NOME: . . . .   **MATRICOLA:** . . . .

Corso di Laurea in Fisica, A.A. 2012/2013
Calcolo 2, Esame scritto del 30.01.2013

1) Si risolva il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' - y\cos x = y^2 \cos x \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

trovando

a) prima una soluzione locale, cioè la soluzione definita su un qualsiasi intervallo aperto contenente 0,

b) e poi la soluzione massimale, cioè il prolungamento massimale della soluzione locale.

2) Si calcoli l'area della sezione del solido cilindrico

$$\left\{ (x\,,y\,,z) \in \mathbb{R}^3\,; x^2 + y^2 \leq 4 \right\}$$

con il piano di equazione

$$z = x + y\,.$$

3) Si calcoli il flusso uscente del campo vettoriale piano

$$V(x\,,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{x}{x^2+y^2} \\ -\dfrac{y}{x^2+y^2} \end{pmatrix}\,, \qquad (0\,,0) \neq (x\,,y) \in \mathbb{R}^2$$

dal disco di centro $(0\,,0)$ e raggio 1.

4) Consideriamo la funzione periodica di periodo $2\,\pi$

$$f : \mathbb{R} \ni x \longmapsto \operatorname{sign}(\cos x) \in \mathbb{R}\,,$$

cioè la funzione periodica di periodo $2\,\pi$ che nell'intervallo $[\,-\pi\,,\pi\,]$ vale

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } |x| < \dfrac{\pi}{2}\,, \\ 0 & \text{se } |x| = \dfrac{\pi}{2}\,, \\ -1 & \text{se } \dfrac{\pi}{2} < |x| \leq \pi\,. \end{cases}$$

a) Si calcolino i coefficienti di Fourier $c_k(f)\,, k \in \mathbb{Z}$, di f e si studi la convergenza puntuale della serie di Fourier

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(f)\,e^{ikx}\,.$$

b) Si calcoli la somma della serie

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \big|c_k(f)\big|^2\,.$$

Soluzioni:

1) **:** Troviamo prima la soluzione generale. Possiamo procedere in due modi: osservando che si tratta di una equazione di Bernoulli, o sfruttando il fatto che l'equazione è a variabili separabili.

Usando il metodo di risolvere equazioni di Bernoulli:

Tramite la sostituzione

$$z = \frac{1}{y}\,, \quad y = \frac{1}{z}$$

l'equazione $y' - y\ \cos x = y^2 \cos x$ si riduce ad una equazione lineare del primo ordine:

$$-\frac{1}{z^2}\,z' - \frac{1}{z}\ \cos x = \frac{1}{z^2}\ \cos x\,,$$
$$z' + z\ \cos x = -\ \cos x\,.$$

La soluzione generale di questa equazione è

$$z(x) = c\,e^{-\ \sin x} - 1\ :$$

La soluzione generale dell'equazione omogenea $z' + z\ \cos x = 0$ essendo

$$z(x) = c\,e^{\int(-\cos x)\,\mathrm{d}x} = c\,e^{-\ \sin x}\,,$$

cerchiamo una soluzione particolare di $z' + z\ \cos x = -\ \cos x$ sotto la forma $z(x) = c(x)\,e^{-\ \sin x}$ e troviamo

$$c'(x)\,e^{-\ \sin x} = -\ \cos x \ \text{ cioè } \ c'(x) = -\,e^{\sin x}\cos x = \big(-\ e^{\sin x}\big)'.$$

Con $c(x) = -\,e^{\sin x}$ otteniamo la soluzione particolare $z(x) = -1$, quindi la soluzione generale di $z' + z\ \cos x = -\ \cos x$ è

$$z(x) = c\,e^{-\ \sin x} - 1\,.$$

Risulta che la soluzione generale di $y' - y\ \cos x = y^2 \cos x$ è

$$y(x) = \frac{1}{c\,e^{-\ \sin x} - 1}\,.$$

Risolvendo come equazione a variabili separabili:

