NOME: ....   **MATRICOLA:** ....

Corso di Laurea in Fisica, A.A. 2010/2011
Calcolo 1, Esame scritto del 31.01.2011

1) Data la funzione

$$f(x) = e^{\frac{x^2+x}{x-1}} \,,$$

a) determinare il dominio (massimale) di f ;

b) trovare tutti gli asintoti di f ;

c) trovare tutti i massimi e minimi locali di f ;

d) tracciare un grafico qualitativo di f .

2) Data la funzione

$$f(x) = x \ln\bigl(\cos x\bigr) \,,$$

a) calcolare, in $x_0 = 0$, il polinomio di Taylor di ordine 6 di f ;

b) calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) + \dfrac{x^3}{2}}{3\,\sin(x^5)} \,.$$

3) Calcolare una primitiva della funzione

$$f(x) = \frac{(\sin x)\Big(\operatorname{arctg}(\cos x)\Big)}{(2-\cos x)^2} \ .$$

4) Sia data la funzione

$$f(x,y) = (x-2)^2 y^2 + \frac{x^2}{2} \ .$$

a) Trovare i massimi e minimi relativi di f .

b) Data la forma differenziale

$$\omega = \frac{\partial f}{\partial x}\, dx + \frac{\partial f}{\partial y}\, dy \ ,$$

calcolare l'integrale curvilineo $\displaystyle\int_\gamma \omega$ dove γ è la curva data dal grafico della funzione $y = \dfrac{\pi \sin x}{2x+\pi}$ per $x \in \left[0\,,\frac{\pi}{2}\right]$.

Soluzioni:

1) **:** a) $f(x)$ è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$ per quale ha senso $\dfrac{x^2+x}{x-1}$. Perciò il dominio di f è $\mathbb{R}\setminus\{1\} = \big(-\infty\,,1\big)\cup\big(1\,,+\infty\big)$.

b) Per trovare gli asintoti verticali calcoliamo i seguenti limiti :

$$\lim_{x\to 1-0} f(x) = e^{\frac{2}{-0}} = e^{-\infty} = 0\ ,$$
$$\lim_{x\to 1+0} f(x) = e^{\frac{2}{+0}} = e^{+\infty} = +\infty\ .$$

Risulta che f ha limite sinistro 0 in $x=-1$, ma la retta $x=-1$ è un asintoto verticale da destra.

La prima condizione per l'esistenza di un asintoto obliquo per $x\to+\infty$ è l'esistenza del limite finito

$$m_+ = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}\ .$$

Ma

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{(x^2-x)+2x}{x-1}}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x}{x}\cdot e^{\frac{2x}{x-1}}\right) = +\infty$$

e di conseguenza f non ha asintoto obliquo (in particolare, orizzontale) per $x\to+\infty$.

Per $x\to-\infty$ invece abbiamo

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} e^{x\,\frac{x+1}{x-1}} = e^{-\infty} = 0\ .$$

Di conseguenza $y=0$ è asintoto orizzontale di f per $x\to-\infty$.

c) Per trovare gli intervalli di monotonia e gli extremi locali di f , dobbiamo prima calcolare la sua derivata :

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{\frac{x^2+x}{x-1}}\,\frac{(2x+1)(x-1)-(x^2+x)}{(x-1)^2} \\ &= e^{\frac{x^2+x}{x-1}}\,\frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2} = e^{\frac{x^2+x}{x-1}}\left(1-\frac{2}{(x-1)^2}\right)\ . \end{aligned}$$

Risulta che i zeri di f' sono

$$1-\sqrt{2} \approx -0,41421356... , \qquad 1+\sqrt{2} \approx 2,41421356...$$

e

$$\begin{aligned} &f' \text{ è } > 0 \text{ in } \big(-\infty\,, 1-\sqrt{2}\big)\,, \\ &f' \text{ è } < 0 \text{ in } \big(1-\sqrt{2}\,, 1\big) \cup \big(1\,, 1+\sqrt{2}\big)\,, \\ &f' \text{ è } > 0 \text{ in } \big(1+\sqrt{2}\,, +\infty\big)\,. \end{aligned}$$

