NOME: ....   **MATRICOLA:** ....

Corso di Laurea in Fisica, A.A. 2014/2015
Calcolo 2, Esame scritto del 30.01.2015

1) Si risolva il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x\,y' + y = y^2 \ln x \\ y(1) = -1 \end{cases}$$

trovando

a) prima una soluzione locale, cioè la soluzione definita su un qualsiasi intervallo aperto contenente 1,

b) e poi la soluzione massimale, cioè la soluzione sul più grande intervallo aperto contenente 1 sul quale esiste ancora soluzione.

2) Si calcoli l'integrale doppio

$$\int\limits_{x^2+y^2\leq x+y} (x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

3) Si calcoli il flusso uscente del campo vettoriale

$$V(x\,,y\,,z) = \begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \\ z^2 \end{pmatrix}\,, \qquad (x\,,y\,,z) \in \mathbb{R}^3$$

attraverso la frontiera dell'intersezione del cono solido $z \geq \sqrt{x^2+y^2}$ con il semispazio $z \leq 4$, cioè del solido

$$\sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 4\,.$$

Osservazione: Si può calcolare direttamente oppure usare il teorema della divergenza, a piacimento.

4) Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la funzione dispari, periodica di periodo $2\,\pi$, che si annulla in ogni multiplo intero di π ed è identicamente uguale a 1 in $(\,0\,,\pi\,)$.

a) Si calcolino i coefficienti di Fourier $c_k(f)\,,k \in \mathbb{Z}$ (oppure $a_k(f)\,,k \geq 0$, e $b_k(f)\,,k \geq 1$, a piacimento) di f, e si studi la convergenza puntuale della serie di Fourier

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(f)\,e^{ikx}$$

$$\left(\text{rispettivamente } \frac{a_o(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\Big(a_k(f)\cos(kx) + b_k(f)\sin(kx)\Big)\right).$$

b) Si mostri che esiste una unica funzione continua $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, derivabile in ogni $x \in \mathbb{R}$ che non è multiplo intero di π, e soddisfacente

$$g'(x) = f(x)\,, \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{k\,\pi\,;\,k \in \mathbb{Z}\}\,,$$
$$g(0) = 0\,.$$

c) Si mostri che g è periodica di periodo $2\,\pi$ e si trovino i coefficienti di Fourier di g.

Soluzioni:

1) **:** Troviamo prima la soluzione generale.

Si tratta di una equazione di Bernoulli. La funzione identicamente nulla $y = 0$ è ovviamente una soluzione, ma non rilevante per la soluzione del nostro problema di Cauchy.

Cercando le soluzioni non nulle, tramite la sostituzione

$$z = \frac{1}{y}\,, \quad y = \frac{1}{z}$$

l'equazione $x\,y' + y = y^2 \ln x$ si riduce ad una equazione differenziale lineare:

$$-x\,\frac{1}{z^2}\,z' + \frac{1}{z} = \frac{1}{z^2}\,\ln x\,,$$
$$z' - \frac{1}{x}\,z = -\,\frac{\ln x}{x}\,.$$

La soluzione generale di questa equazione è

$$z(x) = c\,x + \ln x + 1\ :$$

Siccome la soluzione generale dell'equazione omogenea

$$z' - \frac{1}{x}\,z = 0$$

è

$$z(x) = c\,e^{\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x} = c\,e^{\ln x} = c\,x\,,$$

cerchiamo una soluzione particolare di $z' - \dfrac{1}{x}\,z = -\,\dfrac{\ln x}{x}$ sotto la forma $z(x) = c(x)\,x$ e troviamo

$$c'(x)\,x = -\,\frac{\ln x}{x} \ \text{ cioè } \ c'(x) = -\,\frac{\ln x}{x^2}\,.$$