Scriviamo l'equazione $y' - y\cos x = y^2 \cos x$ sotto la forma

$$y' = \big(y + y^2\big)\cos x$$

e deduciamo successivamente

$$\cos x = \frac{y'}{y+y^2} = \frac{y'}{y} - \frac{y'}{1+y} = \Big(\ln\Big|\frac{y}{1+y}\Big|\Big)',$$

$$\ln\Big|\frac{y}{1+y}\Big| = \sin x + \text{costante}\ ,$$

$$\Big|\frac{y}{1+y}\Big| = e^{\sin x}\cdot \text{costante positiva}\ ,$$

$$\frac{1}{y} + 1 = \frac{1+y}{y} = c\,e^{-\sin x}\,,$$

$$y(x) = \frac{1}{c\,e^{-\sin x} - 1}\,.$$

a) Se vogliamo che la soluzione soddisfi la condizione iniziale $y(0) = 1$, allora dobbiamo avere

$$1 = y(0) = \frac{1}{c-1} \Longrightarrow c = 2\,.$$

Perciò la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' - y\cos x = y^2\cos x \\ y(0) = 1 \end{cases} \tag{*}$$

è

$$y(x) = \frac{1}{2\,e^{-\sin x} - 1} \tag{**}$$

che è definita, per esempio, sull'intervallo $\Big(-\dfrac{\pi}{6}\,,\dfrac{\pi}{6}\Big)$ perché

$$|x| < \frac{\pi}{6} \Longrightarrow \big|\sin x\big| < \frac{1}{2} \Longrightarrow 2\,e^{-\sin x} - 1 > \frac{2}{\sqrt{e}} - 1 > 0\,.$$

b) Se i reali $\alpha < 0 < \beta$ sono tali che $2\,e^{-\sin x} - 1$ non si annulla in $(\alpha\,,\beta)$ allora $2\,e^{-\sin x} - 1$ non può cambiare segno in quest' intervallo e siccome $2\,e^{-\sin 0} - 1 = 1 > 0$, dobbiamo avere

$$2\,e^{-\sin x}-1>0\,,\qquad x\in(\alpha\,,\beta)\,.$$

Perciò la soluzione massimale del problema di Cauchy (*) è definita sul più grande intervallo $(\alpha\,,\beta)$ con $\alpha<0<\beta$ per quale vale

$$2\,e^{-\sin x}-1>0 \iff \sin x<\ln 2$$

per ogni $x\in(\alpha\,,\beta)$. Guardando il grafico del seno si vede subito che quest'intervallo è

$$\big(-\pi-\arcsin\ln 2\,,\arcsin\ln 2\big)\,.$$

Infatti, la soluzione (**) è definita su quest'intervallo ed ha asintoti verticali in $x=\arcsin\ln 2$ e $x=-\pi-\arcsin\ln 2$:

$$\begin{aligned}
&\lim_{\arcsin\ln 2>x\to\arcsin\ln 2}\frac{1}{2\,e^{-\sin x}-1}\\
&\overset{t=\sin x}{=}\lim_{\ln 2>t\to\ln 2}\frac{1}{2\,e^{-t}-1}=+\infty\,,\\
&\lim_{-\pi-\arcsin\ln 2<x\to-\pi-\arcsin\ln 2}\frac{1}{2\,e^{-\sin x}-1}\\
&\overset{y=x+\pi}{=}\lim_{-\arcsin\ln 2<y\to-\arcsin\ln 2}\frac{1}{2\,e^{\sin y}-1}\\
&\overset{z=-y}{=}\lim_{\arcsin\ln 2>z\to\arcsin\ln 2}\frac{1}{2\,e^{-\sin z}-1}\\
&\overset{s=\sin z}{=}\lim_{\ln 2>s\to\ln 2}\frac{1}{2\,e^{-s}-1}=+\infty\,.
\end{aligned}$$