Cosicché f risulta ad essere

$$\begin{aligned} &\text{strettamente crescente in } \big(-\infty\,, 1-\sqrt{2}\big]\,, \\ &\text{strettamente decrescente in } \big[1-\sqrt{2}\,, 1\big) \text{ e in } \big(1\,, 1+\sqrt{2}\big]\,, \\ &\text{strettamente crescente in } \big[1+\sqrt{2}\,, +\infty\big)\,. \end{aligned}$$

In particolare, $1-\sqrt{2} \approx -0,41421356...$ è un punto di massimo locale e

$$f(1-\sqrt{2}) = e^{3-2\sqrt{2}} \approx 1,18717... ,$$

mentre $1+\sqrt{2} \approx 2,41421356...$ è un punto di minimo locale e

$$f(1+\sqrt{2}) = e^{3+2\sqrt{2}} \approx 339,82375... .$$

Rimarchiamo che l'estensione di f ad una funzione continua a sinistra su $\mathbb{R}$, indicata con la stessa lettera f, ha la derivata sinistra in 1

$$\begin{aligned} f_s'(1) = \; &\lim_{1>x\to 1} \frac{f(x)}{x-1} = \lim_{1>x\to 1} \frac{1}{x-1}\, e^{\frac{x^2+x}{x-1}} \\ &\overset{t=\frac{1}{1-x}}{=} \lim_{t\to+\infty} -\frac{1}{t}\, e^{-t+3-\frac{1}{t}} = 0\,. \end{aligned}$$

Riportiamo il comportamento di f' e di f nella seguente tabella :

x	$-\infty$		$1-\sqrt{2}$		1		$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	$0\,\vert$	$-$	0	$+$	
f	0	$\nearrow$	$e^{3-2\sqrt{2}}$	$\searrow$	$0\,\vert +\infty$	$\searrow$	$e^{3+2\sqrt{2}}$	$\nearrow$	$+\infty$

d) Usando le informazioni di cui sopra, è facile tracciare il grafico di f :

$y = 0$ è asintoto orizzontale di f per $x \to -\infty$. Il grafico di f sale da 0 fino al punto di massimo locale $\Big(1 - \sqrt{2}\,, e^{3-2\sqrt{2}}\Big) \approx \big(-0,41\,, 1,19\big)$, nel quale ha tangente orizzontale, poi scende in $(1\,, 0)$, dove ammette semiretta tangente orizzontale a sinistra.

Successivamente, il grafico di f scende a destra dell'asintoto verticale $x = 1$ dall'infinito fino al punto di minimo locale $\Big(1 + \sqrt{2}\,, e^{3+2\sqrt{2}}\Big) \approx \big(2,41\,, 339,82\big)$, nel quale ha tangente orizzontale, poi sale a $+\infty$ in $+\infty$.

Commenti sui punti di flesso di f .

Guardando il grafico di f ci accorgiamo che attorno al punto di massimo locale $1 - \sqrt{2}$ f dev'essere concava, mentre avvicinando da sopra l'asintoto orizzontale $y = 0$ per $x \to -\infty$, f deve diventare convessa e, in modo simile, avvicinando da sopra il punto $(1\,, 0)$, nel quale ha tangente orizzontale, deve diventare pure convessa. Perciò tra $-\infty$ e $1 - \sqrt{2}$ dovrebbe esistere almeno un punto di transizione da convessità a concavità, cioè un punto di flesso, e tra $1 - \sqrt{2}$ e 1 dovrebbe esistere almeno un punto di transizione da concavità a convessità, cioè un'altro punto di flesso.

In questi commenti ci proponiamo di identificare tutti i punti di flesso di f . A questo fine calcoliamo la seconda derivata di f :

$$\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(e^{\frac{x^2+x}{x-1}}\left(1 - \frac{2}{(x-1)^2}\right)\right) \\
&= e^{\frac{x^2+x}{x-1}}\left(\left(1 - \frac{2}{(x-1)^2}\right)^2 + \frac{4}{(x-1)^3}\right) \\
&= e^{\frac{x^2+x}{x-1}}\left(1 - \frac{4}{(x-1)^2} + \frac{4}{(x-1)^4} + \frac{4}{(x-1)^3}\right) \\
&= \frac{e^{\frac{x^2+x}{x-1}}}{(x-1)^4}\Big((x-1)^4 - 4\,(x-1)^2 + 4\,(x-1) + 4\Big)\ .
\end{aligned}$$

