**NOME:** ................. **MATRICOLA:** .................

Corso di Laurea in Matematica, A.A. 2011/2012
Analisi Reale e Complessa, Esame del 29.02.2012

1) Si considerino le funzioni $F_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\,, n \geq 1$, definite da

$$F_n(\alpha) := \int\limits_0^n \frac{\cos(\alpha\, x)}{1+x^2}\, \mathrm{d}x\ .$$

a) Si verifichi che ogni $F_n$ è derivabile e

$$F_n'(\alpha) := -\int\limits_0^{n\alpha} \frac{y \sin y}{\alpha^2+y^2}\, \mathrm{d}y\,, \qquad \alpha \in \mathbb{R}\ .$$

b) Si verifichi che la successione $\big(F_n\big)_{n\geq 1}$ è uniformemente convergente alla funzione $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$F(\alpha) := \int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos(\alpha\, x)}{1+x^2}\, \mathrm{d}x\ .$$

c) Sapendo che

$$\lim_{b\to+\infty} \sup_{\alpha\in\mathbb{R}} \left| \int\limits_0^b \frac{y \sin y}{\alpha^2+y^2}\, \mathrm{d}y - \int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos(\alpha\, x)}{1+x^2}\, \mathrm{d}x \right| = 0\,,$$

si verifichi che la successione $\big(F_n'\big)_{n\geq 1}$ converge uniformemente a $-F$ in ogni intervallo della forma $\big[\varepsilon\,, +\infty\big)\,, \varepsilon > 0\,.$

d) Si deduca che $F$ è derivabile in $\big(0\,, +\infty\big)$ e vale

$$F'(\alpha) = -F(\alpha)\,, \qquad \alpha > 0\ .$$

2) Sia

$$E := \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_k}{k!} \, ; \, \varepsilon_k = 0 \text{ oppure } 1 \right\} \subset \mathbb{R} \, .$$

Si mostri che per ogni intero $n \geq 1$ si ha

$$E = \bigcup_{\substack{\alpha_j = 0\,,1 \\ 1 \leq j \leq n}} \left\{ \sum_{j=1}^{n} \frac{\alpha_j}{j!} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\varepsilon_k}{k!} \, ; \, \varepsilon_k = 0 \text{ oppure } 1 \right\}$$

e che $E$ è contenuto nell'unione di $2^n$ intervalli di lunghezza $\leq \dfrac{c}{n!}$ per una opportuna costante $c > 0$. Se ne deduca che $E$ è misurabile e $|E| = 0$.

3) Si consideri sul piano puntato $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ la funzione olomorfa $f(z) = \dfrac{1}{z}$. Si mostri che non esiste una successione $\big(p_n\big)_{n \geq 1}$ di polinomi a coefficienti complessi che converga uniformemente sui compatti di $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ad $f$.

4) Sia $U_r(z_o) = \{z \in \mathbb{C} \, ; \, |z - z_o| < r\}$ il disco aperto di raggio $r > 0$ e con centro in $z_o \in \mathbb{C}$ ed indichiamo con $\partial \, U_r(z_o)$ la sua frontiera orientata positivamente ( = senso antiorario) :

$$\partial U_r(z_o) \text{ è la curva } [0\,, 2\,\pi] \ni t \longmapsto z_o + r\, e^{it} \in \mathbb{C} \, .$$

Calcolare l'integrale

$$\int\limits_{\partial U_7(8)} \frac{f'(z)}{z\, f(z)} \, \mathrm{d}z$$

ove $f$ è una funzione olomorfa su un aperto contenente $\overline{U_7(8)}$, che ha solo due zeri $z_1 \, , z_2$, ambedue semplici e contenuti nel disco aperto $U_7(8)$.

**Soluzioni:**

1) **:** a) Poiché

- la funzione continua (quindi misurabile)

$$\big(0\,,n\big)\ni x\longmapsto\frac{\cos(\alpha\,x)}{1+x^2}\in\mathbb{R}$$

  è sommabile per ogni $\alpha\in\mathbb{R}$,

- la funzione

$$\mathbb{R}\ni\alpha\longmapsto\frac{\cos(\alpha\,x)}{1+x^2}\in\mathbb{R}$$

  è derivabile per ogni $x\in\big(0\,,n\big)$ avendo come derivata

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{\cos(\alpha\,x)}{1+x^2}=-\frac{x\,\sin(\alpha\,x)}{1+x^2}$$