2) : **Soluzione usando la formula per l'area di un grafico:**

Si sa che se $D\subset\mathbb{R}^2$ è un aperto limitato, misurabile secondo Peano-Jordan, e $f:\overline{D}\longrightarrow\mathbb{R}$ è una funzione continua, di classe C^1 in D e con le derivate parziali limitate, allora l'area del grafico di f è uguale a

$$\int\limits_D\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Ora la sezione del solido cilindrico

$$\big\{(x\,,y\,,z)\in\mathbb{R}^3\,;x^2+y^2\le 4\big\}$$

con il piano di equazione $z = x + y$ è il grafico della funzione

$$f : \big\{ (x\,,y) \in \mathbb{R}^2\,; x^2 + y^2 \leq 4 \big\} \ni (x\,,y) \longmapsto x + y \in \mathbb{R}\,.$$

Perciò la sua area è uguale a

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{x^2+y^2\leq 4} \sqrt{1+1^2+1^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \sqrt{3} \int\limits_{x^2+y^2\leq 4} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \sqrt{3} \cdot \big(\text{l'area del disco con centro } (0\,,0) \text{ e di raggio } 2\big) \\
&= 4\sqrt{3}\,\pi\,.
\end{aligned}$$

Soluzione usando parametrizzazione con coordinate cilindriche:

Il solido cilindrico

$$\big\{ (x\,,y\,,z) \in \mathbb{R}^3\,; x^2 + y^2 \leq 4 \big\}$$

è l'insieme di tutti i punti in $\mathbb{R}^3$ della forma

$$\begin{pmatrix} \rho\cos t \\ \rho\sin t \\ z \end{pmatrix}, \qquad 0 \leq \rho \leq 2\,,\ 0 \leq t \leq 2\pi\,,\ z \in \mathbb{R}\,,$$

quindi la sua intersezione S con il piano di equazione $z = x + y$ può essere parametrizzata come segue :

$$\varphi(\rho\,,t) = \begin{pmatrix} \rho\cos t \\ \rho\sin t \\ \rho(\cos t + \sin t) \end{pmatrix}, \qquad 0 \leq \rho \leq 2\,,\ 0 \leq t \leq 2\pi\,,$$

Poiché

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\rho} \times \frac{\partial\varphi}{\partial t} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \cos t & \sin t & \cos t + \sin t \\ -\rho\sin t & \rho\cos t & \rho(\cos t - \sin t) \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -\rho \\ -\rho \\ \rho \end{pmatrix},$$

l'elemento d'area è

$$\mathrm{d}\sigma = \left\| \frac{\partial\varphi}{\partial\rho} \times \frac{\partial\varphi}{\partial t} \right\| \mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}t = \sqrt{3}\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}t\,.$$

Di conseguenza l'area di S è

$$\int\limits_{\substack{0\leq\rho\leq 2\\ 0\leq t\leq 2\pi}} \sqrt{3}\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}t = 2\sqrt{3}\,\pi\int\limits_0^2 \rho\,\mathrm{d}t = 2\sqrt{3}\,\pi\,\frac{\rho^2}{2}\bigg|_{\rho=0}^{\rho=2} = 4\sqrt{3}\,\pi\,.$$

3) **:** Rimarchiamo anzitutto che non possiamo usare la formula di Gauss-Green, perché il campo $V(x\,,y)$ non è definito nel punto interno $(0\,,0)$ del disco di centro $(0\,,0)$ e raggio 1 ! Perciò è necessario usare calcolo diretto.

La circonferenza unità si parametrizza, come di solito, tramite l'angolo tra il vettore di posizione e la semiasse positivo delle ascisse (cioè usando le coordinate polari) :

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}\,, 0\leq t\leq 2\pi\,.$$

Il vettore tangente nel punto $\gamma(t)$ è

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

ed è già normalizzato. In questa parametrizzazione il senso di percorso della circonferenza è quello antiorario, perciò il versore normale che punta fuori dal disco si ottiene girando il versore tangente $\gamma'(t)$ a destra con un angolo retto :

$$\begin{aligned} n\big(\gamma(t)\big) &= \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{2} & \sin\frac{\pi}{2} \\ -\sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} \end{pmatrix}\gamma'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Risulta che il flusso uscente del campo $V(x\,,y)$ dal disco unità è

$$\begin{aligned} &\int\limits_{x^2+y^2=1} \big(V(x\,,y)\cdot n(x\,,y)\big)\mathrm{d}s(x\,,y) \\ &= \int\limits_0^{2\pi}\Big(V\big(\gamma(t)\big)\cdot n\big(\gamma(t)\big)\Big)\mathrm{d}t = \int\limits_0^{2\pi}\left[\begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}\right]\mathrm{d}t \end{aligned}$$

$$= \int_0^{2\pi} (\cos^2 t - \sin^2 t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \cos(2t)\,\mathrm{d}t$$
$$= 0\,.$$