Tramite integrazione per parti risulta

$$c(x) = \int -\,\frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x = \int \ln x\,\mathrm{d}\frac{1}{x} = \frac{\ln x}{x} - \int \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} + \text{costante}$$

e con $c(x) = \dfrac{\ln x}{x} + \dfrac{1}{x}$ otteniamo la soluzione particolare

$$z(x) = \ln x + 1\,.$$

Quindi la soluzione generale di $z' - \dfrac{1}{x}\,z = -\,\dfrac{\ln x}{x}$ è

$$z(x) = c\,x + \ln x + 1\,.$$

Risulta che la forma generale di una soluzione non nulla dell'equazione $x\,y' + y = y^2 \ln x$ è

$$y(x) = \frac{1}{c\,x + \ln x + 1}\,.$$

a) Se vogliamo che la soluzione soddisfi la condizione iniziale $y(1) = -1$, allora dobbiamo avere

$$-1 = y(1) = \frac{1}{c+1} \Longrightarrow c = -2\,.$$

Perciò la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} x\,y' + y = y^2 \ln x \\ y(1) = -1 \end{cases} \tag{*}$$

è

$$y(x) = \frac{1}{1 - 2\,x + \ln x} \tag{**}$$

che è definita, per esempio, sull'intervallo $\left(\dfrac{3}{4}\,,\sqrt{e}\right)$ perché

$$\frac{3}{4} < x < \sqrt{e} \Longrightarrow \underbrace{1 - 2\,x}_{<\,-1/2} + \underbrace{\ln x}_{<\,1/2} < 0 \Longrightarrow 1 - 2\,x + \ln x \neq 0\,.$$

b) Se $0 \le \alpha < 1 < \beta \le +\infty$ sono tali che $1 - 2\,x + \ln x$ non si annulla in $(\alpha\,,\beta)$ allora $1 - 2\,x + \ln x$ non può cambiare segno in quest' intervallo e siccome $1 - 21 + \ln 1 = -1 < 0$, dobbiamo avere

$$1 - 2\,x + \ln x < 0\,, \qquad x \in (\alpha\,,\beta)\,. \tag{***}$$

Perciò la soluzione massimale del problema di Cauchy (*) è definita sul più grande intervallo $(\alpha\,,\beta)$ con $0 \le \alpha < 1 < \beta \le +\infty$ per il quale vale la condzione precedente (***).

Per trovare questi α e β studiamo il grafico della funzione

$$\varphi : (0\,,+\infty) \ni x \longmapsto 1 - 2x + \ln x$$

Poiché la derivata $\varphi'(x) = -2 + \dfrac{1}{x}$ è positiva per $x < \dfrac{1}{2}$ e negativa per $x > \dfrac{1}{2}$, $x = \dfrac{1}{2}$ è un punto di massimo globale per φ, cioè vale

$$1 - 2x + \ln x = \varphi(x) \leq \varphi\Big(\frac{1}{2}\Big) = -\ln 2 < 0\,, \qquad x \in (0\,,+\infty)\,.$$

In altre parole la condizione (***) è soddisfatta con $\alpha = 0$ e $\beta = +\infty$.

Possiamo quindi concludere che la soluzione massimale del problema di Cauchy (*) è definita su tutto $(0\,,+\infty)$ tramite la formula (**).

2) : **Soluzione tramite passaggio alle coordinate polari centrate convenabilmente:**

La disuguaglianza $x^2+y^2 \leq x+y$ che definisce il dominio d'integrazione è equivalente a

$$\begin{aligned}
&\Big(x - \frac{1}{2}\Big)^2 + \Big(y - \frac{1}{2}\Big)^2 - \frac{1}{2} = x^2 + y^2 - x - y \leq 0\\
&\Big(x - \frac{1}{2}\Big)^2 + \Big(y - \frac{1}{2}\Big)^2 \leq \frac{1}{2} = \Big(\frac{1}{\sqrt{2}}\Big)^2,
\end{aligned}$$

perciò il dominio d'integrazione è il disco con centro $\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$ e raggio $1/\sqrt{2}$. Di conseguenza è convenabile il passaggio alle coordinate polari centrate in $\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$:

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2} + \rho\cos\varphi \\ y = \dfrac{1}{2} + \rho\sin\varphi \end{cases}, \qquad \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi\,.$$