- e vale la maggiorazione uniforme

$$\left|\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{\cos(\alpha\,x)}{1+x^2}\right|\leq\frac{x}{1+x^2}\leq\frac{1}{2}\,,\qquad x\in\big(0\,,n\big)\,,\alpha\in\mathbb{R}$$

ove la funzione costante $\frac{1}{2}$ su $\big(0\,,n\big)$ è sommabile, per il teorema sulla derivazione sotto il segno di integrale risulta la derivabilità di

$$F_n:\mathbb{R}\ni\alpha\longmapsto\int_0^n\frac{\cos(\alpha\,x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

e la formula

$$\begin{aligned}F_n'(\alpha)=&\int_0^n\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{\cos(\alpha\,x)}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x=-\int_0^n\frac{x\,\sin(\alpha\,x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\\ \overset{y\,=\,nx}{=}&\ -\int_0^{n\alpha}\frac{y\sin y}{\alpha^2+y^2}\,\mathrm{d}y\,,\qquad\alpha\in\mathbb{R}\,.\end{aligned}$$

b) Anzitutto osserviamo che la funzione continua (quindi misurabile)

$$\big(0\,,+\infty\big) \ni x \longmapsto \frac{\cos(\alpha\,x)}{1+x^2} \in \mathbb{R}$$

è sommabile per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ perché

$$\int\limits_0^{+\infty} \left| \frac{\cos(\alpha\,x)}{1+x^2} \right| \mathrm{d}x \leq \int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} < +\infty\,.$$

Perciò la funzione

$$F : \mathbb{R} \ni \alpha \longmapsto \int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos(\alpha\,x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

è ben definita.

Ora

$$\begin{aligned}
\big|F(\alpha) - F_n(\alpha)\big| &= \left| \int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos(\alpha\,x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x - \int\limits_0^{n} \frac{\cos(\alpha\,x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \right| \\
&= \left| \int\limits_n^{+\infty} \frac{\cos(\alpha\,x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \right| \\
&\leq \int\limits_n^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} - \mathrm{arctg}\,n \xrightarrow{n\to\infty} 0
\end{aligned}$$

implica la convergenza uniforme di $\big(F_n\big)_{n\geq 1}$ ad $F$.

$\rightarrow$ In particolare, la funzione $F$ è continua.

c) Sia $\varepsilon > 0$ dato e sia $\delta > 0$ arbitrario.

Sapendo che

$$\lim_{b\to+\infty} \sup_{\alpha\in\mathbb{R}} \left| \int\limits_0^{b} \frac{y\,\sin y}{\alpha^2+y^2}\,\mathrm{d}y - \int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos(\alpha\,x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \right| = 0$$

(vedi compito 1) dell'esame scritto dell'8 Febbraio 2012), esiste $b_\delta > 0$ tale che

$$\sup_{\alpha\in\mathbb{R}} \left| \int_0^b \frac{y \sin y}{\alpha^2 + y^2}\, \mathrm{d}y - \int_0^{+\infty} \frac{\cos(\alpha\, x)}{1+x^2}\, \mathrm{d}x \right| \leq \delta\,, \qquad b \geq b_\delta\,. \tag{*}$$

Di conseguenza, per ogni $n \geq \dfrac{b_\delta}{\varepsilon}$ ed ogni $\alpha \in \big[\varepsilon\,, +\infty\big)$ abbiamo

$$\begin{aligned}
\big|F_n(\alpha) + F(\alpha)\big| = \quad & \left| - \int_0^{n\alpha} \frac{y \sin y}{\alpha^2 + y^2}\, \mathrm{d}y + \int_0^{+\infty} \frac{\cos(\alpha\, x)}{1+x^2}\, \mathrm{d}x \right| \\
= \quad & \left| \int_0^{n\alpha} \frac{y \sin y}{\alpha^2 + y^2}\, \mathrm{d}y - \int_0^{+\infty} \frac{\cos(\alpha\, x)}{1+x^2}\, \mathrm{d}x \right| \\
\overset{\substack{(*)\text{ con} \\ b\,=\,n\alpha\,\geq\, b_\delta}}{\leq} \quad & \delta\,,
\end{aligned}$$

cioè

$$\sup_{\alpha\geq\varepsilon} \big|F_n(\alpha) + F(\alpha)\big| \leq \delta\,, \qquad n \geq \frac{b_\delta}{\varepsilon}\,.$$

Cosicché la successione $\big(F_n'\big)_{n\geq 1}$ converge uniformemente a $-F$ in ogni intervallo della forma $\big[\varepsilon\,, +\infty\big)\,,\ \varepsilon > 0\,.$

d) Sia $\varepsilon > 0$ arbitrario.