4) **:** a) Nell'intervallo $[\,-\pi\,,\pi\,]$ la funzione f è la differenza della funzione caratteristica di $\left(-\dfrac{\pi}{2}\,,\dfrac{\pi}{2}\right)$ e di $\left[-\pi\,,-\dfrac{\pi}{2}\right)\cup\left(\dfrac{\pi}{2}\,,\pi\right]$:

$$f(x) = \chi_{\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)}(x) - \chi_{\left[-\pi,-\frac{\pi}{2}\right)}(x) - \chi_{\left(\frac{\pi}{2},\pi\right]}(x)\,.$$

Perciò i coefficienti di Fourier (complessi) di f sono

$$\begin{aligned}
c_k(f) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,e^{-ikx}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-ikx}\,\mathrm{d}x - \int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} e^{-ikx}\,\mathrm{d}x - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{-ikx}\,\mathrm{d}x\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{e^{-ikx}}{-ik}\Bigg|_{x=-\frac{\pi}{2}}^{x=\frac{\pi}{2}} - \frac{e^{-ikx}}{-ik}\Bigg|_{x=-\pi}^{x=-\frac{\pi}{2}} - \frac{e^{-ikx}}{-ik}\Bigg|_{x=\frac{\pi}{2}}^{x=\pi}\right) - \\
&= \frac{1}{2\pi k i}\left(e^{i\frac{k\pi}{2}} - e^{-i\frac{k\pi}{2}} + e^{i\frac{k\pi}{2}} \underbrace{-e^{ik\pi} + e^{-ik\pi}}_{=0} - e^{-i\frac{k\pi}{2}}\right) \\
&= \frac{1}{\pi k i}\left(e^{i\frac{k\pi}{2}} - e^{-i\frac{k\pi}{2}}\right) \\
&= \frac{2}{\pi k}\sin\frac{k\pi}{2}\,, \qquad k \in \mathbb{Z}\,.
\end{aligned}$$

Ora, per k pari $\sin\dfrac{k\pi}{2} = 0$, mentre per k dispari

$$\begin{aligned}
\sin\frac{k\pi}{2} &= \sin\left(\frac{k-1}{2}\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} 1 & \text{se } \dfrac{k-1}{2} \text{ pari} \\ -1 & \text{se } \dfrac{k-1}{2} \text{ dispari} \end{cases} \\
&= (-1)^{\frac{k-1}{2}}\,.
\end{aligned}$$

Risulta che

$$c_k(f) = \begin{cases} 0 & \text{se } k \text{ pari} \\ (-1)^{\frac{k-1}{2}} \dfrac{2}{\pi k} & \text{se } k \text{ dispari} \end{cases}, \qquad k \in \mathbb{Z}$$

e la serie di Fourier di f è

$$\sum_{k \in \mathbb{Z} \text{ dispari}} (-1)^{\frac{k-1}{2}} \frac{2}{\pi k} e^{ikx} .$$

Poiché la funzione f è regolare a tratti, la sua serie di Fourier converge in ogni punto $x \in \mathbb{R}$ à

$$\frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}$$

che nel nostro caso è sempre uguale a $f(x)$. Cosicché

$$\sum_{k \in \mathbb{Z} \text{ dispari}} (-1)^{\frac{k-1}{2}} \frac{2}{\pi k} e^{ikx} = \begin{cases} 1 & \text{se } |x| < \dfrac{\pi}{2} , \\ 0 & \text{se } |x| = \dfrac{\pi}{2} , \\ -1 & \text{se } \dfrac{\pi}{2} < |x| \leq \pi . \end{cases}$$