Tramite questo passaggio il dominio d'integrazione $x^2 + y^2 \leq x + y$ si trasforma in il rettangolo

$$0 \leq \rho \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\,, \quad -\pi < \theta \leq \pi\,.$$

ed otteniamo

$$\begin{aligned}
\int\limits_{x^2+y^2\leq x+y} (x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int\limits_{\substack{0\leq\rho\leq 1/\sqrt{2}\\ -\pi<\varphi\leq\pi}} \big(\rho\cos\varphi+\rho\sin\varphi+1\big)\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi \\
&= \int\limits_0^{1/\sqrt{2}} \rho\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi}\big(\rho\cos\varphi+\rho\sin\varphi+1\big)\mathrm{d}\varphi\right)\mathrm{d}\rho \\
&= \int\limits_0^{1/\sqrt{2}} \rho\left(\rho\sin\varphi\,\Big|_{\varphi=-\pi}^{\varphi=\pi} - \rho\cos\varphi\,\Big|_{\varphi=-\pi}^{\varphi=\pi} + 2\pi\right)\mathrm{d}\rho \\
&= 2\pi\int\limits_0^{1/\sqrt{2}} \rho\,\mathrm{d}\rho = 2\pi\,\frac{\rho^2}{2}\,\Big|_{\rho=0}^{\rho=1/\sqrt{2}} = \frac{\pi}{2}\,.
\end{aligned}$$

Soluzione tramite passaggio alle coordinate polari centrate in origine:

Il dominio d'integrazione D è descritto dalla disuguaglianza

$$x^2+y^2\leq x+y\,.$$

Tramite il passaggio alle coordinate polari

$$\left\{\begin{array}{l} x=\rho\cos\varphi \\ y=\rho\sin\varphi \end{array}\right. \quad , \quad \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi$$

D si trasforma in il dominio descritto dalle disuguaglianze

$$\begin{aligned}
&\rho\geq 0\,,\quad -\pi<\varphi\leq\pi\,,\quad \rho^2\leq\rho\cos\varphi+\rho\sin\varphi \\
\Longleftrightarrow\ &0\leq\rho\leq\cos\varphi+\sin\varphi\,,\quad -\pi<\varphi\leq\pi\,.
\end{aligned}$$

Accorgiamoci però che qui non ogni valore $-\pi<\varphi\leq\pi$ è preso. Infatti, dobbiamo avere $0\leq\cos\varphi+\sin\varphi$, altrimenti tra 0 e $\cos\varphi+\sin\varphi$ non si trova nessun ρ. È facile vedere che

$$-\pi<\varphi\leq\pi\,,\cos\varphi+\sin\varphi\geq 0 \Longleftrightarrow -\frac{\pi}{4}\leq\varphi\leq\frac{3\pi}{4}\,,$$

perciò

$$D=\left\{\begin{pmatrix}\rho\cos\varphi\\ \rho\sin\varphi\end{pmatrix}\,;\,0\leq\rho\leq\cos\varphi+\sin\varphi\,,-\frac{\pi}{4}\leq\varphi\leq\frac{3\pi}{4}\right\}.$$

Di conseguenza

$$\int\limits_{x^2+y^2\le x+y} (x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int\limits_{\substack{0\le\rho\le\cos\varphi+\sin\varphi\\ -\pi/4\le\varphi<3\pi/4}} \rho\,(\cos\varphi+\sin\varphi)\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi$$

$$= \int\limits_{-\pi/4}^{3\pi/4} \Bigg((\cos\varphi+\sin\varphi)\int\limits_{0}^{\cos\varphi+\sin\varphi} \rho^2\mathrm{d}\rho\Bigg)\mathrm{d}\varphi$$

$$= \frac{1}{3}\int\limits_{-\pi/4}^{3\pi/4} (\cos\varphi+\sin\varphi)^4\mathrm{d}\varphi\,.$$

Usando ora che

$$\begin{aligned}(\cos\varphi+\sin\varphi)^4 &= (\cos^2\varphi+\sin^2\varphi+2\sin\varphi\cos\varphi)^2 = \big(1+\sin(2\varphi)\big)^2\\ &= 1+\sin^2(2\varphi)+2\sin(2\varphi)\\ &= 1+\frac{1-\cos(4\varphi)}{2}+2\sin(2\varphi)\\ &= \frac{3}{2}-\frac{\cos(4\varphi)}{2}+2\sin(2\varphi)\,,\end{aligned}$$

possiamo concludere che

$$\int\limits_{x^2+y^2\le x+y} (x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{1}{3}\int\limits_{-\pi/4}^{3\pi/4}\Bigg(\frac{3}{2}-\frac{\cos(4\varphi)}{2}+2\sin(2\varphi)\Bigg)\mathrm{d}\varphi$$

$$= \frac{1}{3}\Bigg(\frac{3}{2}\varphi-\frac{\sin(4\varphi)}{8}-\cos(2\varphi)\Bigg)\Bigg|_{\varphi=-\pi/4}^{\varphi=3\pi/4}$$

$$= \frac{1}{3}\,\frac{3}{2}\Bigg(\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\Bigg) = \frac{\pi}{2}\,.$$