Risulta che il segno di $f''(x)$ coincide con il segno del polinomio

$$\begin{aligned}
P(x) &= (x-1)^4 - 4\,(x-1)^2 + 4\,(x-1) + 4 \\
&= \big((x-1)^2 - 2\big)^2 + 4\,(x-1)\ .
\end{aligned}$$

Chiaramente, $P(x) > 0$ per $x > 1$. Per studiare il segno di P in $(-\infty\,,1)$ ci conviene il cambio di variabile $t = x - 1$ così che

$$P(x) = Q(t) := \big(t^2 - 2\big)^2 + 4t\,.$$

Ora dobbiamo studiare il segno di Q nell'intervallo $(-\infty\,,0)$. A questo fine troviamo gli intervalli di monotonia di Q:

La derivata di Q è

$$\begin{aligned} Q'(t) &= 2\,(t^2 - 2)\,2t + 4 = 4\,(t^3 - 2t + 1) \\ &= 4\,(t-1)\,(t^2 + t - 1) \end{aligned}$$

e risulta il tabello di comportamento

t	$-\infty$		$\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$		$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$		1		$+\infty$
Q'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
Q	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{-1-5\sqrt{5}}{2}$	$\nearrow$	$\frac{-1+5\sqrt{5}}{2}$	$\searrow$	5	$\nearrow$	$+\infty$

Di conseguenza Q cambia segno due volte : una volta in un a tra $-\infty$ e $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$, da $+$ in $-$, ed un'altra volta in un b tra $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ e $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$, da $-$ in $+$.

Si verifica subito che $-2,3 < a < -2,2$:

$$Q(-2,3) = 1,6241 > 0\,, \qquad Q(-2,2) = -0,7344 < 0\,.$$

Similmente, $-0,7 < b < -0.6$:

$$Q(-0,7) = -0,5199 < 0\,, \qquad Q(-0,6) = -0,2896 > 0\,.$$

Cosicché f ha due punti di flesso, $a+1$ e $b+1$, che verificano

$$-1,3 < a+1 < -1,2 < 1 - \sqrt{2} < 0 < 0,3 < b+1 < 0,4 < 1\,,$$

e

$$\begin{aligned} &f \text{ è convessa in } (-\infty\,, a+1)\,, \\ &f \text{ è concava in } (a+1\,, b+1)\,, \\ &f \text{ è convessa in } (b+1\,, 1)\,, \\ &f \text{ è convessa in } (1\,, +\infty)\,. \end{aligned}$$

2) : a) Il polinomio di Taylor di ordine 6 di f in $x_o = 0$ sarà il prodotto di x con il polinomio di Taylor di ordine 5 di $g(x) = \ln\bigl(\cos x\bigr)$ in $x_o = 0$.

Il polinomio di Taylor di $\ln\bigl(\cos x\bigr)$ tramite calcolo diretto.

Calcoliamo le prime cinque derivate di g . Poiché

$$g'(x) = \frac{1}{\cos x}\,(-\sin x) = -\operatorname{tg} x\,,$$

e così

$$g^{(k+1)}(x) = -\,(\operatorname{tg} x)^{(k)}\,,$$

il calcolo delle prime cinque derivate di g si riduce al calcolo delle prime quattro derivate di $\operatorname{tg} x$. Ma

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$$

implica

$$(\operatorname{tg} x)'' = 2\,(\operatorname{tg} x)(\operatorname{tg} x)' = 2\operatorname{tg} x + 2\,(\operatorname{tg} x)^3$$

e poi, successivamente,

$$\begin{aligned}(\operatorname{tg} x)''' &= 2\,(\operatorname{tg} x)' + 6\,(\operatorname{tg} x)^2(\operatorname{tg} x)' = 2 + 8\,(\operatorname{tg} x)^2 + 6\,(\operatorname{tg} x)^4\,,\\ (\operatorname{tg} x)^{(4)} &= 16\,(\operatorname{tg} x)(\operatorname{tg} x)' + 24\,(\operatorname{tg} x)^3(\operatorname{tg} x)'\\ &= 16\operatorname{tg} x + 40\,(\operatorname{tg} x)^3 + 24\,(\operatorname{tg} x)^5\,.\end{aligned}$$

Risultano

$$\begin{aligned} g(0) &= 0\,, & g'(0) &= 0\,,\\ g''(0) &= -1\,, & g'''(0) &= 0\,,\\ g^{(4)}(0) &= -2\,, & g^{(5)}(0) &= 0 \end{aligned}$$

e quindi il polinomio di Taylor di ordine 5 di g in $x_o = 0$ è

$$\frac{-1}{2!}x^2 + \frac{-2}{4!}x^4 = -\,\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12}\ .$$

Il polinomio di Taylor di $\ln\bigl(\cos x\bigr)$ tramite calcolo con "piccolo o".