Calcoliamo anche i coefficienti di Fourier reali. Poiché f è una funzione pari, i coefficienti $b_k(f)\, , k \geq 1$, dei seni $\sin(kx)$ si annullano. D'altro canto, $a_o(f) = 2\, c_o(f) = 0$ mentre per ogni $k \geq 1$

$$\begin{aligned} a_k(f) &= c_k(f) + c_{-k}(f) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{se } k \text{ pari} \\ (-1)^{\frac{k-1}{2}} \dfrac{2}{\pi k} - (-1)^{\frac{-k-1}{2}} \dfrac{2}{\pi k} & \text{se } k \text{ dispari} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{se } k \text{ pari} \\ (-1)^{\frac{k-1}{2}} \dfrac{4}{\pi k} & \text{se } k \text{ dispari} \end{cases} . \end{aligned}$$

Perciò si tratta di una serie di coseni che converge puntualmente ad f:

$$\sum_{k \geq 1 \text{ dispari}} (-1)^{\frac{k-1}{2}} \frac{4}{\pi k} \cos(kx) = \begin{cases} 1 & \text{se } |x| < \dfrac{\pi}{2} , \\ 0 & \text{se } |x| = \dfrac{\pi}{2} , \\ -1 & \text{se } \dfrac{\pi}{2} < |x| \leq \pi . \end{cases}$$

Rimarco :

Scrivendo i numeri naturali dispari $k \geq 1$ come $k = 2j + 1$ con $j \geq 0$, possiamo rescrivere l'ugualità precedente come

$$\sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{4}{\pi(2j+1)} \cos\big((2j+1)x\big) = \begin{cases} 1 & \text{se } |x| < \dfrac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{se } |x| = \dfrac{\pi}{2}, \\ -1 & \text{se } \dfrac{\pi}{2} < |x| \leq \pi, \end{cases}$$

ossia

$$\sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{\cos\big((2j+1)x\big)}{2j+1} = \begin{cases} \dfrac{\pi}{4} & \text{se } |x| < \dfrac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{se } |x| = \dfrac{\pi}{2}, \\ -\dfrac{\pi}{4} & \text{se } \dfrac{\pi}{2} < |x| \leq \pi, \end{cases}$$

In particolare, per $x = 0$ otteniamo la formula nota di Leibniz

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{1}{2j+1} = \frac{\pi}{4}.$$

b) Poiché $\big|f(x)\big| = 1, \pm\dfrac{\pi}{2} \neq x \in [-\pi, \pi]$, per l'identità di Parseval abbiamo

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \big|c_k(f)\big|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \big|f(x)\big|^2 \mathrm{d}x = 1,$$

cioè

$$\sum_{k \in \mathbb{Z} \text{ dispari}} \frac{4}{\pi^2 k^2} = 1 \iff \sum_{k \in \mathbb{Z} \text{ dispari}} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{4}.$$

Per i coefficienti di Fourier reali l'identità di Parseval prende al forma (equivalente)

$$\frac{a_o(f)^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\big|a_k(f)\big|^2 + \big|b_k(f)\big|^2\Big) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \big|f(x)\big|^2 \mathrm{d}x = 2,$$

cioè

$$\sum_{k \geq 1 \text{ dispari}} \frac{16}{\pi^2 k^2} = 2 \iff \sum_{k \geq 1 \text{ dispari}} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Rimarco :

Scrivendo i numeri naturali dispari $k \geq 1$ come $k = 2j + 1$ con $j \geq 0$, possiamo rescrivere l'ugualità precedente come

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \ ... \ = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2j+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \, .$$

Usando questa ugualità possiamo calcolare anche la somma s della serie armonica generalizzata $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ (formula di Eulero) :

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2j+1)^2} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(2j)^2} = \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{4} s$$

implica $\frac{3}{4} s = \frac{\pi^2}{8}$, cioè $s = \frac{\pi^2}{6}$:

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ ... \ = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \, .$$