Soluzione tramite passaggio alle coordinate polari centrate in origine, preceduto da una sostituzione semplificatore:

Per semplificare l'integrando, useremo il cambiamento di variabili

$$\begin{cases} u = x+y \\ v = x-y \end{cases} , \quad \begin{cases} x = \dfrac{u+v}{2} \\ y = \dfrac{u-v}{2} \end{cases} , \quad \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,.$$

Tramite questa sostituzione il dominio di integrazione descritto dalla disuguaglianza

$$x^2+y^2 \leq x+y\,,$$

si trasforma in il dominio E descritto da

$$\frac{(u+v)^2}{4} + \frac{(u-v)^2}{4} \leq u \iff u^2+v^2 \leq 2\,u\,.$$

Perciò

$$\int\limits_{x^2+y^2\leq x+y} (x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2} \int\limits_{u^2+v^2\leq 2\,u} u\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

Ora passiamo alle coordinate polari:

$$\begin{cases} u = r\cos\theta \\ v = r\sin\theta \end{cases} , \quad \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,.$$

Tramite questo passaggio E si trasforma in il dominio descritto dalle disuguaglianze

$$r \geq 0\,, \quad -\pi < \theta \leq \pi\,, \quad r^2 \leq 2\,r\cos\theta$$

$$\iff 0 \leq r \leq 2\cos\theta\,, \quad -\pi < \theta \leq \pi\,.$$

Perché esisti r con $0 \leq r \leq 2\cos\theta$, dobbiamo avere

$$\cos\theta \geq 0 \iff |\theta| \leq \frac{\pi}{2}\,,$$

e così

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix} ;\, 0 \leq r \leq 2\cos\theta\,, -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right\}.$$

Di conseguenza

$$\int\limits_{x^2+y^2\leq x+y} (x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int\limits_{E} u\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \frac{1}{2} \int\limits_{\substack{0\leq r\leq 2\cos\theta \\ -\pi/2\leq\theta<\pi/2}} r\,(\cos\theta)\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \left((\cos\theta) \int\limits_{0}^{2\cos\theta} r^2 \mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{4}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4\theta \, \mathrm{d}\theta \, .$$

Tenendo conto che

$$\begin{aligned}
\cos^4\theta &= \left(\frac{1+\cos(2\theta)}{2} \right)^2 = \frac{1+2\cos(2\theta)+\cos^2(2\theta)}{4} \\
&= \frac{1}{4} + \frac{\cos(2\theta)}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1+\cos(4\theta)}{2} \\
&= \frac{3}{8} + \frac{\cos(2\theta)}{2} + \frac{\cos(4\theta)}{8}
\end{aligned}$$

otteniamo

$$\begin{aligned}
\int_{x^2+y^2 \leq x+y} (x+y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y &= \frac{4}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{3}{8} + \frac{\cos(2\theta)}{2} + \frac{\cos(4\theta)}{8} \right) \mathrm{d}\theta \\
&= \frac{4}{3} \left(\frac{3}{8}\theta + \frac{\sin(2\theta)}{4} + \frac{\sin(4\theta)}{32} \right) \Bigg|_{\theta=-\pi/2}^{\theta=\pi/2} \\
&= \frac{4}{3}\, \frac{3}{8} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{2} \, .
\end{aligned}$$

3) : **Soluzione tramite calcolo diretto:**

La frontiera del solido descritto dalle disuguaglianze $\sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 4$ è la superficie composta da due pezzi:

1) Il tratto $\mathcal{S}_1$ della superficie conica $z = \sqrt{x^2+y^2}$ tra le altezze 0 e 4, che si può parametrizzare come segue:

$$\begin{cases} x = z\cos\varphi \\ y = z\sin\varphi \\ z = z \end{cases} , \quad 0 \leq z \leq 4 \, , \; 0 \leq \varphi < 2\pi \, .$$