È noto che

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5) \ \text{ per } \ x \to 0$$

e

$$\ln y = (y-1) - \frac{1}{2}(y-1)^2 + \frac{1}{3}(y-1)^3 + o\big((y-1)^3\big) \ \text{ per } \ y \to 1\,.$$

Ponendo qui sopra $y = \cos x$ e tenendo conto che per $x \to 0$ abbiamo

$$\begin{aligned}
\cos x - 1 &= \ -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)\,,\\
(\cos x - 1)^2 &= \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)\right)^2 = \frac{x^4}{4} + o(x^5)\,,\\
(\cos x - 1)^3 &= \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)\right)^3 = o(x^5)\,,
\end{aligned}$$

risulta, sempre per $x \to 0$,

$$\begin{aligned}
&\ln\big(\cos x\big)\\
&= \ -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5) - \frac{1}{2}\left(\frac{x^4}{4} + o(x^5)\right) + \frac{1}{3}\,o(x^5) + o\big(o(x^5)\big)\\
&= \ -\frac{x^2}{2} + \left(\frac{1}{4!} - \frac{1}{8}\right)x^4 + o(x^5)\\
&= \ -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^5)\,.
\end{aligned}$$

Di conseguenza il polinomio di Taylor di ordine 5 di g in $x_o = 0$ è

$$-\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12}\ .$$

Conclusione : il polinomio di Taylor di ordine 6 di f in $x_o = 0$ è

$$x\left(-\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12}\right) = -\frac{x^3}{2} - \frac{x^5}{12}\ .$$

b) Applicando la formula di Taylor con il resto di Peano alla funzione f si ottiene

$$f(x) = -\frac{x^3}{2} - \frac{x^5}{12} + o(x^6) \ \text{ per } \ x \to 0\ .$$

Cosicché

$$\frac{f(x) + \dfrac{x^3}{2}}{3\,\sin(x^5)} = \frac{-\dfrac{x^5}{12} + o(x^6)}{3\,x^5} \cdot \frac{x^5}{\sin(x^5)} \ \text{ per } \ x \to 0$$

e quindi

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) + \dfrac{x^3}{2}}{3\,\sin(x^5)} = -\,\frac{1}{36}\ .$$

3) **:** Poiché l'integrando è il prodotto della funzione di solo $\cos x$

$$-\,\frac{\operatorname{arctg}(\cos x)}{(2-\cos x)^2}$$

e la derivata $-\,\sin x$ di $\cos x$, possiamo semplificare i calcoli tramite la sostituzione

$$t = \cos x\,, \qquad \mathrm{d}t = -\,\sin x\,\mathrm{d}x$$

ottenendo

$$\int \frac{(\sin x)\Big(\operatorname{arctg}(\cos x)\Big)}{(2-\cos x)^2}\,\mathrm{d}x = -\int \frac{\operatorname{arctg} t}{(2-t)^2}\,\mathrm{d}t\,.$$

Ora usiamo integrazione per parti per ridurre il calcolo all'integrazione di una funzione razionale :

$$\begin{aligned} -\int \frac{\operatorname{arctg} t}{(2-t)^2}\,\mathrm{d}t &= -\int \big(\operatorname{arctg} t\big)\,\mathrm{d}\bigg(\frac{1}{2-t}\bigg) \\ &= -\,\frac{\operatorname{arctg} t}{2-t} + \int \bigg(\frac{1}{2-t}\cdot\frac{1}{1+t^2}\bigg)\,\mathrm{d}t\,. \end{aligned}$$