Abbiamo visto in b) e c) che

$$F_n \longrightarrow F \ \text{ uniformenente in } \ \big(\varepsilon\,, +\infty\big)\ \text{(in verità in tutto } \mathbb{R}\text{)}$$

e

$$F_n' \longrightarrow F' \ \text{ uniformenente in } \ \big(\varepsilon\,, +\infty\big)\,.$$

Usando il teroema del passaggio a limite sotto il segno di derivazione risulta che $F$ è derivabile in $\big(\varepsilon\,, +\infty\big)$ e

$$F'(\alpha) = -F(\alpha)\,, \qquad \alpha \in \big(\varepsilon\,, +\infty\big)\,.$$

Poiché $\varepsilon > 0$ era arbitrario, consludiamo che $F$ è derivabile in tutto $\big(0\,, +\infty\big)$ e vale

$$F'(\alpha) = -F(\alpha)\,, \qquad \alpha \in \big(0\,, +\infty\big)\,. \tag{**}$$

**Rimarco.** Risolvendo l'equazione differenziale (lineare, omogeneo, a coefficienti costanti) (**) con la condizione iniziale

$$F(0) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$$

possiamo calcolare l'integrale

$$F(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos(\alpha\, x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

per ogni $\alpha > 0$:

La soluzione generale di (**) è

$$F(\alpha) = c\, e^{-\alpha}$$

con $c$ una costante. Poiché la soluzione soddisfacente la condizione iniziale $F(0) = \dfrac{\pi}{2}$ si ottiene per $c = \dfrac{\pi}{2}$, essa è

$$\frac{\pi}{2}\, e^{-\alpha}\, .$$

Possiamo quindi concludere che

$$\boxed{\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos(\alpha\, x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\, e^{-\alpha}\, , \quad \alpha \geq 0\, .}$$

2) **:** Per qualsiasi $n \geq 1$ e qualsiasi

$$\alpha_1\, , \dots , \alpha_n = 0 \text{ oppure } 1$$

l'insieme

$$E_{\alpha_1\, , \dots , \alpha_n} := \left\{ \sum_{j=1}^{n} \frac{\alpha_j}{j!} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\varepsilon_k}{k!}\, ; \varepsilon_k = 0 \text{ oppure } 1 \right\}$$

è ovviamente contenuto in $E$, quindi

$$E \supset \bigcup_{\substack{\alpha_j = 0\,,1 \\ 1 \le j \le n}} E_{\alpha_1\,,\,\dots\,,\,\alpha_n}\,.$$

D'altro canto, ogni elemento

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_k}{k!} \ \text{ ove } \ \varepsilon_k = 0 \ \text{ oppure } \ 1$$

di $E$ appartiene all'insieme

$$E_{\alpha_1\,,\,\dots\,,\,\alpha_n} \ \text{ con } \ \alpha_1 = \varepsilon_1\,,\ \dots\,,\ \alpha_n = \varepsilon_n\,.$$

Perciò vale anche l'inclusione

$$E \subset \bigcup_{\substack{\alpha_j = 0\,,1 \\ 1 \le j \le n}} E_{\alpha_1\,,\,\dots\,,\,\alpha_n}$$

e risulta l'ugualità

$$E = \bigcup_{\substack{\alpha_j = 0\,,1 \\ 1 \le j \le n}} E_{\alpha_1\,,\,\dots\,,\,\alpha_n}\,.$$

Ora, per ogni elemento

$$x = \sum_{j=1}^{n} \frac{\alpha_j}{j!} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\varepsilon_k}{k!} \ \text{ ove } \ \varepsilon_k = 0 \ \text{ oppure } \ 1$$

di $E_{\alpha_1\,,\,\dots\,,\,\alpha_n}$ abbiamo

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\alpha_j}{j!} \le x \le \sum_{j=1}^{n} \frac{\alpha_j}{j!} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!}\,.$$

Poiché

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} &= \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \ \dots\right) \\
&< \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \ \dots\right) \\
&= \frac{1}{(n+1)!}\,\frac{1}{1 - \dfrac{1}{n+2}} = \frac{1}{(n+1)!}\,\frac{n+2}{n+1}
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{n!} \underbrace{\frac{n+2}{(n+1)^2}}_{< \frac{1}{n}} < \frac{1}{n \cdot n!}$$

$$\leq \frac{1}{n!} \, ,$$

risulta che $E_{\alpha_1 \, , \, \dots \, , \, \alpha_n}$ è contenuto nell'intervallo

$$I_{\alpha_1 \, , \, \dots \, , \, \alpha_n} := \left[ \sum_{j=1}^{n} \frac{\alpha_j}{j!} \, , \sum_{j=1}^{n} \frac{\alpha_j}{j!} + \frac{1}{n!} \right]$$

di lunghezza $\dfrac{1}{n!}$ .