2) Il coperchio $\mathcal{S}_2$ dell'imbuto $\mathcal{S}_1$, cioè il disco descritto da $x^2+y^2 \leq 4^2$ e $z = 4$, avendo la parametrizzazione

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = 4 \end{cases} , \quad 0 \leq \rho \leq 4 \, , \; 0 \leq \varphi < 2\pi \, .$$

Per calcolare l'elemento di area e il versore normale per $\mathcal{S}_1$ abbiamo da calcolare il prodotto vettoriale $\dfrac{\partial}{\partial\varphi}\begin{pmatrix} x \\ y \\ x \end{pmatrix} \times \dfrac{\partial}{\partial z}\begin{pmatrix} x \\ y \\ x \end{pmatrix}$, uguale a

$$\begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial x}{\partial\varphi} & \dfrac{\partial y}{\partial\varphi} & \dfrac{\partial z}{\partial\varphi} \\ \dfrac{\partial x}{\partial z} & \dfrac{\partial y}{\partial z} & \dfrac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ -z\sin\varphi & z\cos\varphi & 0 \\ \cos\varphi & \sin\varphi & 1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} z\cos\varphi \\ z\sin\varphi \\ -z \end{pmatrix}.$$

Questo vettore punta fuori dal solido $\sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 4$ avendo il terzo componente negativo. Risulta che l'elemento d'area per $\mathcal{S}_1$ è

$$\mathrm{d}\sigma = \sqrt{z^2\cos^2\varphi + z^2\sin^2\varphi + z^2}\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z = \sqrt{2}\,z\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z\,,$$

mentre il versore normale uscente è

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{z^2\cos^2\varphi + z^2\sin^2\varphi + z^2}}\begin{pmatrix} z\cos\varphi \\ z\sin\varphi \\ -z \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Ora abbiamo tutti gli ingredienti per calcolare il flusso del campo

$$V(x\,,y\,,z) = \begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \\ z^2 \end{pmatrix}$$

attraverso $\mathcal{S}_1$ nella direzione uscente dal solido $\sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 4$:

$$\begin{aligned} \int\limits_{\mathcal{S}_1} \big(V\cdot\vec{n}\big)\mathrm{d}\sigma &= \int\limits_{\substack{0\leq\varphi<2\pi \\ 0\leq z\leq 4}} \big(z^3\cos^3\varphi + z^3\sin^3\varphi - z^3\big)\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z \\ &= \int\limits_0^{2\pi}\Big(\big(\cos^3\varphi + \sin^3\varphi - 1\big)\int\limits_0^4 z^3\mathrm{d}z\Big)\mathrm{d}\varphi \\ &= 64\Big(\int\limits_0^{2\pi}(1-\sin^2\varphi)\,\mathrm{d}\sin\varphi - \int\limits_0^{2\pi}(1-\cos^2\varphi)\,\mathrm{d}\cos\varphi - 2\pi\Big) \end{aligned}$$

$$= 64\left(\left(\sin\varphi - \frac{\sin^3\varphi}{3}\right)\Bigg|_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} - \underbrace{\left(\cos\varphi - \frac{\cos^3\varphi}{3}\right)\Bigg|_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi}}_{-128\pi}\right)$$

$$= -128\,\pi\,.$$

Il calcolo del flusso attraverso $\mathcal{S}_2$ è più facile:

L'elemento d'area è visibilmente $\mathrm{d}\sigma = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi$ ed il versore normale uscente dal solido $\sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 4$ è in ogni punto uguale al vettore $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Cosicché

$$\int_{\mathcal{S}_2} \big(V \cdot \vec{n}\big)\mathrm{d}\sigma = \int_{\substack{0\leq\varphi<2\pi \\ 0\leq\rho\leq 4}} 16\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi = 16\int_0^{2\pi}\left(\int_0^4 \rho\,\mathrm{d}\rho\right)\mathrm{d}\varphi = 16\int_0^{2\pi} 8\,\mathrm{d}\varphi$$
$$= 256\,\pi\,.$$

