$$

$$= \frac{1+z_2^2}{\big(z_2^2 - i\big)\big(z_2 - z_4\big)} = \frac{1-i}{\big(-2i\big)\big(-2\overline{z_1}\big)}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}\, i}\ .$$

Indichiamo, per $w \in \mathbb{C}$ e $r > 0$, con $\partial^+ U_r^+(w)$ e $\partial^- U_r^+(w)$ le curve con lo stesso sostegno uguale al semicerchio superiore

$$\big\{ z \in \mathbb{C}\, ;\, |z - w| = r\, , \mathrm{Im} z \geq 0 \big\}\ ,$$

la prima orientata in senso antiorario (positivo), mentre la seconda in senso orario (negativo) :

$$\partial^+ U_r^+(w) \text{ è la curva } [0\,,\pi] \ni t \longmapsto w + r\, e^{it} \in \mathbb{C}\,,$$
$$\partial^- U_r^+(w) \text{ è la curva } [0\,,\pi] \ni t \longmapsto w + r\, e^{i(\pi - t)} = w - r\, e^{-it} \in \mathbb{C}\,.$$

Sia adesso $r > 1$ e consideriamo la curva chiusa regolare a tratti γ_r nel semipiano superiore chiuso che si ottiene componendo

il segmento $[-r\,, r]$ con
il semicerchio $\partial^+ U_r^+(0)$.

Poiché γ_r aggira i soli poli $z_1\,, z_2$, applicando il teorema dei residui otteniamo

$$\int_{-r}^{r} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\partial^+ U_r^+(0)} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_r} f(z)\,\mathrm{d}z$$

$$= 2\pi i \Big(\operatorname*{Res}_{z_1}(f) + \operatorname*{Res}_{z_2}(f) \Big) = 2\pi i \left(\frac{1}{2\sqrt{2}\, i} + \frac{1}{2\sqrt{2}\, i} \right)$$

$$= \pi\sqrt{2}\ ,$$

quindi

$$\int_{-r}^{r} f(x)\,\mathrm{d}x = \pi\sqrt{2} - \int_{\partial^+ U_r^+(0)} f(z)\,\mathrm{d}z \ .$$

Ora vale

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\partial^+ U_r^+(0)} f(z)\,\mathrm{d}z \right| &= \left| \int_{\partial^+ U_r^+(0)} \frac{1+z^2}{1+z^4}\,\mathrm{d}z \right| \\
&\leq \int_{\partial^+ U_r^+(0)} \left| \frac{1+z^2}{1+z^4} \right| \mathrm{d}|z| \\
&\leq \int_{\partial^+ U_r^+(0)} \frac{1+|z|^2}{|z|^4-1}\,\mathrm{d}|z| \\
&= \int_{\partial^+ U_r^+(0)} \frac{1}{|z|^2-1}\,\mathrm{d}|z| \\
&= \frac{r\,\pi}{r^2-1} \longrightarrow 0 \ \text{ per } \ r \longrightarrow +\infty
\end{aligned}$$

e risulta

$$\int_{-r\infty}^{+\infty} \frac{1+x^2}{1+x^4}\,\mathrm{d}x = \lim_{r\to+\infty} \int_{-r}^{r} f(x)\,\mathrm{d}x = \pi\sqrt{2} \ .$$

Rimarco: Poiché f è pari, risulta anche

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{1+x^2}{1+x^4}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \ .$$