Cosicché, per ogni $n \geq 1$ abbiamo

$$E = \bigcup_{\substack{\alpha_j = 0 \, , 1 \\ 1 \leq j \leq n}} E_{\alpha_1 \, , \, \dots \, , \, \alpha_n} \subset \bigcup_{\substack{\alpha_j = 0 \, , 1 \\ 1 \leq j \leq n}} I_{\alpha_1 \, , \, \dots \, , \, \alpha_n} \, ,$$

$$\big| E \big|_e \leq \sum_{\substack{\alpha_j = 0 \, , 1 \\ 1 \leq j \leq n}} \underbrace{\big| I_{\alpha_1 \, , \, \dots \, , \, \alpha_n} \big|_e}_{= \frac{1}{n!}} = \frac{2^n}{n!}$$

$$= \underbrace{\frac{2}{1} \frac{2}{2} \frac{2}{3} \frac{2}{4} \dots \frac{2}{n}}_{n} \leq 2 \left( \frac{2}{3} \right)^{n-2}$$

e possiamo concludere :

$$\big| E \big|_e \leq \inf_{n \geq 1} 2 \left( \frac{2}{3} \right)^{n-2} = \lim_{n \to \infty} 2 \left( \frac{2}{3} \right)^{n-2} = 0 \, .$$

In altre parole $E$ è misurabile e di misura zero.

**Rimarco.** Dalla stima

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} < \frac{1}{n \cdot n!} \tag{1}$$

di cui sopra risulta che, per ogni intero $n \geq 1$ , $E_{\alpha_1 \, , \, \dots \, , \, \alpha_n}$ è già contenuto nell'intervallo

$$J_{\alpha_1 \, , \, \dots \, , \, \alpha_n} := \left[ \sum_{j=1}^{n} \frac{\alpha_j}{j!} \, , \sum_{j=1}^{n} \frac{\alpha_j}{j!} + \frac{1}{n \cdot n!} \right] \subset I_{\alpha_1 \, , \, \dots \, , \, \alpha_n}$$

di lunghezza $\dfrac{1}{n \cdot n!}$ . Risulta

$$E \subset \bigcup_{\substack{\alpha_j = 0\,,1 \\ 1 \le j \le n}} J_{\alpha_1\,,\,\dots\,,\,\alpha_n}\,, \qquad n \ge 1$$

e quindi

$$E \subset \bigcap_{n \ge 1} \bigcup_{\substack{\alpha_j = 0\,,1 \\ 1 \le j \le n}} J_{\alpha_1\,,\,\dots\,,\,\alpha_n}\,.$$

Possiamo verificare che vale addirittura

$$E = \bigcap_{n \ge 1} \bigcup_{\substack{\alpha_j = 0\,,1 \\ 1 \le j \le n}} J_{\alpha_1\,,\,\dots\,,\,\alpha_n}\,.$$

In particolare $E \subset \mathbb{R}$ è un insieme compatto, essendo l'intersezione di una successione di unioni finite di intervalli compatti.

A questo fine abbiamo solo da verificare che

$$E \supset \bigcap_{n \ge 1} \bigcup_{\substack{\alpha_j = 0\,,1 \\ 1 \le j \le n}} J_{\alpha_1\,,\,\dots\,,\,\alpha_n}\,, \tag{2}$$

l'inclusione reciproca essendo già nota.