Concludiamo ora che il flusso uscente del campo $V(x\,,y\,z)$ attraverso la frontiera del solido $\sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 4$ è uguale a

$$\int_{\mathcal{S}_1} \big(V \cdot \vec{n}\big)\mathrm{d}\sigma + \int_{\mathcal{S}_2} \big(V \cdot \vec{n}\big)\mathrm{d}\sigma = -128\,\pi + 256\,\pi = 128\,\pi\,.$$

Soluzione usando il teorema della divergenza:

Per poter applicare il teorema della divergenza, calcoliamo la divergenza del campo $V(x\,,y\,,z) = \begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \\ z^2 \end{pmatrix}$: poiché

$$\frac{\partial}{\partial x}\big(x^2\big) = 2\,x\,, \quad \frac{\partial}{\partial y}\big(y^2\big) = 2\,y\,, \quad \frac{\partial}{\partial x}\big(z^2\big) = 2\,z\,,$$

risulta

$$(\operatorname{div} V)(x\,,y\,,z) = 2\,(x+y+z)\,.$$

Usando il teorema della divergenza (Teorema di Gauss-Ostrogradski) risulta ora che il flusso uscente del campo $V(x\,,y\,z)$ dal solido

$$\sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 4$$

è uguale all'integrale di volume

$$I := \int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}\le z\le 4} (\operatorname{div} V)(x\,,y\,,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$
$$= \int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}\le z\le 4} 2\,(x+y+z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,.$$

Per il calcolo di I ci conviene passare alle coordinate cilindriche

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = z \end{cases} \quad , \quad 0 \le \rho \le z \le 4\,, 0 \le \varphi < 2\pi\,,$$

per i quali abbiamo $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z$:

$$I = \iiint\limits_{\substack{0\le\rho\le z\le 4\\ 0\le\varphi\le 2\pi}} 2\,\big(\rho\cos\varphi + \rho\sin\varphi + z\big)\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z$$

$$= \iint\limits_{0\le\rho\le z\le 4} 2\,\rho\Bigg(\int_0^{2\pi}\big(\rho\cos\varphi + \rho\sin\varphi + z\big)\mathrm{d}\varphi\Bigg)\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}z$$

$$= \iint\limits_{0\le\rho\le z\le 4} 2\,\rho\Bigg(\rho\underbrace{\int_0^{2\pi}\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi}_{=\,0} + \rho\underbrace{\int_0^{2\pi}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi}_{=\,0} + \int_0^{2\pi} z\,\mathrm{d}\varphi\Bigg)\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}z$$

$$= 4\pi\iint\limits_{0\le\rho\le z\le 4}\rho\,z\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}z = 4\pi\int_0^4 z\Bigg(\underbrace{\int_0^z \rho\,\mathrm{d}\rho}_{=\,z^2/2}\Bigg)\mathrm{d}z = 2\pi\int_0^4 z^3\mathrm{d}z$$

$$= 128\,\pi\,.$$

4) : a) Poiché f è dispari, è identicamente uguale a -1 in $(-\pi\,,0)$. Per la sua periodicità risulta che

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{per } x \in \big(k\pi\,,k\pi+\pi\big) \text{ con } k \text{ pari,} \\ -1 & \text{per } x \in \big(k\pi\,,k\pi+\pi\big) \text{ con } k \text{ dispari,} \\ 0 & \text{per } x = k\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z}\,. \end{cases}$$

Poiché f è dispari, abbiamo

$$c_o(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = 0\,.$$

Per $k \neq 0$ invece otteniamo

$$\begin{aligned} c_k(f) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,e^{-ikx}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{\pi} e^{-ikx}\,\mathrm{d}x - \int_{-\pi}^{0} e^{-ikx}\,\mathrm{d}x \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \big(e^{-ikx} - e^{ikx}\big)\mathrm{d}x = -\frac{i}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(k\,x)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{i}{\pi}\,\frac{\cos(k\,x)}{k}\Bigg|_{x=-\pi}^{x=\pi} = \frac{i}{\pi}\,\frac{\cos(k\,\pi) - 1}{k} \\ &= \frac{i}{\pi}\,\frac{(-1)^k - 1}{k} \end{aligned}$$