Lo sviluppo di $\dfrac{1}{2-t}\cdot\dfrac{1}{1+t^2}$ in fratti semplici è dalla forma

$$\frac{1}{2-t}\cdot\frac{1}{1+t^2} = \frac{a}{2-t} + \frac{b\,t+c}{1+t^2}$$

ed allora

$$1 = a\,(1+t^2) + (b\,t+c)\,(2-t)\ .$$

Risultano

$$a = \frac{1}{5}\,, \quad b\,t + c = \frac{t+2}{5}$$

e di conseguenza

$$
\begin{aligned}
&\int \frac{(\sin x)\Big(\operatorname{arctg}(\cos x)\Big)}{(2-\cos x)^2}\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{\operatorname{arctg} t}{2-t} + \int \left(\frac{1}{2-t}\cdot\frac{1}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t \\
&= -\frac{\operatorname{arctg} t}{2-t} + \frac{1}{5}\int \frac{1}{2-t}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{5}\int \frac{t+2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= -\frac{\operatorname{arctg} t}{2-t} - \frac{1}{5}\ln\left|2-t\right| + \frac{1}{10}\int \frac{2t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t + \frac{2}{5}\int \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\Big) \\
&= -\frac{\operatorname{arctg} t}{2-t} - \frac{1}{5}\ln\left|2-t\right| + \frac{1}{10}\,\ln(1+t^2) + \frac{2}{5}\operatorname{arctg} t + C \\
&= -\frac{\operatorname{arctg} t}{2-t} + \frac{2}{5}\operatorname{arctg} t + \frac{1}{10}\ln\frac{1+t^2}{(2-t)^2} + C \\
&= -\frac{\operatorname{arctg}(\cos x)}{2-\cos x} + \frac{2}{5}\operatorname{arctg}(\cos x) + \frac{1}{10}\ln\frac{1+\cos^2 x}{(2-\cos x)^2} + C\ .
\end{aligned}
$$

4) : a) I massimi e minimi relativi di f sono *punti stazionari*, cioè annullano le derivate parziali di

$$f(x,y) = (x-2)^2 y^2 + \frac{x^2}{2}\ .$$

Per trovarli, calcoliamo le derivate parziali di f :

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= 2\,(x-2)y^2 + x\,, \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= (x-2)^2\,2\,y\,.
\end{aligned}
$$

Risulta che i punti stazionari di f sono le soluzioni del sistema di equazioni

$$\left\{\begin{array}{ll} 2\,(x-2)y^2 + x & = 0 \\ (x-2)^2\,2\,y & = 0 \end{array}\right.\ ,$$

cioè il punto

$$(0\,,0)\,.$$

Per poter dire se un punto stazionario è massimo o minimo relativo, calcoliamo anche le derivate parziali di secondo ordine :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y^2 + 1\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 4(x-2)\,y\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2(x-2)^2\,.$$

Perciò la matrice hessiana di f in $(x\,,y)$ è

$$H_f(x\,,y) = \begin{pmatrix} 2y^2+1 & 4(x-2)\,y \\ 4(x-2)\,y & 2(x-2)^2 \end{pmatrix}\,,$$

in particolare

$$H_f(0\,,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}\,.$$

Poiché il determinante della matrice hessiana in $(0\,,0)$ è uguale a $8 > 0$ e l'elemento nell'angolo sinistro superiore è $1 > 0$, il punto $(0\,,0)$ è un punto di minimo relativo.

b) Poiché ω è una forma differenziale esatta su $\mathbb{R}^2$ ed f è una sua primitiva, per ogni curva regolare a tratti in $\mathbb{R}^2$

$$[a\,,b] \ni t \longmapsto \gamma(t) \in \mathbb{R}^2$$

abbiamo

$$\int\limits_\gamma \omega = f\big(\gamma(b)\big) - f\big(\gamma(a)\big)\,.$$

In particolare, se γ è il grafico della funzione

$$y = \frac{\pi \sin x}{2x+\pi}$$

per $x \in \left[0\,,\frac{\pi}{2}\right]$, allora

$$\int\limits_\gamma \omega = f\left(\frac{\pi}{2}\,,\frac{1}{2}\right) - f\big(0\,,0\big) = \left(\frac{\pi}{2} - 2\right)^2 \frac{1}{4} + \frac{\pi^2}{8}$$
$$= \frac{3\pi^2}{16} - \frac{\pi}{2} + 1\,.$$