Prima di tutto mostriamo che, per ogni intero $n \ge 1$ ,

$$\begin{aligned} x \in J_{\alpha_1\,,\,\dots\,,\,\alpha_n}\,, y \in J_{\beta_1\,,\,\dots\,,\,\beta_n}\,, (\alpha_1\,,\,\dots\,,\,\alpha_n) \ne (\beta_1\,,\,\dots\,,\,\beta_n) \implies \\ |x - y| > \frac{1}{n!} - \frac{1}{n \cdot n!}\,. \end{aligned} \tag{3}$$

Sia $p$ il più piccolo intero tra 1 e $n$ con $\alpha_p \ne \beta_p$ e supponiamo, per esempio, che $\alpha_p > \beta_p$ , cioè che $\alpha_p = 1$ e $\beta_p = 0$ . Allora

$$x \ge \sum_{j=1}^{p} \frac{\alpha_j}{j!} = \sum_{j=1}^{p-1} \frac{\alpha_j}{j!} + \frac{1}{p!}\,,$$

$$y \le \sum_{j=1}^{p} \frac{\beta_j}{j!} + \sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{1}{k!} = \sum_{j=1}^{p-1} \frac{\alpha_j}{j!} + \sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{1}{k!} \overset{(1)}{<} \sum_{j=1}^{p-1} \frac{\alpha_j}{j!} + \frac{1}{p \cdot p!}$$

implicano

$$x-y>1-\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k!}=1-(e-2)=3-e$$

se $p=1$ e

$$x-y>\frac{1}{p!}-\frac{1}{p\cdot p!}$$

se $p\geq 2$ .

Ma la successione $\left(\dfrac{1}{k!}-\dfrac{1}{k\cdot k!}\right)_{k\geq 2}$ è strettamente decrescente e

$$3-e>0=\frac{1}{1!}-\frac{1}{1\cdot 1!}\,,\quad 3-e>\frac{1}{4}=\frac{1}{2!}-\frac{1}{2\cdot 2!}\,,$$

perciò risulta

$$x-y>\frac{1}{n!}-\frac{1}{n\cdot n!}$$

in tutti i casi.

In particolare, per ogni intero $n\geq 1$ gli intervalli $J_{\alpha_1\,,\,\dots\,,\,\alpha_n}$ sono a due a due disgiunti.

Ora, per verificare (2), sia

$$x\in\bigcap_{n\geq 1}\bigcup_{\substack{\alpha_j=0\,,1\\ 1\leq j\leq n}}J_{\alpha_1\,,\,\dots\,,\,\alpha_n}$$

arbitrario. Secondo (3) esiste per ogni $n\geq 1$ un unico $n$-upla

$$(\alpha_1^{(n)},\,\dots\,,\,\alpha_n^{(n)})\in\{0\,,1\}^n$$

tale che $x\in J_{\alpha_1^{(n)},\,\dots\,,\,\alpha_n^{(n)}}$ . Poiché

$$J_{\alpha_1^{(n+1)},\,\dots\,,\,\alpha_n^{(n+1)},\,\alpha_{n+1}^{(n+1)}}\subset J_{\alpha_1^{(n+1)},\,\dots\,,\,\alpha_n^{(n+1)}}\,,$$

dobbiamo avere $(\alpha_1^{(n+1)},\,\dots\,,\,\alpha_n^{(n+1)})=(\alpha_1^{(n)},\,\dots\,,\,\alpha_n^{(n)})$ , perciò con

$$\alpha_n:=\alpha_n^{(n)},\qquad n\geq 1$$

abbiamo

$$x\in J_{\alpha_1\,,\,\dots\,,\,\alpha_n}\iff 0\leq x-\sum_{j=1}^{n}\frac{\alpha_j}{j!}\leq\frac{1}{n\cdot n!}$$

per ogni $n \geq 1$ . Di conseguenza

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\alpha_j}{j!} \in E \, .$$

3) : **Soluzione usando il principio del massimo.**

Supponiamo il contrario, cioè che si può trovare una successione $\big(p_n\big)_{n\geq 1}$ di polinomi a coefficienti complessi che converge uniformemente sui compatti di $\mathbb{C} \setminus \big\{0\big\}$ alla funzione $f(z) = \dfrac{1}{z}$ .

Allora la restrizione di $\big(p_n\big)_{n\geq 1}$ alla circonferenza unità $\partial\, U_1(0)$ , che è un insieme compatto, è uniformemente di Caucy, cioè

$$\lim_{n,m\to\infty} \sup_{|z|=1} \big| p_n(z) - p_m(z) \big| = 0 \, .$$

Ma il principio del massimo, applicato alla funzione olomorfa $p_n - p_m$ , implica

$$\sup_{|z|\leq 1} \big| p_n(z) - p_m(z) \big| = \sup_{|z|=1} \big| p_n(z) - p_m(z) \big| \, ,$$

perciò abbiamo

$$\lim_{n,m\to\infty} \sup_{|z|\leq 1} \big| p_n(z) - p_m(z) \big| = 0 \, .$$

in altre parole anche la restrizione di $\big(p_n\big)_{n\geq 1}$ al disco $\overline{U_1(0)}$ (che, pur essendo compatto, non è contenuto in $\mathbb{C} \setminus \big\{0\big\}$) è uniformemente di Cauchy.