Cosicché la serie di Fourier di f è

$$\frac{i}{\pi} \sum_{0 \neq k \in \mathbb{Z}} \frac{(-1)^k - 1}{k}\, e^{ikx}\,.$$

Poiché la funzione f è regolare a tratti, la sua serie di Fourier converge in ogni punto $x \in \mathbb{R}$ à

$$\frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}$$

che nel nostro caso è uguale ad $f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Cosicché

$$\frac{i}{\pi} \sum_{0 \neq k \in \mathbb{Z}} \frac{(-1)^k - 1}{k}\, e^{ikx} = \begin{cases} \;\;1 & \text{per } x \in \big(0\,,\pi\big) \\ -1 & \text{per } x \in \big(-\pi\,,0\big) \\ \;\;0 & \text{per } x = -\pi\,,\pi \end{cases}.$$

Calcoliamo anche i coefficienti di Fourier reali :

$$\begin{aligned} a_k(f) &= c_k(f) + c_{-k}(f) = 0\,, && k \geq 0\,, \\ b_k(f) &= i\big(c_k(f) - c_{-k}(f)\big) = \frac{2}{\pi}\,\frac{1 - (-1)^k}{k}\,, && k \geq 1\,. \end{aligned}$$

Con i coefficienti di Fourier reali risulta la convergenza

$$\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^k}{k}\sin(kx) = \begin{cases} 1 & \text{per } x\in\big(0\,,\pi\big) \\ -1 & \text{per } x\in\big(-\pi\,,0\big) \\ 0 & \text{per } x=-\pi\,,\pi \end{cases}\ .$$

b) Definiamo $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ tramite la formula

$$g(x) := \int\limits_0^x f(\xi)\,\mathrm{d}\xi\,.$$

Allora g è continua e per ogni $x\in\mathbb{R}\setminus\{k\pi\,;\,k\in\mathbb{Z}\}$, x essendo un punto di continuità di f, g è derivabile in x e $g'(x)=f(x)$. Inoltre,

$$g(0) = \int\limits_0^0 f(\xi)\,\mathrm{d}\xi = 0\,.$$

Sia ora $h:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ è una funzione continua qualsiasi soddisfacente le condizioni

$$\begin{aligned} h'(x) &= f(x)\,, \qquad x\in\mathbb{R}\setminus\{k\pi\,;\,k\in\mathbb{Z}\}\,,\\ h(0) &= 0\,. \end{aligned}$$

Poiché h è continua e regolare a tratti, abbiamo per ogni $x\in\mathbb{R}$

$$h(x) = h(x)-h(0) = \int\limits_0^x h'(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \int\limits_0^x f(\xi)\,\mathrm{d}\xi = g(x)\,.$$

c) Siccome

$$g(x+2\pi)-g(x) = \int\limits_x^{x+2\pi} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi\,, \qquad x\in\mathbb{R}$$

ed f è una funzione continua a tratti e di periodo 2π, quindi avendo lo stesso integrale su ogni intervallo di lunghezza 2π, abbiamo

$$\begin{aligned} g(x+2\pi)-g(x) &= \int\limits_x^{x+2\pi} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi \\ &= \int\limits_{-\pi}^{0}(-1)\,\mathrm{d}\xi + \int\limits_0^{\pi} 1\,\mathrm{d}\xi = -\pi+\pi = 0\,, \qquad x\in\mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

In altre parole, g è periodica e di periodo 2π .

È noto che tra i coefficienti di Fourier della funzione continua e regolare a tratti g ed i coefficienti di Fourier della sua derivata abbiamo la relazione

$$c_k(g') = ik\, c_k(g)\,, \qquad 0 \neq k \in \mathbb{Z}\,.$$

Perciò

$$c_k(g) = \frac{1}{ik}\, c_k(g') = \frac{1}{ik}\, c_k(f) = \frac{1}{\pi}\, \frac{(-1)^k - 1}{k^2}\,, \qquad 0 \neq k \in \mathbb{Z}\,.$$

Il coefficiente $c_o(g)$ invece non possiamo dedurre dai coefficienti della derivata f di g , perché alla derivazione si perde. Lo dobbiamo calcolare direttamente.