Di conseguenza la successione $\big(p_n\big)_{n\geq 1}$ è uniformemente convergente in $U_1(0)$ ad una funzione olomorfa $g : U_1(0) \longrightarrow \mathbb{C}$ . Ma allora abbiamo

$$g(z) = \lim_{n\to\infty} p_n(z) = \frac{1}{z} \, , \qquad 0 \neq z \in U_1(0)$$

e risulta

$$g(0) = \lim_{z\to 0} g(z) = \lim_{z\to 0} \frac{1}{z} \, ,$$

il che non è possibile perché $\dfrac{1}{z}$ non ha limite finito in $0$ .

**Soluzione integrando su curve chiuse attorno $0$.**

Ammettiamo che si può trovare una successione $\big(p_n\big)_{n\geq 1}$ di polinomi a coefficienti complessi che converge uniformemente sui compatti di $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ alla funzione $f(z) = \dfrac{1}{z}$. Allora, in particolare, $\big(p_n\big)_{n\geq 1}$ converge uniformemente ad $f$ sulla circonferenza unitaria $\partial U_1(0)$ e risulta

$$\int\limits_{\partial U_1(0)} f(z)\,\mathrm{d}z = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\partial U_1(0)} p_n(z)\,\mathrm{d}z\ .$$

Ma, secondo il teorema integrale di Cauchy, gli integrali lungo la curva chiusa $\partial\, U_1(0)$ delle funzioni $p_n$ (che sono olomorfe sull'intero piano complesso) si annullano e così

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{\partial U_1(0)} p_n(z)\,\mathrm{d}z = 0\ ,$$

mentre

$$\int\limits_{\partial U_1(0)} f(z)\,\mathrm{d}z = \int\limits_{\partial U_1(0)} \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z = \int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}}\, e^{it}\, i\,\mathrm{d}t = i \int\limits_0^{2\pi} \mathrm{d}t = 2\pi\, i\ .$$

Così è risultata l'assurdità $2\pi\, i = 0$!

**4) :** Sia $D$ il dominio di $f$. Allora la funzione

$$\frac{f'(z)}{z\, f(z)}$$

è definita e olomorfa in $D\setminus\{z_1\,, z_2\,, 0\}$, avendo poli semplici in $z_1$ e $z_2$. Calcoliamo il suo residuo in questi punti.

Poiché $z_1$ è un zero semplice di $f$, esiste una funzione olomorfa

$$g_1 : D \longrightarrow \mathbb{C}$$

tale che

$$f(z) = (z - z_1)\, g_1(z) \ \text{ e } \ g_1(z_1) \neq 0\,.$$

Risulta

$$f'(z) = g_1(z) + (z - z_1)\, g_1'(z)\,,$$

quindi

$$\frac{f'(z)}{z\,f(z)} = \frac{g_1(z) + (z - z_1)\,g_1'(z)}{z\,(z - z_1)\,g_1(z)}\,,$$

$$\operatorname*{Res}_{z_1} \frac{f'(z)}{z\,f(z)} = \lim_{z \to z_1} \frac{g_1(z) + (z - z_1)\,g_1'(z)}{z\,g_1(z)} = \frac{g_1(z_1)}{z_1\,g_1(z_1)} = \frac{1}{z_1}\,.$$

Similmente

$$\operatorname*{Res}_{z_2} \frac{f'(z)}{z\,f(z)} = \frac{1}{z_2}\,.$$

Poiché le singolarità di $\dfrac{f'(z)}{z\,f(z)}$ nel disco $U_7(8)$ sono $z_1$ e $z_2$ $\big($la possibile singolarità 0 si trova fuori $\overline{U_7(8)}\,\big)$, applicando il teorema dei residui possiamo concludere :

$$\begin{aligned}\int\limits_{\partial U_7(8)} \frac{f'(z)}{z\,f(z)}\,\mathrm{d}z &= 2\,\pi\,i\left(\operatorname*{Res}_{z_1} \frac{f'(z)}{z\,f(z)} + \operatorname*{Res}_{z_2} \frac{f'(z)}{z\,f(z)}\right) \\ &= 2\,\pi\,i\left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}\right).\end{aligned}$$