Poiché

$$g(x) = \int\limits_0^x f(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \begin{cases} \int\limits_0^x 1\,\mathrm{d}\xi = x \quad \text{per} \ \ x \in \big(0\,,\pi\big) \\ \int\limits_0^x (-1)\,\mathrm{d}\xi = -x \quad \text{per} \ \ x \in \big(-\pi\,,0\big)\,, \end{cases}$$

$$= |x|\,, \qquad x \in \big(-\pi\,,\pi\big)$$

abbiamo

$$c_o(g) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |x|\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{\pi} x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\, \frac{x^2}{2}\,\bigg|_{x=0}^{x=\pi} = \frac{\pi}{2}\,.$$

Calcoliamo anche i coefficienti di Fourier reali di g :

$$\begin{aligned} a_o(g) &= 2\,c_o(g) = \pi\,, \\ a_k(g) &= c_k(g) + c_{-k}(g) = \frac{2}{\pi}\, \frac{(-1)^k - 1}{k^2}\,, \qquad && k \geq 1\,, \\ b_k(g) &= i\big(c_k(g) - c_{-k}(g)\big) = 0\,, && k \geq 1\,. \end{aligned}$$

Osservazione 1.

Osserviamo che la funzione g nel compito precedente risulta pari. In generale, se $\varphi : (-a\,,a) \longrightarrow \mathbb{C}$ è una funzione continua e regolare a tratti, allora

$$\varphi \text{ pari} \iff \varphi' \text{ dispari :}$$

Supponiamo prima che φ è pari, cioè che $\varphi(-x) = \varphi(x)$ per ogni $x \in (-a\,,a)$. Allora abbiamo per ogni $x \in (-a\,,a)$

$$\varphi'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\varphi(-x) = \varphi'(-x)\,(-x)' = -\,\varphi'(x)\,,$$

cioè la derivata φ' è dispari.
Supponiamo adesso che φ' è dispari, cioè che $\varphi'(-\,x) = -\,\varphi'(x)$ per ogni $x \in (-a\,,a)$. Allora

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(\varphi(x) - \varphi(-x)\Big) = \varphi'(x) + \underbrace{\varphi'(-x)}_{=\,-\,\varphi'(x)} = \varphi'(x) - \varphi'(x) = 0$$

per ogni $x \in (-a\,,a)$, quindi la funzione $\varphi(x) - \varphi(-x)$ è costante. Risulta

$$\varphi(x) - \varphi(-x) = \varphi(0) - \varphi(-0) = 0\,, \qquad x \in (-a\,,a)\,,$$

cioè la funzione $\varphi(x) - \varphi(-x)$ si annulla identicamente.

Similmente si verifica che

$$\varphi \text{ dispari} \iff \varphi' \text{ pari.}$$

Osservazione 2.

La funzione g nel compito essendo continua, regolare a tratti e periodica di periodo 2π, la sua serie di Fourier converge uniformamente. Cosicché abbiamo nell'intervallo $\big(-\,\pi\,,\pi\big)$

$$\frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k - 1}{k^2}\cos(kx) = |x|\,,$$

cioè

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{\substack{k\geq 1\\ k \text{ dispari}}}\frac{1}{k^2}\cos(kx) = |x| \iff \sum_{\substack{k\geq 1\\ k \text{ dispari}}}\frac{1}{k^2}\cos(kx) = \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi\,|x|}{4}\,,$$

dove le convergenze sono uniforme. In particolare, per $x = 0$,

$$\sum_{\substack{k\geq 1\\ k \text{ dispari}}}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{8}\,.$$

D'altro canto, applicando l'identità di Parseval a g si otteniene l'ugualità di

$$\frac{|a_o(g)|^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \Big(|a_k(g)|^2 + |b_k(g)|^2 \Big) = \frac{\pi^2}{2} + \sum_{\substack{k\geq 1 \\ k \text{ dispari}}} \frac{16}{\pi^2 k^4}$$

con

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \big| g(x) \big|^2 \,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \frac{x^3}{3} \Big|_{x=-\pi}^{x=\pi} = \frac{2\,\pi^2}{3} \,,$$

cioè l'identità

$$\sum_{\substack{k\geq 1 \\ k \text{ dispari}}} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^2}{16} \left(\frac{2\,\pi^2}{3} - \frac{\pi^2}{2} \right) = \frac{\pi^4}{96} \,.$$